现代数学基础丛书 144

混沌、Mel'nikov方法及新发展

李继彬 陈凤娟 著

科学出版社

现代数学基础丛书 144

混沌、Mel'nikov 方法及新发展

李继彬 陈凤娟 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

物理、化学、力学和生物学中物质运动的数学模型往往用微分方程所定义的连续动力系统来模拟，这些动力学模型存在着复杂的动力学行为——混沌性质. 本书介绍精确地判定 Smale 马蹄存在意义下具有混沌性质的 Mel'nikov 方法，并介绍近年来学者们所发展的同宿和异宿到耗散鞍型周期轨道的同宿和异宿缠结理论.

本书主要面向从事动力系统应用的读者，亦可作为研究生和对常微分方程与动力系统感兴趣的人员的入门读物.

图书在版编目(CIP)数据

混沌、Mel'nikov 方法及新发展/李继彬，陈凤娟著. —北京：科学出版社，2012

(现代数学基础丛书；144)

ISBN 978-7-03-034740-4

I. ① 混… II. ① 李… ② 陈… III. ①混沌理论 IV. ①O415.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 123479 号

责任编辑：赵彦超 / 责任校对：包志虹
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 6 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2012 年 6 月第一次印刷 印张：21
字数：408 000

定价：75.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益.

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述. 据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷. 它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新.

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献.

杨　乐

2003 年 8 月

前言

1989 年, 本书第一作者曾在重庆大学出版社出版过 38 万字的《混沌与 Mel′nikov 方法》一书. 书稿是用铅字排版的, 当年五月底和六月初, 笔者应邀在重庆大学为数学系 1987 年入学的硕士研究生们讲 "分枝与混沌" 这门课, 并和排版师傅一起, 边铸新铅字, 边改边校对书稿. 第一次印刷的 2000 本书很快售罄. 有趣的是, 时隔二十余年, 迄今在网络上还有求购这本书的帖子, 这说明对读者而言, 该书的内容仍有学习的价值. 鉴于原来的铅字版早已毁掉, 今天的出版界也已远离 "铅与火", 编著者在保持原书风格的基础上, 结合当今研究的进展, 逐章地改写了原书, 增加了三章新发展的内容和大量的参考文献, 定名《混沌、Mel′nikov 方法及新发展》, 交由科学出版社出版.

兹录《混沌与 Mel′nikov 方法》一书的引言作为本书前言的一部分:

在现实世界中, 许多物理、力学、化学、生物和经济与社会学系统, 往往用微分方程所确定的数学模型来描述. 为揭示这些模型所反映的系统的内部结构, 人们作了各种各样的探索, 所获得的成果丰富和充实了微分方程经典学科的内容, 促进了该学科的发展, 增加了人们对于客观世界的理解. 大量的事实雄辩地说明, 集中精力对付某些有实际背景的系统是发展理论的指南和源泉.

19 世纪 80 年代由 H. Poincaré 所开创的微分方程定性理论, 在 20 世纪上半期由于与非线性振动的联系, 在应用方面获得令人刮目的进展. 在理论方面, G. D. Birkhoff 将经典微分方程所定义的动力系统抽象为拓扑动力系统. 随着 20 世纪 50 年代微分流形和微分拓扑理论的崛起, 传统的定义于 Euclid 空间上的微分方程被引申到微分流形上定义的动力系统, 形成了崭新的可微动力系统理论新学科, 获得了许多优秀的成果. 动力系统理论是与时间的发展有关的数学. 该理论的一般目标是寻找有效的方法, 回答问题: 随着时间的演化, 系统的性质如何? 理论的发展沿着两条并行的路线, 一方面, 发现简单性、可理解性和稳定性; 另一方面, 揭示复杂性、不稳定性和混沌性.

微分动力系统理论的新成果源于微分方程又反作用于微分方程, 提供了对于高维动力系统所确定的连续流的动态复杂性的理论思维. 这是符合认识发展的辨证法的. 1967 年, 美国动力系统专家 S.Smale 说过, "...... 常

微分方程定性理论中出现的若干现象和问题, 在微分同胚问题中以最简单形式同样出现. 因此, 作为第一步, 在微分同胚中发现定理; 第二步, 通常是倒回去, 将它们翻译成微分方程理论中的结果." 这样一种"倒回去"的工作, 简言之, 即微分方程研究中的动力系统方法. 编写本书的目的, 是介绍微分动力系统理论反作用于常微分方程的理论和应用中, 涉及对系统复杂性认识的某些基本结果.

20 世纪 70 年代以来, 对物理、力学、化学和生物学中各种动力学模型的计算机实验和模拟结果说明, 高于二维的微分方程所确定的向量场, 在某些参数条件下, 其轨道有复杂的混沌 (chaos) 性质. 什么是混沌, 如何理解混沌现象? 系统是如何伴随着参数的改变而发展为混沌行为的? 有什么精确的数学方法和技巧检验混沌行为的存在? 本书回答上述问题的某些精确的数学理解. 重点介绍检验 Smale 马蹄型混沌存在的 Mel'nikov 测量方法.

粗略地说, 作为一种动力学现象, 混沌所描述的是微分方程的解的轨道在相空间中关于初始条件的敏感依赖性和随时间长期发展的不可预测性. 早在 1890 年, Poincaré 就发现, 混沌的出现与双曲鞍点的稳定和不稳定流形的横截相交导致的同宿缠结 (homoclinic tangles) 紧密相关. 关于同宿缠结的研究导致 20 世纪 60 年代 Smale 马蹄映射的发现. Smale 马蹄具有复杂的动力学结构, 既实现了混沌的描述性定义又体现了所有同宿缠结的存在. 同宿缠结机制的这种概念性的简化和 Smale 马蹄映射的优美的几何结构使得现代动力系统理论的新思想得以向数学之外的科学领域广泛传播, 形成了非线性科学研究的新方向.

对于在应用中大量出现的依赖于时间的周期扰动的可积系统和 Hamilton 系统, 1963 年由苏联数学家 Mel'nikov 发展的分析方法, 经 Guckenheimer 和 Holmes 于 1983 年撰写的专著的再加工和介绍得到广泛传播和发展. 该方法通过测量系统轨道的 Poincaré 映射的双曲鞍点的稳定和不稳定流形之间的距离, 来精确地判定同宿缠结和 Smale 马蹄的存在性. 经过众多数学家近五十年的工作, Mel'nikov 所建立的方法已经被大大推广, 去处理高维系统和非双曲周期轨道的情况, 并发展到无穷维动力系统和随机动力系统的混沌性质研究. 读者可从本书所收录的大量参考文献了解当今的发展动态.

近年来, 为了填补抽象的非一致双曲动力系统理论与微分方程模型的具体应用之间的空白, 美国 Arizona 大学 Wang Qiudong 教授等发展了系列的新混沌理论 —— 秩为 1 的映射理论, 提供了对非一致双曲的同宿缠结的复杂的几何和动力学结构的深刻理解. 特别, 对于依赖于时间的周期和非周期扰动的二阶振子, 在假设未扰动系统有同宿到耗散鞍点的同宿轨道的条件下, 他们建立了系统的 Poincaré 映射的精确的数学表达式, 给出了 Poincaré 映射的同宿缠结的更为细致和完整的

刻画. 进而证明了系统的许多复杂的动力学行为的存在性. 我们用第 8~10 章共三章初步介绍这个新方向的某些新结果. 希望作进一步研究工作的读者, 应认真地学习 Wang Qiudong 等的原著.

本书主要面向从事动力系统应用的读者, 亦可作为硕士研究生、博士研究生和对常微分方程与动力系统感兴趣的人员的入门读物. 所介绍的内容是基本的, 可供对混沌及其应用感兴趣的研究人员参考. 阅读本书需要学习过数学分析和微分方程课程的基础知识.

本书的出版得到了国家自然科学基金重点基金 (10831003) 的资助. 编著者感谢浙江师范大学的支持及科学出版社赵彦超先生在出版过程中给予的帮助. Wang Qiudong 教授认真地审阅了后三章的原稿, 并提出了宝贵的改进建议, 编著者在此一并表示衷心的谢意.

作　者

2012 年 3 月

于浙江金华

目　　录

第 1 章　动力系统的基本概念

本章简要介绍动力系统的某些基本概念.

1.1　流和离散动力系统

"动力系统" 这个名词, 由 Poincaré 研究多体问题 —— 质点组动力学问题而产生. 后来被发扬光大, 沿用下来, 在数学上具有确定的含义. 考虑定义在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 上的微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{1.1.1}$$

其初始条件为 $x(0) = x_0$. 设 $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$, 则 (1.1.1) 的初值问题解 $x = \phi(t, x_0)$ 局部存在唯一. 再对 f 增加解整体存在唯一的条件, 即对于一切的 $t \in \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$, 设解 $x = \phi(t, x_0)$ 整体存在唯一. 由微分方程的一般理论可知, 函数 $\phi(t, x_0)$ 具有以下的性质:

(1) 确定性: 对于一切 $s, t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^n$, 有

$$\phi(0, x) = x; \quad \phi(s + t, x) = \phi(s, \phi(t, x)).$$

(2) 连续性: $\phi(t, x)$ 关于变元 t, x 在 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ 连续.

满足这两个性质的映射 $\phi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 构成以 t 为参数的从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的单参数连续变换群. 我们称 ϕ 为 $\mathbf{R}^n$ 中定义的动力系统或流.

对于给定的 $x \in \mathbf{R}^n$, 集合

$$\mathrm{Orb}_\phi(x) = \{\phi(t, x) |\ t \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^n$$

称为流 ϕ 过点 x 的轨道. $\mathbf{R}^n$ 称为状态空间或相空间, 每个点 $x \in \mathbf{R}^n$ 称为一个状态.

如果抛开微分方程, 设 X 是一个拓扑空间 (C^r 微分流形), 一般地, 考虑连续映射 (C^r 映射)$\phi : \mathbf{R} \times X \to X$, 并设 ϕ 满足确定性条件:

1° $\phi(s + t, x) = \phi(s, \phi(t, x))$, 对于一切 $s, t \in \mathbf{R}$, $x \in X$ 成立;

2° $\phi(0, x) = x$, 对于一切 $x \in X$ 成立.

此时, 称 ϕ 为定义在 X 上的一个拓扑动力系统 (C^r动力系统), 或者称 X 上的 $C^0(C^r)$ 流.

对于任意取定的 $t \in \mathbf{R}$, 由于 $\phi(t,\cdot)$ 定义了一个以 t 为参数的连续 (C^r 映射, 简记为 ϕ^t, 条件 1° 和 2° 可改写为

(1) $\phi^{s+t} = \phi^s \cdot \phi^t$, 对于一切 $s, t \in \mathbf{R}$, $x \in X$ 成立;

(2) $\phi^0 = id$.

由于对于任何固定的 $t \in \mathbf{R}$, ϕ^t 有逆映射 ϕ^{-t}, 因此, ϕ^t 是一个同胚 (C^r 微分同胚). 在拓扑空间 X 上定义的上述流 ϕ 同样关于 t 构成单参数的变换群, 参数的取值范围是实数加群 $\mathbf{R}^+$.

如果对流进行离散采样, 研究它每隔一段时间间隔 T 的状态, 我们得到一个两边有无穷多项的序列

$$\cdots, \phi^{-2T}, \phi^{-T}, \phi^0 = id, \phi^T, \phi^{2T}, \cdots.$$

这个序列由同胚 $f = \phi^T$ 所生成, 即

$$\phi^{kT} = \phi^T \circ \phi^T \circ \cdots \circ \phi^T = f \circ f \circ \cdots \circ f = f^k, \tag{1.1.2}$$

$$\phi^{-kT} = \phi^{-T} \circ \phi^{-T} \circ \cdots \circ \phi^{-T} = f^{-1} \circ f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1} = f^{-k}. \tag{1.1.3}$$

ϕ^T 称为流 ϕ 的时刻 T 映射, 又称 Poincaré 映射. 特别, ϕ^1 称为流 ϕ 的时刻 1 映射. 流 ϕ^t 的时刻 T 映射可看作流 $\psi^T = \phi^{Tt}$ 的时刻 1 映射. 因此, 只需考虑 $T = 1$ 情形.

一般地, 任给一个同胚 (C^r 微分同胚)f, f 不一定是某个流的时刻 1 映射, 同样能够生成一个双边序列

$$\cdots, f^{-2}, f^{-1}, f^0, f^1, f^2, \cdots, \tag{1.1.4}$$

其中, $f^0 = id, f^k = f \circ f^{k-1} = f \circ f \circ \cdots \circ f$; $f^{-k} = (f^{-1})^k$. 显然 f 满足关系:

(1) $f^{k+l} = f^k \circ f^l$, 对于一切 $k, l \in \mathbf{Z}$ 成立;

(2) $f^0 = id$.

与流的情形类比, 人们称这种由同胚 (C^r 微分同胚) 生成的双边序列为离散动力系统. 离散动力系统也是一个单参数变换群, 其参数取值范围是整数加群 $(\mathbf{Z}, +)$.

由于存在没有全局截面的流, 因此, 一般而言, 不能说每个流通过取 Poincaré 映射必对应一个微分同胚. 但是, 流经过采样离散化而得到一个低一维的离散动力系统. 流的时刻 1 映射总是一个同胚. 反之, 采用 "扭扩" (suspension) 微分同胚 f (见图 1.1.1), 可构造 f 作为某个流的 Poincaré 映射. 这里不再赘述. 正因为流和离散动力系统有这样紧密的关系, 才激励着离散动力系统理论的大发展. 我们研究流所得到的结论, 往往可用于微分同胚情形. 反之, 在一定的条件下, 由微分同胚所获得的信息, 可用于研究比微分同胚高一维的流. 人们往往首先在微分同胚的研究中

去发现定理, 反过来又用之于微分方程所定义的流, 以得到相应的结果. 这就是微分方程研究的动力系统方法.

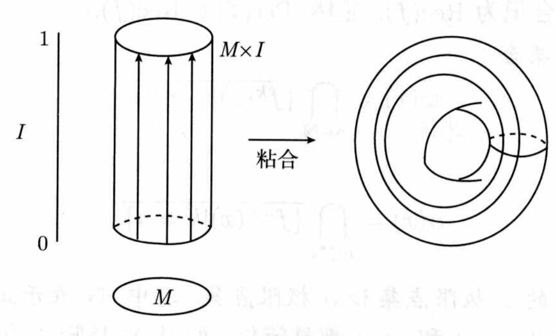


图 1.1.1 离散动力系统的扭扩

上面的讨论都是由同胚 (C^r 微分同胚) 生成的系统, 如果我们更一般地考虑连续映射 (C^r 映射) 的迭代: $f^0 = id,\ f^1, f^2, \cdots, f^k, \cdots, k \in Z^+$, 所得到的系统称为拓扑半动力系统 ($C^r$ 微分半动力系统).

1.2 基本定义和性质

设 X 是拓扑空间 (C^r 流形), $f: X \to X$ 是一个同胚 (C^r 微分同胚).

定义 1.2.1 集合 $\mathrm{Orb}_f(x) = \{f^k(x) | k \in \mathbf{Z}\}$, $\mathrm{Orb}_{f^+}(x) = \{f^k(x) | k \in \mathbf{Z}^+\}$, $\mathrm{Orb}_{f^-}(x) = \{f^k(x) | k \in \mathbf{Z}^-\}$ 分别称为离散动力系统 f 过点 x 的轨道、正半轨道和负半轨道.

显然, $\mathrm{Orb}_f(x) = \mathrm{Orb}_{f^+}(x) \cup \mathrm{Orb}_{f^-}(x)$. 如不产生混淆, 可简记 $\mathrm{Orb}_f(x)$ 为 $\mathrm{Orb}(x)$.

定义 1.2.2 若存在正整数 $n \geqslant 1$, 使得 $f^n(x) = x$ 成立, 称 x 为 f 的周期点; 使得 $f^n(x) = x$ 成立的最小自然数 n, 称为 x 的周期. 特别, 周期为 1 的点, 称为 f 的不动点.

用记号 $\mathrm{Per}(f)$ 和 $\mathrm{Fix}(f)$ 分别表示 f 的周期点集合和不动点集合. 显然, $\mathrm{Fix}(f) \subset \mathrm{Per}(f)$.

定义 1.2.3 设 $x \in X$, 若存在正整数 $m > 0$, 使得 $f^m(x)$ 是 f 的周期点, 则称 x 为 f 的准周期点 (或称终于周期点).

f 的终于周期点集合记为 $\mathrm{EPer}(f)$. f 的周期点必是准周期点, 反之不真. 并且

$$\mathrm{Per}(f) \subset \mathrm{EPer}(f) = \bigcup_{m=0}^{\infty} f^{-m}(\mathrm{Per}(f)).$$

定义 1.2.4　设 $x \in X$, 若对 x 的任意邻域 $U(x) \subset X$, 都存在 $n > 0$, 使得 $f^n(x) \in U(x)$, 则称 x 为 f 的回复点 (recurrence point).

f 的回复点集合记为 $\mathrm{Rec}(f)$. 显然, $\mathrm{Per}(f) \subset \mathrm{Rec}(f)$.

定义 1.2.5　集合

$$\omega(x) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \overline{\{f^k(x) | k \geqslant n\}}$$

与

$$\alpha(x) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \overline{\{f^{-k}(x) | k \geqslant n\}}$$

分别称为 $\mathrm{Orb}_f(x)$ 的 ω 极限点集和 α 极限点集. 其中, $\mathbf{N}$ 表示正整数集合.

由这个定义可见, $\omega(x)$ 和 $\alpha(x)$ 都是闭集. 如果 X 是紧致的度量空间, 则对于一切 $x \in X$, $\omega(x)$ 和 $\alpha(x)$ 都是非空的.

定义 1.2.6　设 $x \in X$, 若存在 x 的邻域 $U(x) \subset X$, 使得对于一切 $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$, $f^k(U(x)) \cap U(x) = \varnothing$, 其中 $\varnothing$ 表示空集, 则称 x 为 f 的游荡点. 不是游荡点的点称为非游荡点 (non-wandering point). 换言之, 对 x 的任意邻域 $U(x)$, 总存在整数 $k \neq 0$, 使得 $f^k(U(x)) \cap U(x) \neq \varnothing$, 则称 x 为 f 的非游荡点.

f 的非游荡点全体所构成的集合称为 f 的非游荡集, 记为 $\Omega(f)$. 由该定义可知, f 的游荡点集是开集, f 的非游荡集 $\Omega(f)$ 是闭集.

定义 1.2.7　设集合 $\Lambda \subset X$, 且 $F(\Lambda) = \Lambda$ (对于半动力系统 $F(\Lambda) \subset \Lambda$), 称 Λ 为 f 的不变集. 又若 Λ 是 f 的非空闭不变集, 并且不存在真包含于它之中的非空闭不变子集, 则称 Λ 为 f 的极小集.

定理 1.2.1　设 $f: X \to X$ 是一个连续映射, 则

(i) $\Omega(f)$ 是闭集;

(ii) $\bigcup_{x \in X} \omega(x) \subset \Omega(f)$, 从而 $\Omega(f)$ 非空;

(iii) 全体周期点集 $\mathrm{Per}(f) \subset \Omega(f)$;

(iv) $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$, 又若 f 为同胚, 则 $\Omega(f)$ 为不变集, 即 $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$.

证　(i) 根据定义 1.2.6, $X - \Omega(f)$ 为开集, 故 $\Omega(f)$ 为闭集.

(ii) 设 $x \in X, y \in \omega(x)$, 兹证 $y \in \Omega(f)$. 用 V 表示点 y 的邻域, 兹求满足 $f^{-n}(V) \cap V \neq \varnothing$ 的 $n \geqslant 1$, 从而存在 $n \geqslant 1$ 和某个 $z \in V$, 满足 $f^n(z) \in V$. 事实上, 因为 $y \in \omega(x)$, 故存在自然数列 $\{n_i\}$, 满足 $f^{n_i}(x) \to y$, 选择 $n_{i0} < n_{i1}$, 且 $f^{n_{i0}}(x) \in V$, $f^{n_{i1}}(x) \in V$. 于是, 取 $n = n_{i1} - n_{i0}$, $z = f^{n_{i0}}(x)$, 即得到结论.

(iii) 若 $f^n(x) = x, n > 0, U$ 是 x 的邻域, 则有 $x \in f^{-n}(U) \cap U$, 从而 $x \in \Omega(f)$.

(iv) 设 $x \in \Omega(f), V$ 为 $f(x)$ 的邻域, 则 $f^{-1}(V)$ 是 x 的邻域. 从而存在某个 $n > 0$, 使得 $f^{-(n+1)}(V) \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$. 因此, $f^{-n}(V) \cap V \neq \varnothing$, 故 $f(x) \in \Omega(f)$, 即

$f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$. 如果 f 是同胚, 必有 $\Omega(f) = \Omega(f^{-1})$. 因此, 由 $f^{-1}(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$ 知, $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$, 即 $\Omega(f)$ 是不变集. □

定义 1.2.8 (i) 连续映射 $f: X \to X$ 称为单边拓扑传递的 (topologically transitive), 倘若存在某些 $x \in X$, 其半轨道 $\{f^n(x)|n \geqslant 0\}$ 在 X 中稠;

(ii) 同胚映射 $f: X \to X$ 称为拓扑传递的, 倘若存在某些 $x \in X$, 其轨道 $\mathrm{Orb}_f(x) = \{f^n(x)|n \in \mathbf{Z}\}$ 在 X 中稠.

如果同胚映射 $f: X \to X$ 是单边拓扑传递的, 称 f 是拓扑混合的. 存在例子说明, 拓扑传递的同胚映射 f 不是拓扑混合的. 反之, f 拓扑混合必拓扑传递, 且 $\Omega(f) = X$.

定理 1.2.2 设 $f: X \to X$ 是紧致度量空间的同胚映射, 则以下的说法等价:

(i) f 是拓扑传递的;

(ii) 设 E 是 X 的闭子集, 是 f 的不变集, 则或者 $E = X$, 或者 E 无处稠密 (换言之, 对于任何满足 $f(U) = V$ 的开子集 $U \subset X$, 或者 $U = \varnothing$, 或者 U 为稠集);

(iii) 对任何非空开集 U, V, 存在 $n \in \mathbf{Z}$, 使得 $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$;

(iv) 集合 $\{x \in X : \overline{\mathrm{Orb}_f(x)} = X\}$ 是稠的 G_δ 集合.

证 (i) $\Rightarrow$ (ii). 设 $x_0 \in X, \mathrm{Orb}_f(x_0)$ 在 X 中稠, 从而 $\overline{\mathrm{Orb}_f(x_0)} = X$. 设 $E \neq \varnothing$, 且 E 为闭集, 关于 f 不变. 若 U 为开集且 $U \subset E, U \neq \varnothing$, 则存在 p 使得 $f^p(x_0) \in U \subset E$. 从而, $\mathrm{Orb}_f(x_0) \subset E$, 即 $X = E$. 因此, 或者 $E = X$, 或者 E 无内点.

(ii)$\Rightarrow$(iii). 设 U, V 是非空开集, 则 $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} f^n(U)$ 为开集, 且关于 f 不变, 由 (ii) 中条件, 该集合必为稠集, 从而 $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.

(iii)$\Rightarrow$(iv). 用 $U_1, U_2, \cdots, U_n$ 表示 X 的可数基, 则集合 $\{x \in X|\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} = X\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=-\infty}^{\infty} f^m(U_n)$, 且由 (iii) 的条件 $\bigcup\limits_{m=-\infty}^{\infty} f^m(U_n)$ 稠, 由此即得 (iv) 的结论.

由 (iv)$\Rightarrow$(i) 是显然的. □

以下设拓扑空间 X 是可度量化的, 其距离函数为 d.

定义 1.2.9 设 $f: X \to X$ 是一个连续映射, 称 f 关于初始条件具有敏感依赖性, 倘若存在 $\delta > 0$, 使得对于一切 $x \in X$ 和 x 的任何邻域 U, 恒存在 $y \in U, n \geqslant 0$ 使得 $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

定理 1.2.3 如果同胚映射 $f: X \to X$ 是拓扑传递的, 并且 f 有稠的周期点, 则 f 关于初始条件具有敏感依赖性.

证 由于 f 的周期点在 X 中稠, 必存在数 $\delta_0 > 0$, 使得对每个 $x \in X$, 存在

f 的周期点 $q \in X$, 满足 $d(\mathrm{Orb}_f(q), x) \geqslant \dfrac{1}{2}\delta_0$. 事实上, 任取两个周期点 q_1 和 q_2, 记 $\delta_0 = d(\mathrm{Orb}_f(q_1), \mathrm{Orb}_f(q_2))$. 由三角不等式得 $d(\mathrm{Orb}_f(q_1), x) + d(\mathrm{Orb}_f(q_2), x) \geqslant d(\mathrm{Orb}_f(q_1), \mathrm{Orb}_f(q_2)) = \delta_0$. 故 $d(\mathrm{Orb}_f(q_1), x) \geqslant \dfrac{1}{2}\delta_0$ 或 $d(\mathrm{Orb}_f(q_2), x) \geqslant \dfrac{1}{2}\delta_0$.

以下证 f 具有敏感常数为 $\delta = \dfrac{1}{8}\delta_0$ 的初始条件敏感依赖性. 设 $x \in X$, V 为 x 的某个邻域. 由于 f 的周期点是稠的, 在 x 为中心, δ 为半径的球 $B_\delta(x)$ 与 V 之交集 $U = V \cap B_\delta(x)$ 中, 必存在周期为 n 的周期点 p. 如前所述, 存在另一个周期点 $q \in X$(未必在 U 内), 满足 $d(\mathrm{Orb}_f(q), x) \geqslant 4\delta = \dfrac{1}{2}\delta_0$. 记 $\hat{V} = \bigcap\limits_{i=0}^{n} f^{-i}(B_\delta(f^{-i}(q)))$. 显然, $\hat{V}$ 为开集, 且 $q \in \hat{V}$, 即 $\hat{V}$ 非空. 根据 f 的拓扑传递性, U 中必有一点 y, 并存在某个自然数 k, 使得 $f^k(y) \in \hat{V}$. 取 $j = \left[\dfrac{k}{n} + 1\right]$, 其中 $[\cdot]$ 表示该数的整数部分. 于是, $1 \leqslant (nj - n) \leqslant n$. 从而

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(\hat{V}) \subseteq B_\delta(f^{nj-k}(q)).$$

由于 p 是周期点, $f^{nj}(p) = p$. 应用三角不等式

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) = d(p, f^{nj}(y)) \geqslant d(x, f^{nj-k}(q)) - d(f^{nj-k}(q), f^{nj}(y)) - d(p, x)$$

和关系 $p \in B_\delta(x), f^{nj}(y) \in B_\delta(f^{nj-k}(q))$ 可得

$$d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.$$

再次用三角不等式可证

$$d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta \quad \text{或} \quad d(f^{nj}(x), f^{nj}(p)) > \delta$$

成立. 在两种情形, 都已找到 V 中的点, 使得 f^{nj} 作用于该点后与 $f^{nj}(x)$ 的距离大于 δ, 即 f 关于初始条件具有敏感依赖性. □

这个定理考虑的是度量空间中的连续映射, 具有一般性. 如果限制空间为一维的, 则以下结论成立:

定理 1.2.4　设 I 表示一个区间 (不必有限), $f: I \to I$ 是连续的拓扑传递映射. 则 (1) f 的周期点在 I 中稠; (2) f 关于初始条件具有敏感依赖性.

下面设 f 为 $C^r, r \geqslant 1$ 微分同胚. 用 $Df(x_0)$ 表示 f 在 $x_0 \in X$ 的线性化算子.

定义 1.2.10　(i) f 的不动点 $\tilde{x}$ 称为稳定的, 倘若对 $\tilde{x}$ 的每个邻域 U, 都存在 $\tilde{x}$ 的邻域 $\tilde{U} \subset U$, 使得若 $x \in \tilde{U}$, 则对一切 $m > 0, f^m(x) \in U$ 成立. 若不动点 $\tilde{x}$ 是稳定的, 并且对一切 $x \in \tilde{U}$, $\lim\limits_{m\to\infty} f^m(x) = \tilde{x}$, 则称不动点 $\tilde{x}$ 是渐近稳定的, 渐近稳

定的不动点又称吸引的不动点.

(ii) f 的周期为 n 的周期点 $\tilde{x}$ 称为双曲的, 倘若 $Df^n(\tilde{x})$ 的所有特征值都不等于 1.

对于二维情形, $\tilde{x}$ 称为双曲的, 倘若 $Df^n(\tilde{x})$ 的两特征值的模一个大于 1, 一个小于 1.

1.3 拓扑共轭、结构稳定性与分枝

设 X 和 Y 是拓扑空间 (C^r 微分流形), $f: X \to X$ 和 $g: Y \to Y$ 是同胚 (C^r 微分同胚).

定义 1.3.1 若存在从空间 X 到空间 Y 的同胚映射 $h: X \to Y$, 使得

$$h \circ f = g \circ h,$$

则称 f 和 g 拓扑共轭 (见图 1.3.1).

显然, 拓扑共轭是整个同胚空间上的等价关系. 拓扑共轭映射 h 把系统 f 过点 x 的轨道变成系统 g 过点 $h(x)$ 的轨道; 把轨道 $\mathrm{Orb}_f(x)$ 的 $\omega(\alpha)$ 极限点变成轨道 $\mathrm{Orb}_g h(x)$ 的 $\omega(\alpha)$ 极限点; 把 f 的 n 周期点变成 g 的 n 周期点; 把 f 的非游荡集变成 g 的非游荡集, 等等. 总之, 拓扑共轭的两个系统有相同的轨道结构. 因此, 研究动力系统时, 拓扑共轭的两个系统可看作同一个系统.

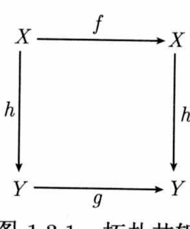


图 1.3.1 拓扑共轭

一个动力系统在什么样的条件下经 “扰动” 而不改变轨道结构? 这就是扰动系统的 “持续性” 问题, 或结构稳定性问题.

所谓扰动系统的 “小扰动”, 与一切映射组成的空间的拓扑有关. 以 Euclid 空间的映射为例, 设 $U \subset \mathbf{R}^n$ 是一个开集, 对映射的集合引进 C^r 弱拓扑, 即 “在任何紧集上直到 r 阶微分一致收敛的拓扑”. 任给 $f \in C^r(U, \mathbf{R}^n)$, f 的基本邻域为

$$u(f, K, \varepsilon) = \{g \in C^r(U, \mathbf{R}^n) | \sup_{x \in X} \|D^j g(x) - D^j f(x)\| < \varepsilon, j = 0, 1, \cdots, r\},$$

其中, $K \subset U$ 是任意紧集, ε 是任意正实数. 注意, 高阶微分 $D^j g(x)$ 是一个 j 重线性映射, $\|D^j g(x)\|$ 表示 j 重线性映射的模.

兹考虑 C^r 流形 M 到 C^r 流形 N 的 C^r 映射集合 $C^r(M, N)$, 我们同样赋予这个集合以 C^r 弱拓扑. 设 $M = N$ 为紧致微分流形, 用 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 表示 M 到 M 的 C^r 微分同胚集合.

定义 1.3.2 $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ 称为是 C^r 结构稳定的, 如果存在 f 在 C^r 拓扑中的邻域 u, 使得对任意的 $g \in u$, 都与 f 拓扑共轭.

我们通常考虑 $r=1$ 情形, 如不混淆, 一般就称为结构稳定性. 动力系统的分枝理论与结构不稳定性有关.

定义 1.3.3　设 $\Sigma^r(M)$ 表示 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 中 C^r 结构稳定的 C^r 微分同胚集合, 称 $\Lambda^r(M)=\mathrm{Diff}^r(M)/\Sigma^r(M)$ 为分枝集. 换言之, 分枝集由一切结构不稳定的微分同胚的集合所组成.

对于向量场的分枝集, 通过定义结构稳定向量场和结构不稳定向量场, 我们得到类似的结果.

第 2 章 符号动力系统、有限型子移位和混沌概念

符号动力系统是一个特殊的动力系统. 通过类比的方法, 用符号模型来研究任意的动力系统, 称为符号动力系统方法. 混沌动力学是 20 世纪六七十年代非线性科学研究的一个重要方向. 本章主要介绍如何通过符号动力系统的性质来认识和理解混沌概念.

2.1 符号动力系统

设 $S=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$ 是由前 n 个正整数组成的集合. 对两个 S 中的元素 $a,b\in S$, 定义距离为

$$\delta(a,b)=\begin{cases}1, & \text{若 } a\neq b,\\ 0, & \text{若 } a=b.\end{cases} \tag{2.1.1}$$

于是, S 成为一个距离空间, 并有下述性质.

命题 2.1.1 *装备有度量 (2.1.1) 的集合 S 是紧的完全不连通的度量空间.*

用 Σ^N 表示由 S 中 N 个符号所组成的双边无穷序列. Σ^N 可看作 S 的两边无穷的 Descartes 积:

$$\Sigma^N=\cdots\times S\times S\times S\times\cdots=\prod_{i=-\infty}^{\infty}S^{(i)},\quad S^{(i)}=S,\quad i=0,\pm1,\cdots.$$

因此, $s\in\Sigma^N$ 意思是

$$s=\{\cdots s_{-n}\cdots s_{-1};s_0s_1s_2\cdots s_n\cdots\},\quad s_i\in S,\quad i\in\mathbf{Z}. \tag{2.1.2}$$

对于 $s,t\in\Sigma^N$, 通常定义距离

$$d(s,t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\delta(s_j,t_j)}{2^{|j|}}, \tag{2.1.3}$$

其中, $\delta(s_j,t_j)$ 由 (2.1.1) 确定. 有时也用以下式子定义距离

$$d(s,t)=\max\left(\frac{1}{2^{|j|}}\,\middle|\, j\in\mathbf{Z},s_j\neq t_j\right). \tag{2.1.4}$$

由此可知, $s,t\in\Sigma^N$ 满足 $s_j=t_j$, $|j|\leqslant n\in\mathbf{Z}/\{0\}$, 当且仅当 $d(s,t)\leqslant\dfrac{1}{2^{n+1}}$.

称 Σ^N 为 N 个符号的双边无穷序列空间.

命题 2.1.2　*具有度量 (2.1.3) 或 (2.1.4) 的空间 Σ^N 是紧的、完全的和完全不连通的空间.*

证　(1) 由于 S 紧, 根据 Tychonov 定理, S 的乘积空间也是紧的.

(2) 只需证明, 对任何 $s\in\Sigma^N$, 存在序列 $\{s^{(n)}\}\subset\Sigma^N$, 使得 $\lim\limits_{n\to\pm\infty}s^{(n)}=s$. 设 s 由 (2.1.2) 所表示. 取 $s^{(n)}=(\cdots s_{-n}\cdots s_{-1};s_0s_1\cdots s_n^*\cdots)$, 其中, 若 $s_n\neq 1, s_n^*=1$; 若 $s_n=1, s_n^*=0$. 显然, $s^{(n)}\in\Sigma^N/\{s\}$ 并且 $\lim\limits_{n\to\pm\infty}s^{(n)}=s$, 故 Σ^N 是完全的.

(3) 兹证 Σ^N 中的任何连通集至多包含一个点, 从而 Σ^N 完全不连通. 事实上, 在 Σ^N 的子集 D 中取两个不同的点 s 与 t, $s_k\neq t_k$, 并考虑两个开集

$$U=\{u\in\Sigma^N|u_k=s_k\},\quad V=\{v\in\Sigma^N|u_k\neq s_k\}.$$

于是, $U\cup V=\Sigma^N$, $U\cap V=\varnothing$, $s\in U\cap D$, $t\in V\cap D$. 即 D 是非连通集. □

注意, 紧性、连通性与完全性是同胚变换下的不变性质. 显然, 经典的 Cantor 三分集也具有命题 2.1.2 中的三条性质. 故 Σ^N 与 Cantor 集是同胚的.

现在定义 Σ^N 到它自己的一个映射, 记为 σ:

$$\sigma(s)=\{\cdots s_{-n}\cdots s_{-1}s_0;s_1s_2\cdots\},\quad s\in\Sigma^N,$$

或表示为 $[\sigma(s)]_j=s_{j+1}$. σ 称为移位映射. 当 σ 的定义域取 Σ^N 中的全体元素时, 通常称 σ 为 N 个符号的完全移位. 而 (σ,Σ^N) 称为具有 N 个符号的符号动力系统. 特别, 当 $N=2$ 时, 称 (σ,Σ^2) 为 Bernoulli 系统, 称 σ 为 Bernoulli 移位. 易见, $\sigma(\Sigma^N)=\Sigma^N$, 且 σ 是连续的映射.

命题 2.1.3　*移位映射 σ 有以下性质:*

(i) 存在由一切正整数周期组成的可数无穷多周期轨道;

(ii) 存在不可数无穷多非周期轨道;

(iii) 存在稠轨道,

并且 $\overline{\mathrm{Per}(\sigma)}=\Sigma^N$, 即 σ 的周期点集合在 Σ^N 中稠.

证　(i) 对于任何固定的 $k\in\mathbf{Z}^+/\{0\}$, 取长为 k 的符号段 $(0,0,\cdots,0,1)$ 作为重复的符号段而构造一个序列 s, 显然, s 为 σ 的周期为 k 的周期点, 因为 $\sigma^k(s)=s$. 由于 k 是任意的正整数, 因此, σ 的周期点是可数无穷多的.

(ii) 因为每个完全集有连续统的基数, 故 Σ^N 是不可数集. 除去可数多周期点集合, 余下的仍然为不可数集, 故 σ 存在不可数无穷多非周期轨道.

(iii) 只需证明 σ 在 Σ^N 中存在一条轨道, 该轨道可任意地逼近于 Σ^N 中每个点. 作为例子, 考虑 Σ^2 情形. 用下面的方法定义一个 $s\in\Sigma^2$: 对 $n\in\mathbf{Z}^+$, 取 s 中右边的 $\{s_n\}$ 段为以下顺序的符号段:

(a) 所有长为 1 的段: $\{0\},\{1\}$;

(b) 所有长为 2 的段：$\{0,0\},\{0,1\},\{1,0\},\{1,1\}$;

(c) 所有长为 3 的段：$\{0,0,0\},\{0,0,1\},\cdots,\{1,1,1\}$;

……

一切字长 m 的符号段都包含于 $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ 之中, 而对左半段 $\{s_{-n}\}$ 可任意选取. 由上面的取法可见, 在 s 的右半段已包含任何长为 m 的符号段. 反复应用移位映射 σ, s 右段的符号向左移动, 可使给定的某个符号段位于分隔号 “;” 附近. 因此 Σ^2 中任何给定的元素通过 σ 多次作用于 s 后, 都可任意地逼近于该元素, 这说明 s 在 Σ^2 中稠.

最后, 我们证明 $\overline{\mathrm{Per}(\sigma)}=\Sigma^N$. 对于任意点 $s\in\Sigma^N$, 取 $\{s_{-n}\cdots s_{-1};s_0s_1\cdots s_n\}$ 可构造一个周期点 s^n, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}s^n=s$, 故在 s 的任何邻域都存在周期点, 即 σ 的周期点集合在 Σ^N 中稠. □

由这个命题可见, 移位映射 σ 是拓扑传递的映射, 根据定理 1.2.3, 可得以下结论:

定理 2.1.1 *移位映射 σ 具有初始条件敏感依赖性. 即存在不可数子集 $S\subset\Sigma^N/\mathrm{Per}(\sigma)$, 满足*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup d(\sigma^n(x),\sigma^n(y))\geqslant 1, \forall x,y\in S, x\neq y$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\inf d(\sigma^n(x),\sigma^n(y))=0, \forall x,y\in S$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup d(\sigma^n(x),\sigma^n(y))\geqslant 1, \forall x\in S, \forall y\in \mathrm{Per}(\sigma)$.

2.2 有限型子移位

设 Σ^N 为上一节中定义的双边符号序列, σ 为定义于其上的移位映射.

定义 2.2.1 *设 A 是所有元素均为 0 或 1 的 $n\times n$ 矩阵, 若对一切 $1\leqslant i,j\leqslant n$, 存在 $M>0$ 使得 A^M 的一切元素 a_{ij}^M 是正的, 称 A 为不可约矩阵.*

例如, 当 $n=3$ 时, $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ 是不可约矩阵. 但是, $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 不是不可约矩阵.

定义 2.2.2 *记 $A=(a_{ij})_{i,j=0}^{N-1}$ 为 $N\times N$ 矩阵, $a_{ij}\in\{0,1\}$. 定义*

$$\Sigma_A=\{s\in\Sigma^N|a_{s_n,s_{n+1}}=1,n\in\mathbf{Z}\}.$$

称 $\sigma:\Sigma_A\to\Sigma_A$ 为有限型子移位. 又称符号动力系统 (Σ_A,σ) 为具有传递矩阵 A 的双边拓扑 Markov 链, 记为 $\mathrm{TMC}(\Sigma_A,\sigma)$.

显然, Σ_A 是 Σ^N 的闭子集. $\mathrm{TMC}(\Sigma_A,\sigma)$ 是 (Σ^N,σ) 的子系统.

定理 2.2.1　*有限型子移位 $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ 是拓扑传递映射的充分和必要条件为 A 是不可约矩阵.*

证　设 σ 是拓扑传递映射, 考虑集合

$$[i]_0 = \{(s_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \Sigma_A : s_0 = i\}, \quad i = 0, 1, \cdots, N-1.$$

这些集合是开的. 对给定的 $0 \leqslant i, j \leqslant N-1$, 显然, 存在 $M > 0$ 使得 $\sigma^{-M}[j]_0 \cap [i]_0 \neq \varnothing$. 选取 $(s_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \sigma^{-M}[j]_0 \cap [i]_0$. 于是, 有 $s_0 = i$, $s_M = j$. 注意

$$a_{ij}^M = \sum_{r_1=1}^{N-1} \cdots \sum_{r_{M-1}-1}^{N-1} a_{ir_1} a_{r_1 r_2} \cdots a_{r_{M-2}, r_{M-1}} a_{r_{M-1} j}.$$

由于 $a_{is_1} = a_{s_1 s_2} = \cdots = a_{s_{M-1} j} = 1$, 故 $a_{ij}^M \geqslant 1$.

反之, 设对于一切 $0 \leqslant i, j \leqslant N-1$, 有 $a_{ij}^M \geqslant 1$. 对给定的两个开集 $U, V \neq \varnothing$, 可取 $(i_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in U$ 和 $(j_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in V$ 使得对充分大的 $L > 0$ 有

$$U \supset [i_{-L}, i_{-L-1}, \cdots, i_L]_{-L}^L = \{(s_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \Sigma_A : s_k = i_k, -L \leqslant k \leqslant L\},$$

$$U \supset [j_{-L}, j_{-L-1}, \cdots, j_L]_{-L}^L = \{(s_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in \Sigma_A : s_k = j_k, -L \leqslant k \leqslant L\}.$$

根据假设, 可找到 $M > 0$ 使得 $a_{i_L, j_{-L}} \geqslant 1$. 这意味着可找到一段 $s_1', \cdots, s_{M-1}'$ 使得 $a_{i_L s_1'} = a_{s_1' s_2'} = \cdots = a_{s_{M-1}' j_{-L}} = 1$, 于是定义

$$s_n = \begin{cases} i_n, & \text{若 } n \leqslant L, \\ s_{n-L}', & \text{若 } L+1 \leqslant n \leqslant L+M-1, \\ j_{n-(2L+M)}, & \text{若 } L+M \leqslant n. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

因此, 有 $s \in U \cap \sigma^M V \neq \varnothing$. □

2.3　Li-Yorke 定理和 Sarkovskii 序

人们对于定义于区间上的连续函数的研究已有几百年的历史. 令人惊异的是, 连续映射的反复迭代存在一些非常美丽而深刻的规律. 这种规律由前苏联数学家 Sarkovskii 在 1964 年的一篇论文中所揭示.

兹按以下方式为自然数排序: 先排所有大于 1 的奇数 $3, 5, 7, \cdots$; 接着排所有形如 $3\times 2, 5\times 2, 7\times 2, \cdots$ 的数; 然后排所有形如 $3\times 2^k, 5\times 2^k, 7\times 2^k, \cdots$ 这样的数, $k \geqslant 2$; 最后, 再按降幂排列所有 2 的方幂 $\cdots, 2^4, 2^3, 2^2, 2, 1$. 用 $\triangleleft$ 表示这种顺序, 成为如下的表:

$$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft \cdots \triangleleft 3\times 2 \triangleleft 5\times 2 \triangleleft 7\times 2 \triangleleft \cdots$$

$$\cdots \lhd 3\times 2^2 \lhd 5\times 2^2 \lhd 7\times 2^2 \lhd \cdots \lhd 3\times 2^3 \lhd 5\times 2^3 \lhd 7\times 2^3 \lhd \cdots$$

$$\lhd 3\times 2^k \lhd 5\times 2^k \lhd 7\times 2^k \lhd \cdots \lhd 2^4 \lhd 2^3 \lhd 2^2 \lhd 2 \lhd 1.$$

定义 2.3.1 按上述方式为自然数排的序称为 Sarkovskii 序.

定理 2.3.1 设 $f: I \to \mathbf{R}$ 是从线段 $I=[0,1]$ 到实数轴 $\mathbf{R}$ 的连续映射. 如果 f 具有周期为 m 的周期点, 它就有按 Sarkovskii 序排列在 m 之后的一切自然数为周期的周期点, 即具有一切周期 $m\lhd$ 后的周期点.

连续映射定义了区间 I 上的一个半动力系统. 若用 $\mathrm{Per}(f)$ 表示其周期点的集合, 用 $\mathrm{PP}(f)$ 表示其周期点的周期的集合, 因为 $\mathrm{Per}(f)\subset I, \mathrm{PP}(f)\subset \mathbf{N}$, 在上述记号下, 定理 2.3.1 可用符号悉述如下：

$$m\in \mathrm{PP}(f), \quad m\lhd n \Longrightarrow n\in \mathrm{PP}(f).$$

定理 2.3.1 是用俄文发表的, 长期不为西方学者所知. 1975 年, T. Y. Li(李天岩) 和 J. A. Yorke 重新发现了该定理的一个特殊情形, 并首创地给出了混沌 (chaos) 的第一个定义. 他们的文章刺激了学界对半动力系统的广泛讨论. 我们介绍以下 Li-Yorke 定理的证明, 对定理 2.3.1 不作详细讨论.

定理 2.3.2 设 $f: I\to I$ 连续, 若 f 存在周期 3 点, 或等价地, 存在 $a\in I$, 使得 $f^3(a)=a<f(a)<f^2(a)$ (或 $f^3(a)>f(a)>f^2(a)$), 则

(i) f 的周期 $\mathrm{PP}(f)=\mathbf{N}$(自然数集);

(ii) 存在不可数集合 $S_0\subset I\setminus \mathrm{Per}(f)$, 满足

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup|f^n(x)-f^n(y)|>0, \forall x,y\in S_0, x\neq y$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\inf|f^n(x)-f^n(y)|=0, \forall x,y\in S_0$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup|f^n(x)-f^n(p)|>0, \forall x\in S_0, p\in \mathrm{Per}(f)$.

为证定理 2.3.2 需要如下的定义和引理:

定义 2.3.2 设 $I\subset\mathbf{R}$ 是给定的线段, $f: I\to\mathbf{R}$ 是连续映射, $K,L\subset I$ 是 I 的子线段. 如果 $f(K)\supset L$, 称 K 能够覆盖 L, 记为 $K \underset{f}{-}\!\rhd L$, 如不致混淆, 简记为 $K-\rhd L$.

以下设 $f: I\to R$ 为给定的连续映射, 而 J,K,L 等表示 I 的子线段.

引理 2.3.1 若 $J\subset I$ 是线段, 则 $f(J)$ 是线段.

证 这是连续函数的界值定理之简单推论. □

引理 2.3.2 $K\underset{f}{-}\!\rhd L$ 的充分必要条件是存在 $J=[r,\delta]\subset K$, 使得 $f(J)=L$, 且 J 的任何真子线段无此性质.

证 记 $L=[\sigma,\tau]$, 因为 $f(K)\supset L$, 故存在 $\alpha,\beta\in K$, 使得 $f(\alpha)=\sigma, f(\beta)=\tau$, 不妨设 $\alpha<\beta$ ($\alpha>\beta$ 情形类似处理). 记

$$r = \sup\{\xi \in K \mid \xi < \beta, f(\xi) = \sigma\},$$
$$\delta = \inf\{\eta \in K \mid \gamma < \eta, f(\eta) = \tau\}.$$

则 $J = [\gamma, \delta]$ 满足要求, 反之亦真. □

引理 2.3.3 若 $K \underset{f}{-\triangleright} K$, 则 f 在 K 中有不动点.

证 设 $K = [\sigma, \tau]$, 由引理 2.3.2, 存在极小子区间 $J = [\alpha, \beta] \subset K$, 使得 $f(J) = K$, 其中 $\sigma \leqslant \alpha < \beta \leqslant \tau$, 可能存在两种情况:

(1) $f(\alpha) = \sigma \leqslant \alpha, \quad f(\beta) = \tau \geqslant \beta$;

(2) $f(\alpha) = \tau > \alpha, \quad f(\beta) = \sigma < \beta$.

两种情形都存在 $\xi \in [\alpha, \beta]$, 使得 $f(\xi) = \xi$. □

引理 2.3.4 设 $\{I_n\}_0^\infty$ 为闭线段序列, $I_n \subset J$ 且 $I_0 -\triangleright I_1 -\triangleright I_2 -\triangleright I_3 -\triangleright \cdots -\triangleright I_{n-1} -\triangleright I_n -\triangleright I_{n+1} -\triangleright \cdots$. 则存在闭线段序列 $\{Q_n\}_0^\infty$, 使得 $Q_{n+1} \subset Q_n \subset I_0$ 且 $f^n(Q_n) = I_n, \forall n \geqslant 0$, 进而 $\forall x \in Q = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} Q_n$ 有 $f^n(x) \in I_n, \forall n \geqslant 0 \Big(Q = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} Q_n$ 是单点集合或闭线段$\Big)$.

证 定义 $Q_0 = I_0$, 则 $f^0(Q_0) = I_0$, 倘若 Q_{n-1} 已有定义, 且 $f^n(Q_{n-1}) = I_{n-1}$, 从而由条件, $I_n \subset f(I_{n-1}) = f^n(Q_{n-1})$, 将引理 2.3.2 应用于映射 f^n 与 Q_{n-1}, 可得存在闭区间 $Q_n \subset Q_{n-1}$, 使 $f^n(Q_n) = I_n$, 这就完成了归纳法证明引理前一部分, 又根据引理 2.3.3 可推出后一部分. □

推论 2.3.1 如果

$$I_0 -\triangleright I_1 -\triangleright I_2 -\triangleright \cdots -\triangleright I_{n-1} -\triangleright I_0,$$

则存在 $x_0 \in I_0$, 使 $f^n(x_0) = x_0$, 且对 $j = 0, 1, \cdots, n-1$ 有 $f^j(x_0) \in I_j$.

引理 2.3.5 若 $f^N(x) = x$, 则 x 的周期 n 能整除 N, 反之亦然; 又若 x 为 f 的周期 n 点, m 与 n 互素, 则 x 是 f^m 的 n 周期点 (证略).

定理 2.3.2 的证明 设存在 $a \in I$, 使 $f^3(a) = a < f(a) = b < f^2(a) = c$, 记 $K = [a, b], J = [b, c]$, 则有

$$\circlearrowright J \rightleftarrows K.$$

对任意自然数 $m = 3$, 考虑覆盖关系

$$J -\triangleright \underbrace{J -\triangleright J -\triangleright J -\triangleright \cdots -\triangleright J}_{m-1\text{次}} -\triangleright K -\triangleright J.$$

由引理 2.3.4 之推论可知, 存在 $\xi \in \mathrm{Fix}(f^m) \cap J$, 使得

$$f^{j-1}(\xi) \in J (j = 1, 2, \cdots, m-1), \quad f^{m-1}(\xi) \in K.$$

以下证 $f^k(\xi)$ 不是 3 周期轨道 a, b, c 中的点.

情况 1. 3 除不尽 m, 此时 $a, b, c \notin \mathrm{Fix}(f^m)$, 故 $f^k(\xi) \neq a, b$ 或 c.

情况 2. $m = 3n$, 这时因为 $m \neq 3$, 只能有 $m \geqslant 6, m-1 \geqslant 5$, 周期轨道 a, b, c 中任意点不能在 J 中接连停留 2 次以上, 故 $f^k(\xi) \neq a, b$ 或 c.

对上述两种情形都有

$$f^{j-1}(\xi) \in \mathrm{int}J \ (j = 1, 2, \cdots, m-1), \quad f^{(m-1)}(\xi) \in \mathrm{int}K.$$

从而可知 $\xi, f(\xi), \cdots, f^{m-1}(\xi)$ 两两不同, 即 ξ 确实为 f 的 m 周期点. 由 m 的任意性即得定理 2.3.2(i).

以下证定理 2.3.2(ii).

由于 $f(K) \supset J$ 和 $f(J) \supset K \cup J$, 因此有

$$f^2(K) \cap f^2(J) - \triangleright K \cup J.$$

根据引理 2.3.1, 存在闭线段 $I_0 \subset K, I_1 \subset J, I_0 \cup I_1 \neq \varnothing$ 使得 $f^2(I_0) = K, f^2(I_1) = J$. 于是 $f^4(I_0) \cap f^4(I_1) \supset K \cup J \supset I_0 \cup I_1$. 以下令 $g = f^4$, 兹证对 g 存在不可数集合 $S \subset I$, 其中不含周期点, 满足定理 2.3.2(ii), 显然这个 S 对 f 也满足定理 2.3.2(ii).

不失一般性, 设 $I = [0, 1]$, 记 $I_0 = [\underline{m_0}, \overline{m_0}], I_1 = [\underline{m_1}, \overline{m_1}], 0 \leqslant \underline{m_0} < \overline{m_0} < \underline{m_1} < \overline{m_1} \leqslant 1$. 根据引理 2.3.1, 存在 $\underline{m_1} \leqslant a_0 < b_0 \leqslant \overline{m_1}$, 使 $g(a_0, b_0) = (\underline{m_1}, \overline{m_1}), g(a_0) = \underline{m_1}, g(b_0) = \overline{m_1}$ (或者 $g(a_0) = \overline{m_1}, g(b_0) = \underline{m_1}$, 但此时再用 g^2 代替 g 又归结为括号外情形, 而这样做对证明无影响). 还存在点 $\xi \in I_1$, 使 $g(\xi) \leqslant \underline{m_0}$, 其中 $\xi \leqslant a_0$ 或 $\xi \geqslant b_0$, 不妨设 $\xi \leqslant a_0$.

利用引理 2.3.2 可以归纳地证明, 存在

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

使得

$$g([a_n, b_n]) = [a_{n-1}, b_{n-1}], \quad g(a_n) = a_{n-1}, \quad g(b_n) = b_{n-1}, \quad \forall n > 0.$$

记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a^*, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b^*$. 显然有 $g(a^*) = a^*, g(b^*) = b^*$ 且 $[a^*, b^*]$ 对 g 不变 (当 $a^* = b^*$ 时, $[a^*, b^*]$ 退化为不动点), 又因 $g(\xi) \leqslant \underline{m_0}$, 故 $g([a^*, b^*]) \supset I_0$.

以下构造闭线段序列 $E = \{M_n\}_0^\infty$, 其中 $M_n = I_0$ 或 $I_1, \forall n > 0$. 记所有这种序列之集合为 ζ. 对 $l > 0, 0 \leqslant n \leqslant l$, 记 $p(E, l)$ 为 $M_n = I_0$ 的个数. 对每个实数 $r \in (0, 1)$ 可以构造 $E^r = \{M_n^r\} \in \zeta$, 使满足 $\lim\limits_{k\to\infty} p(E^r, k^2)/k = r$, 这样的 E^r 并不唯一, 兹归纳构造如下:

设 $k_0>0$ 是使 $[k_0,r]=1$ 的最小整数, 记 $E^r_{k_0^2}=\{M^r_0,\cdots,M^r_{k_0^2}\}$, 使 $M^r_i=I_1,0\leqslant i<k_0^2,M^r_{k_0^2}=I_0$. 设对 $k>k_0,E^r_{k^2}=\{M^r_0,\cdots,M^r_{k_0^2},\cdots,M^r_{k^2}\}$ 已有定义. 归纳定义

$$E^r_{(k+1)^2}=\{M^r_0,\cdots,M^r_{(k+1)^2}\},$$

使其前 k^2+1 项与 $E^r_{k^2}$ 的项对应相等, 而

$$M^r_{k^2+j}=[a_{2k-1-j},a^*],\quad j=1,2,\cdots,2k-1,\quad M^r_{k^2+2k}=[m_1,a^*],$$

$$M^r_{(k+1)^2}=\begin{cases}I_0, & \text{当 } [(k+1)r]-[kr]=1,\\ M^r_{k^2+2k}, & \text{当 } [(k+1)r]-[kr]=0.\end{cases}$$

这样就完成了归纳步骤, 得到 $E^r=\{M^r_n\}\in\zeta$. 从构造过程可见, E^r 满足关系 $\lim\limits_{k\to\infty}p(E^r,k^2)/k=r$, 且满足引理 2.3.4 的条件 (其中 f 换成 g). 因此, 必存在闭线段序列 $\{Q^r_n\}$, $Q^r_{n+1}\subset Q^r_n\subset M^r_0,g^n(Q^r_n)=M^r_n$. 且若 $x^r\in Q^r=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}Q^r_n$, 则有 $g^n(x^r)\in M^r_n,\forall n\geqslant 0$.

设 $0<r<r_1<1$, 易证 $Q^r\cap Q^{r_1}=\varnothing$, 由此可见, 至多有可数个 $r\in(0,1)$, 可以使对应的 Q^r 为非单点集. 记 $S_0=\{x^r\in I\mid r\in(0,1)$ 使 Q^r 为单点集 $\}$. 于是, S_0 为不可数集合, 其中不包含周期点. 由于我们对 $r\in(0,1)$ 得到 $E^r=\{M^r_n\}\in\zeta$, 并且有 $x^r\in Q^r=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}Q^r_n$, 则 $g^n(x^r)\in M^r_n,\forall n\geqslant 0$. 于是, 对于映上 (满射) 的连续映射 $\varphi:S_0\to\Sigma(2)$, 有 $\varphi(x^r)=(i^r_0,i^r_1,\cdots)=i^r\in\Sigma(2)$ 且 $\varphi(g^n(x^r))=\sigma^n(i^r)$. 如果 φ 还是一一的 (单射), 则 φ 为同胚映射, 此时定理 2.3.2(ii) 的结论可由定理 2.1.1 的 (1)~(3) 推出, 然而, φ 未必是一一的.

以下证明定理 2.3.2(ii) 中结论 (a),(b),(c).

(a) 设 S_0 中不同两点 $x^r,x^{r_1},0<r<r_1<1$. 据定理 2.1.1 (1), $\lim\limits_{n\to\infty}\sup(\sigma^n(x^r),\sigma^n(x^{r_1}))>0$, 即存在 $n_1<n_2<\cdots<n_j<\cdots$, 使得 $\lim\limits_{j\to+\infty}\sigma^{nj}(x^r)=(i^r)\in\Sigma(2),\lim\limits_{j\to+\infty}\sigma^{nj}(x^{r_1})=i(r_1)\in\Sigma(2)$. 且 $d(i(r),i(r_1))>0$. 可设 $\lim\limits_{j\to+\infty}g^{nj}(x^r)=x(r)\in S_0,\lim\limits_{j\to+\infty}g^{nj}(x^{r_1})=x(r_1)\in S_0$. 由于 $\varphi(g^{nj}(x^r))=\sigma^{nj}(i^r),\varphi(g^{nj}(x^{r_1}))=\sigma^{nj}(i^{r_1})$, 故 $\varphi(x(r))=i(r),\varphi(x(r_1))=i(r_1)$. 从而, $|x(r)-x(r_1)|>0$. 即 $\lim\limits_{j\to+\infty}|g^{nj}(x^r)-g^{nj}(x^{r_1})|=|x(r)-x(r_1)|>0$.

(b) 同样, 设 x^r,x^{r_1} 为 S_0 中任意两点, $0<r<r_1<1$. 根据 $M^r_{k^2+j}=M^{r_1}_{k^2+j}=[a_{2k-1-j},a^*]$ $(j=1,2,\cdots,2k-1)$ 之构造, 有 $g^{k^2+1}(x^r)\in[a_{2k-2},a^*]$, $g^{k^2+1}(x^{r_1})\in[a_{2k-2},a^*]$, 故

$$|g^{k^2+1}(x^r)-g^{k^2+1}(x^{r_1})|\leqslant|a^*-a_{2k-2}|\to 0,\quad \text{当 } k\to\infty.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\inf |g^n(x^r) - g^n(x^{r_1})| = 0.$$

(c) 设 $x^r \in S_0, p \in \mathrm{Per}(g)$. 因 $\varphi(x^r) = i^r \in \Sigma(2)$ 满足定理 2.1.1, 又 $\varphi(p) \in \mathrm{Per}(\sigma)$, 故根据定理 2.1.1(3),

$$\lim_{n\to\infty}\sup d(\sigma^n(\varphi(x^r)), \sigma^n(\varphi(p))) > 0.$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty}\sup |g^n(x^r) - g^n(x^{r_1})| > 0.$$

定理 2.3.2 证毕.

Li-Yorke 的定理 2.3.2 的两个结论简要地说即 "周期 3 意味着混沌".

2.4 混沌概念的推广

上节所介绍的 Li-Yorke 的工作是关于混沌现象的第一个严格的数学表述和理论结果. 他们的工作激发了多个领域的科学工作者关于混沌现象的研究热情, 有关混沌概念的文章大量发表, 有兴趣的读者可参考叶向东等的专著《拓扑动力系统概论》.

概略地说, 数学上关于混沌的定义主要涉及以下方面: (1) 从初值敏感性出发的定义; (2) 从 Li-Yorke 混沌概念发展的定义; (3) 从拓扑熵的角度刻画系统的复杂性的定义; (4) 从具有强回复性来表现混沌.

1986 年, Devaney 以初值敏感性为核心给出以下定义:

定义 2.4.1 拓扑动力系统 (X,T) 称为 Devaney 意义下混沌的, 如果以下三条成立: (1) (X,T) 是拓扑传递的; (2) T 的周期点在 X 中稠密; (3) (X,T) 有初值敏感性.

由定理 1.2.3 可见, (1)+(2)⇒(3), 因此, 我们可舍弃 (2), 直接称满足 (1),(3) 条件的系统是混沌的.

沿着 Li-Yorke 的模式, 对于紧距离空间 (X,d) 上的连续自映射, 定理 2.3.2 中 Li-Yorke 混沌概念推广以后的形式为:

定义 2.4.2 设 f 为紧距离空间 (X,d) 上的连续自映射, $x,y \in X$. 如果

$$\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0,$$

则称 $(x,y) \in X$ 在 Li-Yorke 意义下混沌.

如果对任何两个不同的点 $x,y \in D$, (x,y) 在 Li-Yorke 意义下混沌, 则称集合 $D \subset X$ 为 Li-Yorke 混沌集.

如果动力系统 (X, f) 存在不可数的 Li-Yorke 混沌集, 则称 (X, f) 在 Li-Yorke 意义下混沌.

1978 年, Marotto 把 Li-Yorke 混沌的概念推广到了 n 维连续可微映射的情形, 提出了回归排斥子的概念, 使得判断高维映射混沌行为的存在性成为可能. 2005 年, 他又纠正了他所证明的定理的不足之处. 以下介绍他正确的结果.

考虑离散动力系统

$$X_{k+1} = F(X_k), \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{2.4.1}$$

其中 $X_k \in \mathbf{R}^n, F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 为连续可微映射.

定义 2.4.3 如果 $F(z) = z$, 而且 $\mathrm{DF}(z)$ 的所有特征值的模大于 1, 则称 F 的不动点 z 在 F 作用下是排斥的 (repelling). 如果对所有充分接近 z 的 x, y $(x \neq y)$, 存在数 $\sigma > 1$, 使得 $\|F(x) - F(y)\| > \sigma\|x - y\|$, 则称不动点 z 在 F 作用下是扩张的 (expanding).

显然, 所有扩张的不动点是排斥的, 但反之不真.

定义 2.4.4 设 F 的不动点 z 在 F 作用下是排斥的, 并设在 z 的排斥邻域内存在点 $x_0 \neq z$, 使得 $x_M = z$ 并且对一切 k, $1 \leqslant k \leqslant M$, $\det(DF(x_k)) \neq 0$, 其中 $x_k = F^k(x_0)$. 则称不动点 z 是映射 F 的一个回归排斥子 (snap-back-repeller).

定理 2.4.1 如果可微映射 F 具有一个回归排斥子, 那么系统 (2.4.1) 是在 Li-Yorke 意义下混沌的, 即

(1) 存在正整数 n, 使得对每个整数 $p \geqslant n$, 映射 F 具有 p 周期点;

(2) 存在不包含 F 周期点的不可数集 S, 使得

① $F(S) \subset S$;

② $\forall x, y \in S, x \neq y, \limsup\limits_{K\to\infty} \| F^K(x) - F^K(y) \| > 0$;

③ $\forall x \in S$, 对 F 的每一个周期点 y, $\limsup\limits_{K\to\infty} \| F^K(x) - F^K(y) \| > 0$;

(3) 存在 S 的不可数子集 S_0, 使得 $\forall x, y \in S_0, \liminf\limits_{K\to\infty} \| F^K(x) - F^K(y) \| = 0$.

最近, 赵怡等 (2009) 证明了比 Marotto 定理条件更弱的以下结果.

定理 2.4.2 设 F 为 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的映射, $z = 0$ 为 F 的不动点, 如果

(1) F 在 $B_r(0)$ 中连续可微, 其中 $B_r(0)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中以 0 为心, r 为半径的闭球;

(2) $DF(0)$ 关于 $B_r(0)$ 存在局部扩张坐标基 e;

(3) 存在半径 r', 正整数 M 和点 $x_0 \in B_{r'}(0)$, $x_0 \neq 0$, 使得 $F^M(x_0) = 0$ 而且 $\det(DF^M(x_0)) \neq 0$.

则系统 (2.4.1) 在 Li-Yorke 意义下混沌.

近年来, 史玉明和陈关荣等将 Marotto 定理推广到度量空间上定义的离散动力系统, 发表了系列文章. 详见书末的参考文献.

Schweizer 和 Smítal (1994) 对区间映射定义了另一种较 Li-Yorke 混沌更强的混沌 —— 分布混沌. 分布混沌研究点迭代后距离的统计性质, 而不考虑距离极值的极限行为.

总之, 关于混沌概念的研究迄今仍在深入之中.

第 3 章　二阶周期微分系统与二维映射

本章首先介绍非线性振动理论的某些基本概念和术语, 接着介绍二阶周期微分系统与二维映射的关系, 并对二维线性映射的平衡点性质和非线性映射的 Hopf 分枝进行较细致的讨论.

3.1　二阶周期微分系统的谐波解

考虑二阶微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y,t), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y,t), \tag{3.1.1}$$

其中, $P, Q \in C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3), P(x,y,t+T) = P(x,y,t), Q(x,y,t+T) = Q(x,y,t)$.

物理和工程中常见的非线性振子

$$\ddot{x} + f(x,\dot{x})\dot{x} + g(x) = e(t) \tag{3.1.2}$$

与

$$\ddot{x} + f(x,\dot{x})\dot{x} + (\gamma + \delta h(t))x = e(t) \tag{3.1.3}$$

是 (3.1.1) 的特殊形式, $e(t)$ 和 $h(t)$ 分别是周期 T 与 T_1 的周期函数, T 与 T_1 可相等或不等. 振动理论中, 称 (3.1.2) 是受迫振动系统, 而 (3.1.3) 是具有受迫激励和参数激励的系统. 函数 $e(t)$ 表示受迫项 (外激励项), $h(t)$ 表示参数激励项 (内激励项).

若 $(x(t), y(t))$ 是方程 (3.1.1) 的一个周期为 T 的周期解, 称为 (3.1.1) 的主谐波 (或调和解). 若 $m > 1$ 是整数, $(x(t), y(t))$ 为 (3.1.1) 的一个 mT 周期解, 称为 (3.1.1) 的次谐波解 (v/m 低频振荡解, $v = 1/T$). (3.1.1) 的 T/m 周期解称为超谐波解 (mv 高频振荡解). 又若 $n > 1$ 为整数, 则 (3.1.1) 的 mT/n 周期解称为超次谐波解, 其中 m, n 互素.

命题 3.1.1　*非线性受迫振动方程 (3.1.2) 的一切周期解必是主谐波与次谐波解.*

证　方程 (3.1.2) 对应的微分方程组为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = e(t) - f(x,y)y - g(x). \tag{3.1.4}$$

设 $e(t+T) = e(t), T$ 为 $e(t)$ 的最小周期. 设 $(x(t), y(t))$ 是 (3.1.4) 的一个周期 T_1 解, 则有

$$\dot{x}(t+T_1) \equiv y(t+T_1),$$
$$\dot{y}(t+T_1) \equiv e(t+T_1) - f(x(t+T_1), y(t+T_1))y(t+T_1) - g(x(t+T_1)).$$

利用周期性条件, 上式可化为

$$\dot{x}(t) \equiv y(t), \quad \dot{y}(t) \equiv e(t+T_1) - f(x(t), y(t))y(t) - g(x(t)). \tag{3.1.5}$$

由 (3.1.4) 和 (3.1.5) 可推出

$$e(t+T_1) = e(t). \tag{3.1.6}$$

因为 T 是 $e(t)$ 的最小周期, 根据 (3.1.6) 应有 $T_1 = mT$, m 为某正整数, 因此, 若 $m=1$, $(x(t), y(t))$ 为主谐波解. 若 $m>1$, 则为次谐波解.

注意, 方程 (3.1.1) 一般没有命题 (3.1.1) 所述性质, 例如, 方程组

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + (x^2+y^2-1)\sin(\sqrt{2}t) \tag{3.1.7}$$

是 $\sqrt{2}\pi$ 周期系统, 但 (3.1.7) 存在非主谐波解 $x=\sin(t), y=\cos(t)$. □

命题 3.1.2 $(x(t), y(t))$ 是 (3.1.1) 的周期 T 解的充分必要条件为 $x(0) = x(T), y(0) = y(T)$.

证 必要性显然, 兹证充分性.

令 $(u(t), v(t)) = (x(x+T), y(x+T))$, 由于 $(x(t), y(t))$ 是 (3.1.1) 的一个解, $(u(t), v(t))$ 同样是 (3.1.1) 的解. 条件 $x(0) = x(T), y(0) = y(T)$ 意味着 $x(0) = u(0), y(0) = v(0)$. 因此, 由 (3.1.1) 解的唯一性推出 $x(t) = u(t), y(t) = v(t)$. 即 $(x(t), y(t))$ 是周期 T 的周期解. □

命题 (3.1.2) 中的条件 $x(0) = x(T), y(0) = y(T)$ 称周期性边界条件.

设 (3.1.1) 满足初始条件

$$x(0) = \xi, \quad y(0) = \eta \tag{3.1.8}$$

的解为

$$x = x(t;\xi,\eta), \quad y = y(t;\xi,\eta), \tag{3.1.9}$$

其中 $(\xi,\eta) \in D \subset \mathbf{R}^2$.

若对一切 $(\xi,\eta) \in D$, $t \in \mathbf{R}$, 满足 (3.1.8) 的 (3.1.1) 之解存在唯一, 于是根据解关于初值的唯一性和与连续性定理, (ξ,η) 的函数

$$u = x(T;\xi,\eta), \quad v = y(T;\xi,\eta) \tag{3.1.10}$$

是 (ξ,η) 的连续函数. (3.1.10) 定义了一个连续映射

$$P : (\xi,\eta) \to (u,v) \quad (P : D \to \mathbf{R}^2).$$

如 1.1 节所述, 映射 P 即为方程 (3.1.1) 在 D 上的第一返回映射或 Poincaré 映射.

显然, P^n 将点 (ξ,η) 映为点

$$x_n = x(nT;\xi,\eta), \quad y_n = y(nT;\xi,\eta).$$

记 $q_0 = (\xi,\eta)$, 则易证

$$P^n q_0 = q_0, \quad P^{n+m} q_0 = P_0^n P^m q_0, \quad \forall n, m \in \mathbf{Z}.$$

并且 P^n 关于 ξ,η 连续. 因此, 映射 P 确定了一个同胚, 或离散动力系统.

由以上的讨论可见, 我们有

命题 3.1.3 (i) *系统 (3.1.1) 存在 T 周期解的充分必要条件是 Poincaré 映射 P 存在不动点;*

(ii) *系统 (3.1.1) 存在 mT 次谐波解的充分必要条件是 Poincaré 映射 P 存在 m 周期点.*

命题 (3.1.3) 是 1.1 节所述流与离散动力系统关系的具体化. 从这个命题可见, 研究 (3.1.1) 的周期解问题化为了研究由二维迭代即 Poincaré 映射所确定的周期点问题.

3.2 脉冲激励系统的 Poincaré 映射

一般而言, 对于给定的二阶微分方程组 (3.1.1) 其伴随的 Poincaré 映射是不容易求出明显的二维迭代关系的. 但对受脉冲激励的系统, 我们能导出映射的精确表达式, 本节介绍这方面的理论和例子.

3.2.1 单位跳跃函数与 δ-函数

间断与连续是对立的统一. 反映函数第一类间断本质特征的是单位跳跃函数 (Heaviside 函数)

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < 0, \\ 1, & \text{当 } x > 0. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

用 $H(x)$ 表示函数的突变. 设 $f(x)$ 分段连续, x_i 为第一类间断点, 记跳跃量

$$[f(x_i)] = f(x_i + 0) - f(x_i - 0).$$

令 $S(x) = \sum\limits_i [f(x_i)] \cdot H(x - x_i)$, 此时, $f(x) - S(x) = g(x)$ 是连续函数. 于是有 $f(x) = g(x) + S(x)$. 即不连续函数可表示为一个连续函数和一个阶梯函数 $S(x)$ 之和, $S(x)$ 是 $H(x - x_i)$ 的线性组合.

导数是差商的极限, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left[f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right]/h$. 我们形式地考虑 $H(x)$ 的导数, 设 $h>0$, 于是

$$\Delta_h H(x) = H\left(x+\frac{h}{2}\right) - H\left(x-\frac{h}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{当 } |x| > h/2, \\ 1/2, & \text{当 } |x| = h/2, \\ 1/h, & \text{当 } |x| < h/2, \end{cases}$$

$$\delta_h(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{\Delta_h H(x)}{h} = \begin{cases} 0, & |x| > h/2, \\ 1/2h, & |x| = h/2, \\ 1/h, & |x| < h/2. \end{cases}$$

形式地令 $h\to 0$ 得

$$H'(x) = \delta(x) = \begin{cases} 0, & x\neq 0, \\ \infty, & x = 0. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

由 (3.2.2) 定义的函数 $\delta(x)$, 不是通常意义下的导数, 它最早在 20 世纪 20 年代由 Dirac 引入, 在物理学中广泛应用, 20 世纪 50 年代开始, 数学工作者建立了分布 (广义函数) 理论, 使它具有了理论基础.

在广义函数论中, 对满足一定条件的无穷可微函数全体组成空间 Φ, 赋以一定的拓扑, 在 Φ 上构造线性泛函, 称 Φ 为基本空间. 设 $f(x)\in\Phi$, $f(x)$ 除在 $[a,b]$ 上不等于零外, 其余处处等于零, 则区间 $[a,b]$ 称 $f(x)$ 的支集.

我们仍然用 Φ 记支集有界的无穷可微函数全体构成的函数空间.

定义 3.2.1 基本空间 ϕ 上的线性连续泛函, 称为广义函数.

定义 3.2.2 (普通函数看为广义函数) 设 $f(x)$ 为局部可积连续函数, 将 $f(x)$ 看作广义函数, 定义为

$$(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\varphi\in\Phi. \tag{3.2.3}$$

定义 3.2.3 $\delta(x)$ 是这样的函数, 它使得 $\forall\varphi\in\Phi$ 有

$$(\delta,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

成立.

对于普通函数, 由于 φ 支集有界, 由分部积分法有: $\forall\varphi\in\Phi$,

$$(f',\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)\big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(f,\varphi').$$

因此, 我们定义广义函数的导数为: $(f',\varphi) = -(f,\varphi')$. 于是

$$(H'(x),\varphi) = -(H(x),\varphi') = -\int_0^{+\infty}\varphi'(x)dx = \varphi(0) = (\delta(x),\varphi(x)). \tag{3.2.4}$$

由上面的定义可见：δ-函数是 H 函数的广义导数. 在上述定义之下, δ-函数还可展开为 Fourier 级数. 因为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\delta(x)e^{ikx}dx = \frac{1}{2\pi},$$

故

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-2n\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx\right).$$

在上述级数两边还可以进行广义函数的逐项求导运算, 等等.

在工程、物理系统中, 往往用 δ-函数来表示脉冲波.

3.2.2 具有脉冲作用的线性微分方程组的解矩阵

我们研究线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = \left[A+\sum_{k=1}^{K}A^{(k)}\cdot\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_k-2m\pi)\right]x \overset{\text{def}}{=} C(t)x, \tag{3.2.5}$$

其中 $x\in\mathbf{R}^n$, A 与 $A^{(k)}$ 为常数矩阵, $0<t_1<t_2<\cdots<t_{k-1}<t_k<2\pi$. 引入记号

$$T(t) = e^{At}, \quad J^k = e^{A^{(k)}}. \tag{3.2.6}$$

利用 (3.2.5) 与下述积分方程组的等价性

$$x(t) = x(t_0)+\int_{t_0}^{t}C(t)x(t)dt, \tag{3.2.7}$$

我们得到以下结论:

定理 3.2.1 设当 $t{=}2m\pi$ 时, $x(m)$ 为状态量 $x(t)$ 的值, 则在时间区间 $2m\pi\leqslant t\leqslant 2(m+1)\pi$ 之内, (3.2.5) 的解有如下的表达式:

$$\begin{aligned}
x(t) =& T(t-2m\pi)x(m), \quad 当\ 2m\pi\leqslant t\leqslant 2m\pi+t_1,\\
x(t) =& T(t-2m\pi-t_{k'})J^{(k')}T(t_{k'}-t_{k'-1})J^{(k'-1)}T(t_{k'-1}-t_{k'-2})\cdots\\
&J^{(2)}T(t_2-t_1)J^{(1)}T(t_1)x(m), \quad 当\ 2m\pi+t_{k'}<t<2m\pi+t_{k'+1}, k'\leqslant k-1,\\
&\cdots\cdots\\
x(t) =& T(t-2m\pi-t_k)J^{(k)}T(t_k-t_{k-1})J^{(k-1)}T(t_{k-1}-t_{k-2})\cdots\\
&J^{(2)}T(t_2-t_1)J^{(1)}T(t_1)x(m), \quad 当\ 2m\pi+t_k<t<2(m+1)\pi.
\end{aligned}$$

证 设 $t' = t - 2m\pi$, 对于 $0 < t' \leqslant t_1$, 显然有

$$x(t') = \exp(At')x(m) = T(t')x(m). \tag{3.2.8}$$

以下用 t_{1-} 和 t_{1+} 分别表示时间 t_1 左边及右边的瞬时值, 于是在未受脉冲作用前有

$$x(t_{1-}) = T(t_{1-})x(m).$$

当 $t' = t_1$ 时刻, 脉冲作用了, 按上面用阶梯函数定义 $\delta(t)$ 的想法, 用强度为 $\frac{A^{(1)}}{a}$, 覆盖区间为 $[t_1, t_1 + a]$ 的小脉冲来代替 $t = t_1$ 时刻的小脉冲, 在 $t_1 \leqslant t' \leqslant t_1 + a$ 内

$$x(t') = \exp\left\{\left(A + \frac{A^{(1)}}{a}\right)(t' - t_1)\right\} \cdot x(t_{1-}).$$

当 $t' = t_1 + a$ 时, 即在有限脉冲宽度之末端

$$x(t_1 + a) = \exp\{Aa + A^{(1)}\}x(t_{1-}).$$

令 $a \to 0$, 恢复到 δ-函数脉冲型即得

$$x(t_{1+}) = \exp(A^{(1)})x(t_{1-}) = J^{(1)} \cdot x(t_{1-}). \tag{3.2.9}$$

因此, $J^{(1)}$ 可看作在 t_1 时刻由脉冲作用引起的跃度变化.

对于区间 $t_1 < t' < t_2$, 第一个脉冲作用过后, 第二个脉冲作用前, 仍用 (3.2.8) 表示, 即

$$x(t') = \exp[A(t' - t_1)]x(t_{1+}).$$

因此, 由 (3.2.8), (3.2.9) 得

$$x(t') = \exp[A(t' - t_1)]\exp(A^{(1)})\exp(At_1)x(m). \tag{3.2.10}$$

反复地应用 (3.2.8), (3.2.9), 即证得定理 3.2.1.

从定理 3.2.1, 可得

$$\begin{aligned} x(2(m+1)\pi) = {} & T(2\pi - t_k)J^{(k)}T(t_k - t_{k-1})J^{(k-1)}T(t_{k-1} - t_{k-2})\cdots \\ & J^{(2)}T(t_2 - t_1)J^{(1)}T(t_1)x(2m\pi). \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

(3.2.11) 给出了线性系统 (3.2.5) 的 Poincaré 映射的准确公式, 应用它即可研究系统零解的稳定性. (3.2.11) 右边的矩阵

$$H \overset{\text{def}}{=} T(2\pi - t_k)J^{(k)}\cdots J^{(1)}T(t_1)$$

称为系统 (3.2.5) 的增长矩阵. 它控制系统在每个周期中的增长变化. □

3.2.3 脉冲参数激励系统

讨论非线性系统

$$M\ddot{y}+D\dot{y}+Ky+\sum_{m=1}^{l}f^{(m)}(y)\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_m-j)=0, \tag{3.2.12}$$

其中 y 为 n 维向量, M,D,K 是常数矩阵, $f^{(m)}(y)$ 为 y 的向量值非线性函数. 在时刻 t_m, 第 m 个脉冲参数激励发生. 设 t_m 满足以下顺序:

$$0\leqslant t_1\leqslant t_2<\cdots<t_l<1,$$

此时参数激励的周期为 1, 在 1 个周期内作用着 l 个脉冲, 第 m 个脉冲激励的强度由 $f^{(m)}$ 确定. 因为有脉冲激励项, 在 $t=t_m$, 速度 y 不连续, 但位移 y 是连续的, 且有

$$\dot{y}(t_m^+)-\dot{y}(t_m^-)=-M^{-1}f^{(m)}(y(t_m)).$$

作变换: $y_i=x_i,\dot{y}_i=x_{i+1}$. (3.2.12) 可记为

$$\dot{x}=Ax-\sum_{m=1}^{l}g^{(m)}(x)\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_m-j), \tag{3.2.13}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}0 & I\\ -M^{-1}K & -M^{-1}D\end{pmatrix},\quad g^{(m)}(x)=\begin{pmatrix}0\\ -M^{-1}f^{(m)}(y)\end{pmatrix}. \tag{3.2.14}$$

用 Φ 表示线性方程 $\dot{x}=Ax$ 满足 $\Phi(0)=I$ 的解矩阵, 并用 $x(0)$ 表示初始状态, 则由定理 3.2.1 可得 (3.2.13) 的解为

$$\begin{cases}x(t)=\Phi(t)x(0), & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant t_1,\\ x(t_1^-)=\Phi(t_1)x(0), & \\ x(t_1^+)=x(t_1^-)+g^{(1)}(x(t_1^-)); & \\ x(t)=\Phi(t-t_1)x(t_1^+), & \text{当 } t_1<t<t_2,\\ \qquad\cdots\cdots & \\ x(t)=\Phi(t-t_1)x(t_1^+), & \text{当 } t_l<t\leqslant 1.\end{cases} \tag{3.2.15}$$

从上述表达式可见, 解 $x(t)$ 可一个周期一个周期地延拓.

以下研究受周期冲量作用的铰接杆的数学模型. 设有一刚杆, 一端铰接, 另一端受周期性负载. 设 A 表示铰接点, 杆关于 A 点有惯矩 I_A, 杆铰接端受弹性系数

为 k 的旋转弹簧及阻尼系数为常数 b 的线性阻尼约束. 设 φ 为杆转角, $\varphi=0$ 为平衡位置, 杆自由端受周期冲量 p_0 作用其方向与 $\varphi=0$ 一致. 设 l 为铰接点与负载作用点间的距离, $\widetilde{T_0}$ 为冲量作用周期, 则运动方程为

$$I_A\frac{d^2\varphi}{d\widetilde{t^2}}+b\frac{d\varphi}{d\widetilde{t}}+k\varphi+\left[p_0l\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\delta(\widetilde{t}-j\widetilde{\tau_0})\right]\sin\phi=0, \tag{3.2.16}$$

其中 $\widetilde{t}$ 为时间. 若引入变换

$$t=\frac{\widetilde{t}}{\widetilde{t_0}},\quad \mu=b\widetilde{\tau_0}/2I_A\quad \omega_0^2=KT_0^2/I_A,\quad a=p_0l\widetilde{\tau_0}/I_A,\quad x_1=\varphi,\quad x_2=\dot{\varphi}.$$

(3.2.16) 可化为 (3.2.13) 形式, 其中 $l=1,t_1=0$,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-\omega_0^2&-2\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-\alpha\sin x_1\end{pmatrix}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_m-j). \tag{3.2.17}$$

于是具有 $\Phi(0)=I$ 的基本矩阵为

$$\Phi(t)=e^{-\mu t}\begin{pmatrix}\cos\omega t+\dfrac{\mu}{\omega}\sin\omega t & \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t\\ -\left(\omega+\dfrac{\mu^2}{\omega}\right)\sin\omega t & \cos\omega t-\dfrac{\mu}{\omega}\sin\omega t\end{pmatrix}, \tag{3.2.18}$$

其中 $\omega^2=\omega_0^2-\mu^2$.

利用 (3.2.15), 并记

$$E=e^{-\mu},\quad C=\cos\omega,\quad S=\sin\omega,$$

则可得系统 (3.2.16) 所对应的二维迭代关系

$$\begin{cases}x_1(n+1)=E\left[\left(C+\dfrac{\mu}{\omega}\right)Sx_1(n)-\dfrac{aS}{\omega}\sin x_1(n)+\dfrac{S}{\omega}x_2(n)\right],\\ x_2(n+1)=E\left[-\left(\omega+\dfrac{\mu^2}{\omega}\right)Sx_1(n)-\left(C-\dfrac{\mu}{\omega}S\right)a\sin x_1(n)-\left(C-\dfrac{\omega}{\mu}S\right)x_2(n)\right].\end{cases} \tag{3.2.19}$$

如果略去弹簧, 即 $k=0$, 此时 $\omega_0^2=0$ 故 (3.2.19) 化为

$$\begin{cases}x_1(n+1)=x_1(n)-\dfrac{1-e^{-2\mu}}{2\mu}a\sin x_1(n)+\dfrac{1-e^{-2\mu}}{2\mu}x_2(n),\\ x_2(n+1)=-e^{-2\mu}a\sin x_1(n)+e^{-2\mu}x_2(n).\end{cases} \tag{3.2.20}$$

利用 (3.2.19) 与 (3.2.20) 可以细致地研究系统 (3.2.17) 的动力学性质.

3.3 Poincaré 映射的线性近似与周期解的稳定性

继续讨论方程组 (3.1.1), 为方便起见, 引入向量 $u=(x,y), f=(P,Q)$, (3.1.1) 可记为

$$\frac{du}{dt}=f(u,t), \tag{3.3.1}$$

其中 $f(u,t+T)=f(u,t)$.

设 (3.3.1) 存在周期解 $u=\widetilde{u}(t)$, 引入变换

$$u=\widetilde{u}(t)+v. \tag{3.3.2}$$

(3.3.1) 可化为

$$\dot{v}=f(\widetilde{u}(t)+v,t)-f(\widetilde{u}(t),t)\overset{\text{def}}{=}F(v,t), \tag{3.3.3}$$

其中 $F(0,t)=0, F(v,t+T)=F(v,t)$. 上述方程以线性周期系统

$$\dot{v}=Df(\widetilde{u}(t),t)\cdot v\overset{\text{def}}{=}A(t)\cdot v \tag{3.3.4}$$

作为近似系统. Df 表示 f 的 Jacobi 矩阵, 该矩阵沿轨道 $\widetilde{u}(t)$ 取值时, 是 2×2 矩阵, 且 $A(t+T)=A(t)$.

设 $\Phi(t)$ 是 (3.3.4) 的满足初始条件 $\Phi(0)=I$(其中 I 为单位矩阵) 的基本解矩阵. 根据周期系统的 Floquet 理论, $C=\Phi(T)$ 是单值矩阵. $\Phi(T)$ 的特征值 λ 称为 Floquet 特征乘子, 而 $\lambda(T)=\exp(\sigma T)$ 所定义的复数 $\sigma=\widetilde{\xi}+i\widetilde{\eta}$ 称 Floquet 特征指数. 方程组 (3.3.4) 满足初始条件 $v(0)=\psi$ 的解为

$$v(t)=\Phi(t)\cdot\psi \tag{3.3.5}$$

且有

$$v(t+T)=e^{\sigma T}v(t). \tag{3.3.6}$$

注意到根本矩阵的定义, 有

$$\Phi(t+T)=\Phi(t)\Phi(T),\quad \Phi(nT)=\Phi^n(T). \tag{3.3.7}$$

从而

$$v(t+nT)=\Phi(t)\Phi(nT)\cdot\psi=\lambda^n\Phi(t)\cdot\psi. \tag{3.3.8}$$

对于 $t\in[nT,(n+1)T]$, 范数 $\|\Phi(t)\cdot\psi\|$ 有界, 因此, 由 (3.3.8) 两边取模, 并令 $n\to+\infty$, 可以得到以下结论:

命题 3.3.1　*若单值矩阵 $\Phi(T)$ 的 Floquet 乘子 $\lambda_l=e^{\sigma_l T}$ $(l=1,2)$ 满足关系 $|\lambda_l|=e^{\widetilde{\xi}_l T}<1$ 或特征值的实部 $\widetilde{\xi}_l=\mathrm{Re}\sigma_l<0$ $(l=1,2)$, 则当 $t\to+\infty$ 时, $v(t)\to 0$, 从而 (3.3.1) 的周期解 $u=\widetilde{u}(t)$ 渐近稳定.*

以下我们直接分析 (3.3.1) 的 Poincaré 映射, 可获得更为细致的结果.

设 $u(t) = (x(t;\xi,\eta), y(t;\xi,\eta))$ 为 (3.3.1) 的当 $t=0$ 时 $u(0) = (x_0, y_0) = (\xi,\eta)$ 的解, 用 $\Delta(t)$ 表示 $u(t)$ 关于 (ξ,η) 的 Jacobi 行列式

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}. \tag{3.3.9}$$

记 $u_n = (x_n, y_n) = (x(nT;\xi,\eta), y(nT;\xi,\eta))$.

命题 3.3.2 (x,y)-相平面上的初始面积元 $d\xi d\eta$ 在 Poincaré 映射 P 下有关系

$$Pd\xi d\eta = J\left(\frac{x_1, y_1}{\xi, \eta}\right) d\xi d\eta, \tag{3.3.10}$$

其中,

$$J\left(\frac{x_1, y_1}{\xi, \eta}\right) = \exp\left\{\int_0^T (\mathrm{trace} Df)\right\} dt. \tag{3.3.11}$$

证 由 (3.3.9) 得

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial x}{\partial \eta} \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{\partial x}{\partial \eta} \\
&= \frac{\partial P}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial Q}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial Q}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial y}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\frac{\partial x}{\partial \xi} \\
&\quad - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\frac{\partial y}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial x}{\partial \eta} \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\Delta(t).
\end{aligned}$$

于是,

$$\frac{d\Delta(t)}{\Delta(t)} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dt. \tag{3.3.12}$$

又因为

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_0}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x_0}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y_0}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y_0}{\partial \eta} \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta(t+T) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y_1}{\partial \eta} \end{vmatrix} = J\left(\frac{x_1, y_1}{\xi, \eta}\right).$$

利用上面的条件积分 (3.3.12) 即得 (3.3.11) □

由 (3.3.10) 可见, 若发散量 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}<0$, 则变换 P 收缩面积, 若 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}=0$, 则 P 为保面积变换.

以下继续讨论 (3.3.1) 的周期解 $\widetilde{u}(t)$, 将变换 (3.3.2) 中的 $v(t)$ 称为小扰动. 记单值矩阵

$$C=\Phi(T)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{3.3.13}$$

则由公式 (3.3.5) 得到分量形式的关系

$$\begin{aligned} v_1(T)&=av_1(0)+bv_2(0), \\ v_2(T)&=cv_1(0)+dv_2(0). \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

由于 $u(0)=\widetilde{u}(0)+v(0), \widetilde{u}(0)=(\widetilde{x}(0),\widetilde{y}(0))$ 是 Poincaré 映射的不动点, 因此, (3.3.14) 表示变换 P 在不动点邻域的近似性质. 由 (3.3.8), 有 $v(nT)=\Phi^n(T)\cdot\psi$, 即

$$\begin{pmatrix} v_1(nT) \\ v_2(nT) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix}. \tag{3.3.15}$$

(3.3.15) 是 n 次映射的近似关系.

由 (3.3.15) 可见, 矩阵 $\Phi(t)$ 的性质关系着映射 P 在不动点邻域的渐近特征, 因此, 有必要认真分析二维线性映射的不动点性质.

3.4 二维线性映射

最基本的二维映射是线性映射

$$\begin{cases} x_{n+1}=ax_n+by_n, \\ y_{n+1}=cx_n+dy_n, \end{cases} \quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots, \tag{3.4.1}$$

其中矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是常数矩阵, 原点 (0,0) 是 (3.4.1) 所定义的映射的不动点. 为使不动点孤立, 设 $\det A\neq 0, \det(A\pm I)\neq 0$, I 是单位矩阵.

设 λ_1 和 λ_2 是矩阵 A 的特征值, 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 且是实数, 通过变换

$$x=\alpha\xi+\beta\eta, \quad y=p_1\alpha\xi+p_2\beta\eta, \tag{3.4.2}$$

其中 α,β 为任给的常数, 且当 $b\neq 0$,

$$p_{1,2}=(\lambda_{1,2}-a)/b; \quad p_{1,2}=c/(\lambda_{1,2}-d), \quad b=0. \tag{3.4.3}$$

(3.4.1) 可化为

$$\xi_{n+1}=\lambda_1\xi_n,\quad \eta_{n+1}=\lambda_2\eta_n. \tag{3.4.4}$$

由 (3.4.4) 可得

$$\xi_n=\lambda_1^n\xi_0,\quad \eta_n=\lambda_2^n\eta_0,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots. \tag{3.4.5}$$

在 (x,y) 平面上, 由 (3.4.5) 可求得 (3.4.1) 的解有一般形式

$$\begin{cases} x_n=\widetilde{A}\lambda_1^n+\widetilde{B}\lambda_2^n,\quad y_n=\dfrac{1}{b}(\lambda_1-a)\widetilde{A}\lambda_1^n+\dfrac{1}{b}(\lambda_2-a)\widetilde{B}\lambda_2^n, & b\neq 0,\\ x_n=\widetilde{A}a^n,\quad y_n=\widetilde{B}d^n+(a-d)^{-1}\widetilde{A}a^n,\quad \lambda_1=a,\quad \lambda_2=d, & b=0, \end{cases} \tag{3.4.6}$$

其中 $\widetilde{A},\widetilde{B}$ 是任意常数, 由初值给定. (ξ,η) 平面的 ξ 轴和 η 轴分别变为 (x,y) 平面上过原点而斜率为 p_1 与 p_2 的两条直线.

当 $\lambda_1>0,\lambda_2>0$ 时, 从 (3.4.5) 解出 n, 易得不变曲线方程为

$$\eta=\eta_0\cdot|\xi/\xi_0|^\nu\cdot\mathrm{sgn}(\xi/\xi_0),\quad \nu=(\log\lambda_2)/(\log\lambda_1). \tag{3.4.7}$$

如果 $\lambda_1\cdot\lambda_2<0$, 或 $\lambda_1<0,\lambda_2<0$, 上述不变曲线仍然有效, 但对数在主值意义下理解. 并且离散轨道 $(\xi_i,\eta_i)(i=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 交替地位于两不同的不变曲线上.

当 $0<|\lambda_1|,|\lambda_1|<1$ 或 $|\lambda_1|,|\lambda_2|>1$ 时, 因 $\nu>0$, 故不变曲线 (3.4.7) 是类似抛物线的曲线, 该曲线在原点 (0,0) 与 $\eta=0$ 即与 ξ 轴相切, 并对称于 $\xi=0$ 即 η 轴. 综上所述, 当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时,

(1) 若 $\lambda_1>1,\lambda_2>1$, 原点 (0,0) 称为不稳定的第一类结点, 从 (ξ_0,η_0) 出发的离散轨道在一条不变曲线上运动, 当 $n\to+\infty$ 时, 远离原点.

(2) 当 $0<\lambda_1<1,\ 0<\lambda_2<1$, 原点 (0,0) 是第一类稳定结点, 离散轨道沿一条不变曲线运动, 当 $n\to+\infty$ 时, 趋于原点.

(3) 若 $\lambda_1\cdot\lambda_2<0$ 或 $\lambda_1<0,\lambda_2<0,|\lambda_i|<1$ 或 $|\lambda_i|>1$ $(i=1,2)$, 原点 (0,0) 称为第二类结点. $|\lambda_i|<1$ 时是稳定的, $|\lambda_i|>1$ 时是不稳定的. 此时, 离散轨道 $(\xi_i,\eta_i)(i=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 交替地位于两条不同的不变曲线上. 在 (ξ,η) 平面上, 若 $\lambda_1\cdot\lambda_2<0,(\xi_i,\eta_i)$ 与 (ξ_{i+1},η_{i+1}) 位于两相邻象限内; 若 $\lambda_1\cdot\lambda_2>0,(\xi_i,\eta_i)$ 与 (ξ_{i+1},η_{i+1}) 位于两相对象限内. 图 3.4.1 给出了两种类型的结点的不变曲线图形, 并指出了离散轨道相邻两点间的关系.

(4) 若 $0<\lambda_1<1,\ |\lambda_2|>1$(或者相反), 此时 (3.4.5) 的不变曲线类似于双曲线, 除 $\xi=0,\eta=0$ 两轴例外. 如果 $\lambda_1>1,0<|\lambda_2|<1$, 或反过来, $0<\lambda_1<1,|\lambda_2|>1$, 原点 (0,0) 称为第一类鞍点, 离散轨道保持在与初始点 (ξ_0,η_0) 所在的同一条不变曲线上. 如果 λ_1 和 λ_2 中至少有一个是负数 (例如, $\lambda_2<-1$), 原点 (0,0) 称为第二

类鞍点, 离散轨道上相继的两点位于两不同不变曲线上, 不变曲线方程仍由 (3.4.7) 确定, 但此时 $\nu < 0$.

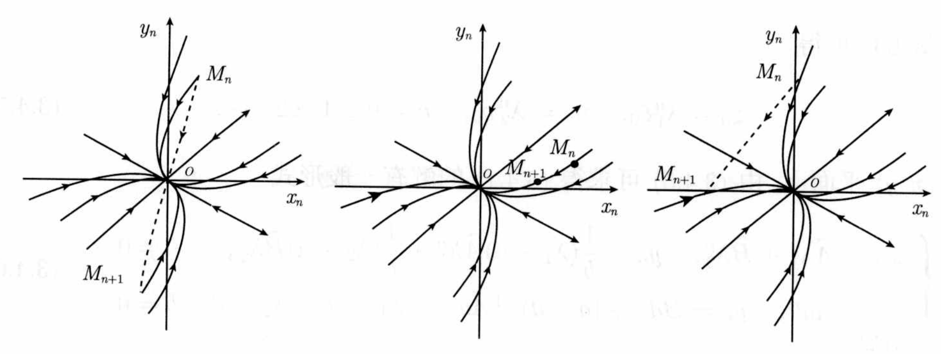


图 3.4.1　两种类型的结点的不变曲线

对于两种类型的鞍点, $\xi = 0$ 和 $\eta = 0$ 是两条特殊的不变曲线分枝. 在其上, 离散的半轨道当 $n \to +\infty$ 或 $n \to -\infty$ 时趋于原点 (0,0), 前一种情形, 该轨道称为 (0,0) 的稳定流形, 后一情形称为不稳定流形. 两类鞍点的图形如图 3.4.2 所示.

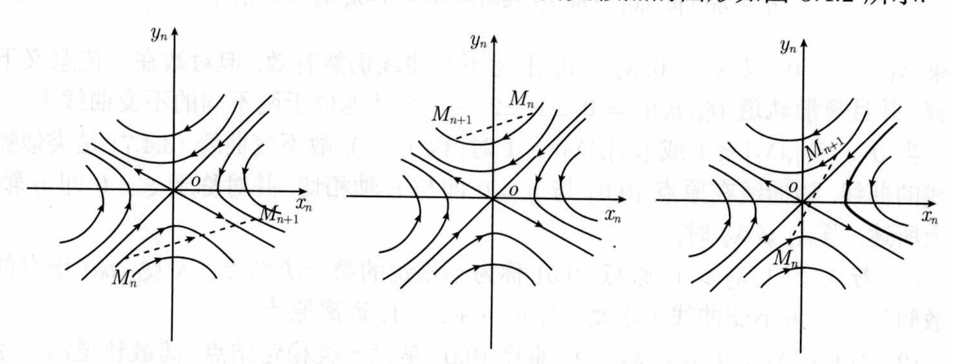


图 3.4.2　两种类型的鞍点的不变曲线

以下假设 λ_1, λ_2 为共轭复数, 设

$$\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta = \sigma \cdot e^{\pm i\varphi}. \tag{3.4.8}$$

数 σ 称为增长因子, φ 称旋转角. 通过线性变换可将 (3.3.1) 化为

$$\xi_{n+1} = \alpha\xi_n - \beta\eta_n, \quad \eta_{n+1} = \beta\xi_n + \alpha\eta_n. \tag{3.4.9}$$

引入极坐标 $\xi = \rho\cos\theta$, $\eta = \rho\sin\theta$, 于是 (3.4.9) 可化为

$$\rho_{n+1} = \sigma\rho_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + \varphi. \tag{3.4.10}$$

从而与初值相联系的解为

$$\rho_n = \sigma^n \rho_0, \quad \theta_n = n\varphi + \theta_0, \tag{3.4.11}$$

其中 $\rho_0 \cos\theta_0 = \xi_0$, $\rho_0 \sin\theta_0 = \eta_0$. 因此不变曲线方程为

$$\rho = \sigma^{(\theta-\theta_0)/\varphi} \cdot \rho_0. \tag{3.4.12}$$

还原为直角坐标系即

$$\xi^2 + \eta^2 = (\xi_0^2 + \eta_0^2)\sigma^{\widetilde{\alpha}}, \quad \theta = \arctan(\xi/\eta), \tag{3.4.13}$$

其中 $\widetilde{\alpha} = 2(\theta - \theta_0)/\varphi, \theta_0 = \arctan(\xi_0/\eta_0)$. 由此可见

(5) 当 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = \sigma e^{\pm i\varphi}$ 时, 若 $\sigma = 1$, 不变曲线为同心圆弧. 不动点 (0,0) 称为中心, 如果旋转角关于 2π 可通约, 即 $\varphi = 2\pi m/k, m, k$ 为正整数, 则离散轨道仅由 k 个不同的点组成, 这种退化情形称共振. 若 φ 关于 2π 不可通约, 则当 $n \to +\infty$ 与 $n \to -\infty$ 时, 离散轨道 (ξ_n, η_n)(对应地 (x_n, y_n)) 的点在整条不变曲线 (不变圆) 上不断运动, 具有可数无穷多个点. 中心 (0,0) 是一个孤立点, 它不是任何半轨的极限点.

注意, 若 (3.4.1) 为流所对应的 Poincaré 映射, 则微分同胚的不变圆对应于向量场的不变环面.

(6) 若情况 (5) 中的 $\sigma \neq 1$, 此时不变曲线是对数螺旋线, 不动点 (0,0) 称为焦点. 当 $\sigma < 1$ 时, (0,0) 渐近稳定; 当 $\sigma > 0$ 时, (0,0) 不稳定. 如果 σ 接近于 1, 而 φ 又关于 2π 可通约, 此时, 焦点称弱共振型的. 图 3.4.3 是情况 (5), (6) 的不变曲线图.

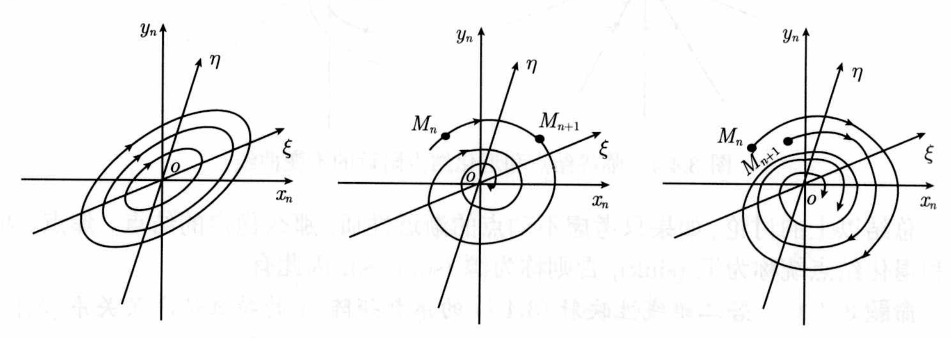


图 3.4.3 中心, 两种类型的焦点

最后, 设 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

(7) 若 $b = c = 0$, 此时 $a = d$, 故 (3.4.1) 本身就是规范型式. 不变曲线方程为

$$y = y_0|x/x_0| \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{x}{x_0}\right). \tag{3.4.14}$$

因此, 这是直线方程, 原点 (0,0) 称为临界结点或星形结点, 当 $|\lambda| < 1$ 时稳定, $|\lambda| > 1$ 时不稳定.

(8) 当 $b^2 + c^2 \neq 0$ 时, (3.4.1) 可经线性变换化为

$$\xi_{n+1} = \lambda\xi_n - \eta_n, \quad \eta_{n+1} = \lambda\eta_n. \tag{3.4.15}$$

于是有解

$$\xi_n = \lambda^n \left(\xi_0 - \frac{n\eta_0}{\lambda}\right), \quad \eta_n = \lambda^n\eta_0. \tag{3.4.16}$$

当 $\lambda > 0$ 时, 若 $\eta/\eta_0 > 0$, 则不变曲线为

$$\xi = \eta(\xi_0/\eta_0) - \eta[\log(\eta/\eta_0)]/(\lambda\log\lambda). \tag{3.4.17}$$

若 $\eta/\eta_0 < 0$ 时, 只需将上述曲线作镜面对称变换即可. 在 (x, y) 平面上, 抛物线形的不变曲线在原点切于直线 $y = px$, 其中 $p = (\lambda - a)/b$, 若 $b \neq 0$, 或 $p = c/(\lambda - a)$, $b = 0$. 不动点 (0,0) 称为退化结点, 当 $|\lambda| < 1$ 时, 是渐近稳定的, 当 $|\lambda| > 1$ 时是不稳定的.

情形 (7) 与 (8) 的不变曲线图形如图 3.4.4 所示.

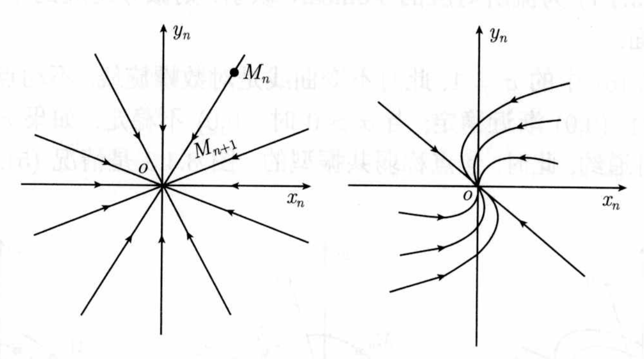


图 3.4.4　临界结点和退化结点附近的不变曲线

总结以上的讨论, 如果只考虑不动点的渐近性质, 那么稳定的结点、焦点、星形和退化结点统称为汇 (sink), 否则称为源 (sources), 因此有

命题 3.4.1　若二维线性映射 (3.4.1) 的系数矩阵 A 的特征值满足关系 $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$, 则不动点 (0,0) 为鞍点; 若 $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$, (0,0) 是汇.

汇往往称之为吸引子. 相对地, 源称为排斥子.

在动力系统的复杂性研究中, 鞍点的存在起着本质的作用. 近年来, 考虑到二维迭代与三维流的 Poincaré 映射之间的关系, 文献中常常将 $\lambda_2 < -1$ 时的鞍点称为 “Möbius 轨道”. 原因是不动点 (或周期点) 的不稳定流形具有一半扭转, 类似于 Möbius 带, 这将在后面再说明.

如记 $p = \mathrm{trace}A, q = \det A$, 于是 (3.4.1) 的特征方程为

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0, \tag{3.4.18}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}. \tag{3.4.19}$$

又 $\det(A \pm I) = 1 \pm p + q$. 图 3.4.5 显示 p, q 参数平面上线性系统 (3.4.1) 的平衡点的分枝图.

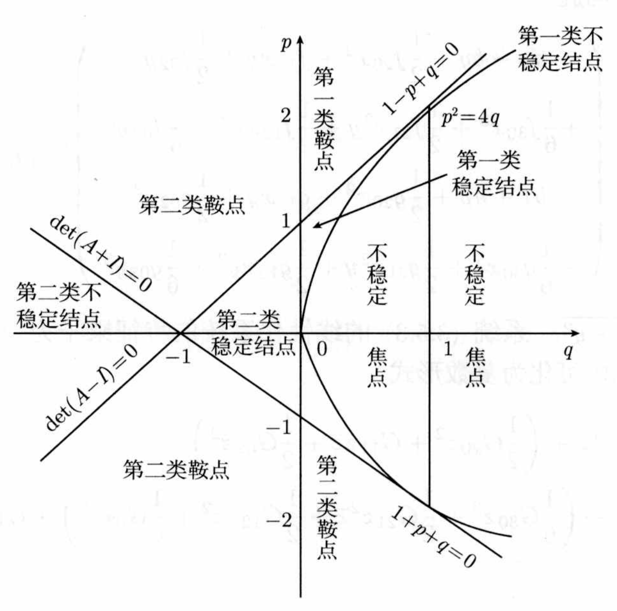


图 3.4.5 二维线性映射的平衡点的分枝图

3.5 二维映射的 Hopf 分枝与 Arnold 舌头

本节考虑一般的二维映射

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = g(x_n, y_n). \tag{3.5.1}$$

设原点是 (3.5.1) 的不动点, 其线性化系统的特征乘子为 $\lambda, \bar{\lambda}$, 并紧靠单位圆. 记

$$\lambda = (1 + \mu)\exp i\alpha, \quad 0 < \alpha < \pi,$$

并将 μ 看作是可变参数, α 是常数. 设 $\dfrac{\alpha}{\pi}$ 为有理数, 则

$$\mathrm{Arg}\lambda = \alpha = \frac{2\pi l}{m}, \tag{3.5.2}$$

m 为最小的与 l 互素的整数. 如果 $\mu<0$, 则 (0,0) 是局部稳定的, 当 μ 增加到正值时, (3.5.1) 可能出现各种各样的分枝现象.

(3.5.1) 的不动点 (0,0) 称为共振的, 倘若 λ 是复平面的单位根, 即 $\lambda^k(0)=1$, k 为某个正整数. 对于 $\mu=0$, α 由 (3.5.2) 表示的情形, 若 $m=1, 2, 3, 4$, (3.5.1) 的不动点称为强共振的, 若 $m\geqslant 5$, 则称为弱共振的.

研究 (3.5.1) 的不动点的分枝的基本方法是规范型法. 为此, 我们先一般地讨论 $\mathbf{R}^2$ 中的微分同胚

$$\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax-by+\dfrac{1}{2}f_{20}x^2+f_{11}xy+\dfrac{1}{2}f_{02}y^2\\+\dfrac{1}{6}f_{30}x^3+\dfrac{1}{2}f_{21}x^2y+\dfrac{1}{2}f_{12}xy^2+\dfrac{1}{6}f_{03}y^3,\\bx+ay+\dfrac{1}{2}g_{20}x^2+g_{11}xy+\dfrac{1}{2}g_{02}y^2\\+\dfrac{1}{6}g_{30}x^3+\dfrac{1}{2}g_{21}x^2y+\dfrac{1}{2}g_{12}xy^2+\dfrac{1}{6}g_{03}y^3\end{pmatrix}+O(r^4),\tag{3.5.3}$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$. 系统 (3.5.3) 的线性化系统的特征乘子为 $\lambda=a\pm bi$. 令 $x+iy=z$, (3.5.3) 可化为复数形式

$$\begin{aligned}\Phi(z)=&\lambda z+\left(\frac{1}{2}G_{20}z^2+G_{11}z\overline{z}+\frac{1}{2}G_{02}\overline{z}^2\right)\\&+\left(\frac{1}{6}G_{30}z^3+\frac{1}{2}G_{21}z^2\overline{z}+\frac{1}{2}G_{12}z\overline{z}^2+\frac{1}{6}G_{03}\overline{z}^3\right)+O(|z|^4),\end{aligned}\tag{3.5.4}$$

其中

$$\begin{aligned}G_{20}&=\frac{1}{4}[(f_{20}-f_{02}+2g_{11})+i(g_{20}-g_{02}-2f_{11})],\\G_{11}&=\frac{1}{4}[(f_{20}+f_{02})+i(g_{20}+g_{02})],\\G_{02}&=\frac{1}{4}[(f_{20}-f_{02}-2g_{11})+i(g_{20}-g_{02}+2f_{11})],\\G_{21}&=\frac{1}{8}[(f_{30}+f_{12}+g_{21}+g_{03})+i(g_{30}+g_{12}-f_{21}-f_{03})],\\&\cdots\cdots\end{aligned}\tag{3.5.5}$$

定理 3.5.1　设 $\lambda=(1+\mu)e^{i\alpha}$, 且 (3.5.2) 中 $m\neq 1,2,3,4$, 则当 $\mu=0$ 时存在坐标变换

$$\zeta=z+r_{20}z^2+r_{11}z\overline{z}+r_{02}\overline{z}^2+\cdots,\tag{3.5.6}$$

使得 (3.5.4) 化为规范型

$$\Phi(\zeta)=\lambda\zeta+Q\zeta^2\overline{\zeta}+O(|\zeta|^4),\tag{3.5.7}$$

或极坐标形式

$$\Phi(r,\phi)=(r-f_1(0)r^3,\phi+\alpha(0)+f_3(0)r^2)+O(r^5), \tag{3.5.8}$$

其中

$$\begin{aligned}f_1(0)=&-\mathrm{Re}(\overline{\lambda}Q)\\=&\mathrm{Re}\left[\frac{(1-2\lambda)\overline{\lambda}^2}{2(1-\lambda)}G_{20}G_{11}\right]+\frac{1}{2}|G_{11}|^2\\&+\frac{1}{4}|G_{02}|^2-\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{\lambda}G_{21}}{2}\right),\quad \lambda=e^{i\alpha}.\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

证 将 (3.5.6) 代入 (3.5.7) 得

$$\begin{aligned}&z_{n+1}+r_{20}z_{n+1}^2+r_{11}z_{n+1}\overline{z}_{n+1}+r_{02}\overline{z}_{n+1}^2+\cdots\\=&\lambda(z_n+r_{20}z_n^2+r_{11}z_n\overline{z}_n+\overline{z}_n^2+\cdots)+Qz_n^2\overline{z}_n+\cdots.\end{aligned}$$

又将 $z_{n+1}=\Phi(z_n)$ 的表达式 (3.5.4) 代入上式左边, 比较 z^2, $z\overline{z}$, $\overline{z}^2$ 的系数得

$$\frac{1}{2}G_{20}+\lambda^2r_{20}=\lambda r_{20},\quad G_{11}+\lambda\overline{\lambda}r_{11}=\lambda r_{11},\quad \frac{1}{2}G_{02}+\overline{\lambda}^2r_{02}=\lambda r_{02}.$$

因此, 在非强共振情形, 为让二次项系数消失, 只需设

$$r_{20}=\frac{G_{20}}{2(\lambda-\lambda^2)},\quad r_{11}=\frac{G_{11}}{\lambda-1},\quad r_{02}=\frac{G_{02}}{2(\lambda-\overline{\lambda}^2)},$$

其中 $\lambda=\exp(i\alpha)$, $\mu=0$. 又比较 $z^2\overline{z}$ 项系数可得

$$Q=\frac{2\lambda-1}{2(1-\lambda)\lambda}G_{20}G_{11}+\left(\frac{-\lambda}{1-\lambda}\right)|G_{11}|^2+\left(\frac{-\lambda}{2(1-\lambda^3)}\right)|G_{02}|+\frac{1}{2}G_{21}.$$

于是已得到规范型 (3.5.7).

令 $\lambda=e^{i\alpha}$, $\zeta=re^{i\varphi}$, 则由

$$\begin{aligned}&\lambda\zeta+Q\zeta^2\overline{\zeta}+O(|\zeta|^5)\\=&\lambda\zeta(1+\mathrm{Re}(\overline{\lambda}Q)|\zeta|^2+iI_m(\overline{\lambda}Q)|\zeta|^2)+O(|\zeta|^5)\\=&\lambda\zeta(1+\mathrm{Re}(\overline{\lambda}Q)|\zeta|^2)(1+iI_m(\overline{\lambda}Q)|\zeta|^2)+O(|\zeta|^5)\\=&(|\zeta|+\mathrm{Re}(\overline{\lambda}Q)|\zeta|^3)\exp\{i[\alpha+\phi+I_m(\overline{\lambda}Q)|\zeta|^2]\}+O(|\zeta|^5)\end{aligned}$$

即得极坐标形式 (3.5.8), 并有 $f_1(0)=-\mathrm{Re}(\overline{\lambda}Q)$ 即 (3.5.9). 定理 (3.5.1) 证毕. □

以下考虑不动点的 Hopf 分枝问题. 不考虑强共振情形, 由定理 (3.5.1) 可知, 若 $\lambda = (1+\mu)e^{i\alpha}$, 二维映射 (3.5.4) 可约化为规范型

$$z_{n+1} = (1+\mu)e^{i\alpha}z_n + Qz_n^2\overline{z_n} + \cdots \tag{3.5.10}$$

或极坐标形式

$$r_{n+1} = r_n|(1+\mu)e^{i\alpha}z_n + Qr_n^2| + \cdots, \quad Q = -qe^{i\alpha}. \tag{3.5.11}$$

在低阶近似情形

$$r_{n+1}^2 = (1+2\mu)r_n^2 - 2q\cos(\alpha - r)r_n^4. \tag{3.5.12}$$

(3.5.12) 可看作具有非平凡的不动点 $r = R_H$ 的一维映射, 其中

$$R_H^2 = \frac{\mu}{q\cos(\alpha - r)}. \tag{3.5.13}$$

如果 $\cos(\alpha - r) > 0$, 当 $\mu > 0$ 时, (3.5.13) 定义了一个吸引的不变圆 ——Hopf 圆. 当然, 在 (x, y) 平面内, 不变圆可能是椭圆. 若 $\cos(\alpha - r) < 0$, 则当 $\mu < 0$ 时有不变圆, 但该圆是排斥的. R_H 称为 Hopf 半径. 由 (3.5.13) 可见

$$\frac{\mu}{R_H^2} = q\cos(\alpha - r) = -\mathrm{Re}(\overline{\lambda}Q) = f_1(0). \tag{3.5.14}$$

如果 $\cos(\alpha - r) \approx 0$, 为描述分枝性质, 需要规范型中更多的项, 我们不再详论. 综上所述得到下面的结论.

定理 3.5.2(映射的 Hopf 分枝定理) 设 $\Phi_\mu : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 为单参数映射族, 在不动点 $(x, y) = (x(\mu), y(\mu))$, 其 Jacobi 矩阵 $D\Phi_\mu$ 有特征值 $\lambda(\mu)$, $\overline{\lambda}(\mu)$, 假设

(1) $|\lambda(0)| = 1$, 但 $\lambda^m(0) \neq 1$, $m = 1, 2, 3, 4$;

(2) $\left|\dfrac{d}{d\mu}\lambda(\mu)\right|_{\mu=0} = d > 0$.

则对足够小的 $\mu > 0$, $\mu \in (0, \varepsilon)$ ($\mu < 0, \mu \in (-\varepsilon, 0)$), 若 $f_1(0) > 0$ ($f_1(0) < 0$), Φ_μ 存在吸引的 (排斥的) 单参数不变圆的连续族.

以下考虑弱共振情形. 此时 $\alpha = \dfrac{2\pi l}{m}$, $m \geqslant 5$. 如果 (3.5.4) 存在 Hopf 圆, 则有两种可能性: 或者 Hopf 圆被非周期轨道稠密地覆盖着, 或者它含有 m 阶的吸引周期轨道. 研究规范型

$$z_{n+1} = \lambda z_n + Qz_n^2\overline{z}_n + \cdots + C\overline{z}_n^{m-1} + \cdots. \tag{3.5.15}$$

兹取

$$\lambda = (1 + \mu e^{i\varphi})e^{i\alpha}, \quad \alpha = \frac{2\pi l}{m}. \tag{3.5.16}$$

即通过局部坐标 μ 与 ϕ 来描述 $e^{i\alpha}$ 之邻域. 从 (3.5.16) 得 Hopf 半径

$$qR_H^2\cos(\alpha-r)=-\mu\cos\phi. \tag{3.5.17}$$

这是 (3.5.13) 的少许推广. (3.5.15) 在 Hopf 圆上的作用可通过关系

$$\theta_{n+1}=\theta_n+\alpha+\arg(1+\mu e^{i\phi}+e^{-i\alpha}QR^2+\cdots+C_1R^{m-2}e^{-im\theta_n}+\cdots)$$

来描述, 其中, $\theta=\arg z, C_1$ 为常数. 将 (3.5.17) 代入上式, 并作某些三角运算可得

$$\theta_{n+1}=\theta_n+\alpha+\arg\left(1+i\mu\frac{\sin(\phi+\alpha-r)}{\cos(\alpha-r)}+\cdots+C_2\mu^{\frac{m-2}{2}}e^{-im\theta n}\right), \tag{3.5.18}$$

其中 C_2 是常数. 若要映射 (3.5.4) 存在周期 m 解, 其必要条件是存在 θ 值, 使得一次近似满足关系:

$$\mu\frac{\sin(\phi+\alpha-r)}{\cos(\alpha-r)}+\mu^{\frac{m-2}{2}}I_m(C_2e^{-im\theta n})=0.$$

如果下面的不等式

$$|\sin(\phi+\alpha-r)|\leqslant C_3\mu^{\frac{m-4}{2}} \tag{3.5.19}$$

成立, 则比可找到使前一等式成立的 θ 值. 其中常数 C_3 依赖于规范型 (3.5.15) 中的 $\bar{z}^{m-1}$ 项系数 C. 由 (3.5.19) 所确定的区域是两个喇叭形的对称角域, 但因我们假设 Hopf 分枝发生于参数增加时, 即 μ 在单位圆之外, 因此, 上述两个喇叭形仅在单位圆外面有意义. 图 3.5.1 给出了其示意图. 图 3.5.1(a) 中取 $r=\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, 喇叭域的边界曲线由两圆弧组成.

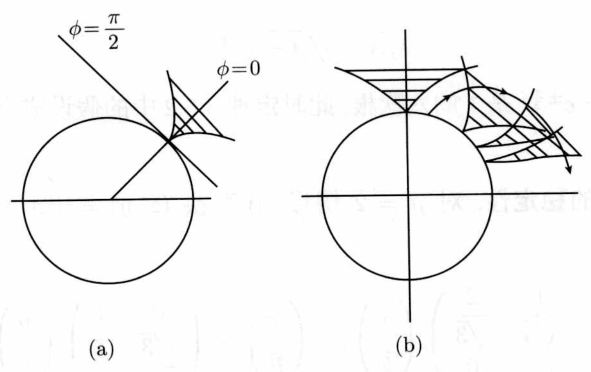


图 3.5.1 二维映射的 Arnold 舌头

在 $\dfrac{\alpha}{\pi}$ 为有理数的每个点, 都可以从它作出这样一个喇叭形区域, 称为 Arnold 舌头或者 Arnold 喇叭. 这些舌头十分靠近单位圆, 且关于线

$$\phi=r-\alpha\quad(\bmod\pi) \tag{3.5.20}$$

对称. (3.5.20) 称 Arnold 舌头的对称轴.

当 $\dfrac{\alpha}{\pi}$ 为有理数时, 随着其数值增大, Arnold 舌头日愈变细. 如果 $\cos(\alpha-r)\approx 0$, 则上面的分析失效, 此时 Arnold 舌头几乎切于单位圆, 其图形像头发梳子那样.

随着参数的改变, 参数可能会进入不同的 Arnold 舌头, 且 Arnold 舌头边会交叠 (图 3.5.1(b)).

对强共振情形, 由于涉及较多的知识. 本章不作讨论.

以下举一个例子说明定理 3.5.2 的应用. 考虑具有时间滞后的种群增长的 Logistic 方程

$$N_{n+1}=\mu N_n(1-N_{n-1}). \tag{3.5.21}$$

令 $x_n=N_{n-1}$, $y_n=N_n$, (3.5.21) 化为二维映射

$$F_\mu:(x,y)\to(y,\mu y(1-x)). \tag{3.5.22}$$

上述映射有不动点 $(x,y)=(0,0)$ 和 $(x,y)=\left(\dfrac{\mu-1}{\mu},\dfrac{\mu-1}{\mu}\right)$. 容易证明, 当 $\mu>1$ 时, (0,0) 是鞍点, 而在另一个非零不动点

$$DF\left(\frac{\mu-1}{\mu},\frac{\mu-1}{\mu}\right)=\begin{pmatrix}0&1\\1-\mu&1\end{pmatrix}, \tag{3.5.23}$$

其特征值为

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5-4\mu}). \tag{3.5.24}$$

当 $\mu>\dfrac{5}{4}$ 时, 特征值为复数. 兹记 $C=\sqrt{4\mu-5}$, 则

$$\lambda,\overline{\lambda}=\sqrt{\mu-1}e^{\pm iC}. \tag{3.5.25}$$

当 $\mu=2$ 时, $\lambda,\overline{\lambda}=e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$ 是 1 的六次根, 此时定理 3.5.2 中的假设成立, $\dfrac{d}{d\mu}|\lambda(\mu)|_{\mu=2}=1>0$.

为考虑分枝的稳定性, 对 $\mu=2$ 情形, 作变换 $(\overline{x},\overline{y})=\left(x-\dfrac{1}{2},y-\dfrac{1}{2}\right)$, 得新系统

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{2}{\sqrt{3}}\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{x}\\\overline{y}\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}\overline{x}\\\overline{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\\dfrac{\sqrt{3}}{2}&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}. \tag{3.5.26}$$

此时考虑 Hopf 分枝的奇点变到了原点, 且线性部分有规范型, (3.5.22) 化为

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\\dfrac{\sqrt{3}}{2}&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2uv+2v^2\\0\end{pmatrix}, \tag{3.5.27}$$

其中特征值 $\lambda, \overline{\lambda} = \dfrac{1}{2} \pm i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 非线性项系数为

$$f_{20} = 0, \quad f_{11} = -2, \quad f_{02} = -4, \quad g_{20} = 0, \quad g_{11} = 0, \quad g_{02} = 0.$$

故有

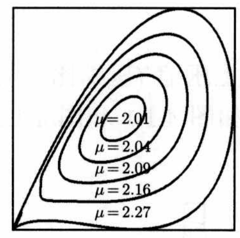
$$\begin{aligned} G_{20} &= \frac{1}{4}(4+4i) = 1+i, \quad G_{11} = \frac{1}{4}(-4+0i) = -1, \\ G_{02} &= \frac{1}{4}(4-4i) = 1-i, \quad G_{21} = 0. \end{aligned} \tag{3.5.28}$$

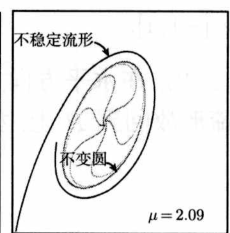
利用上述数字计算得

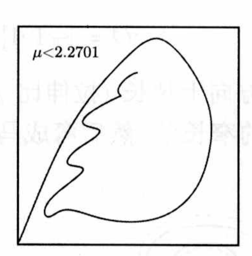
$$f_1(0) = \frac{7-\sqrt{3}}{4} > 0. \tag{3.5.29}$$

由定理 (3.5.2) 可知, 当 $\mu > 2, |\mu - 2|$ 充分小时, 围绕系统 (3.5.22) 的不动点 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ 存在吸引的不变闭曲线.

Aronson 等 (1982) 曾经给出如图 3.5.2 所示的数值计算结果. 当 $\mu = 2.2701$ 时, 系统 (3.5.22) 已不存在不变闭曲线, 作者们得到了所谓的"奇怪吸引子". 因此, 本例是参数 μ 从 2 逐渐增大时, 从光滑的不变圆分枝到奇怪吸引子的一个典型例子.







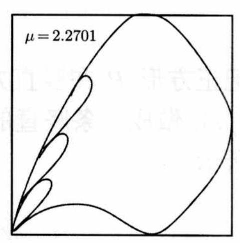


图 3.5.2 从光滑的不变圆分枝到奇怪吸引子的例子

第 4 章　Smale 马蹄与横截同宿环

1967 年, Smale 在《可微动力系统》的综合报告中说: “我试图澄清 N. Levinson 的文章中关于 Van der Pol 方程的解的几何性质, 而构造了一个 ‘马蹄’ 的例子. Levinson 早先曾写信告诉我上述方程存在无穷多个周期解. ‘马蹄’ 是具有无穷多个周期点的结构稳定 (或 Ω 稳定) 的第一个例子.” 本章首先介绍这个著名的例子, 接着介绍 Moser 的工作和有关同宿缠结的基本理论, 这些知识对我们理解微分方程解的混沌复杂性起着核心作用.

4.1　Smale 的马蹄映射

考虑平面 $\mathbf{R}^2$ 上的正方形

$$P = (-1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (-1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

和

$$Q = [-1, 1] \times [-1, 1].$$

把正方形 P 在竖直方向上拉长 (拉伸比 $\mu > 2$), 在水平方向上压缩 (压缩比 $\lambda < 1/2$), 做成一条竖直的窄长条, 然后弯成马蹄形放回到 P 上, 如图 4.1.1 和图 4.1.2 所示.

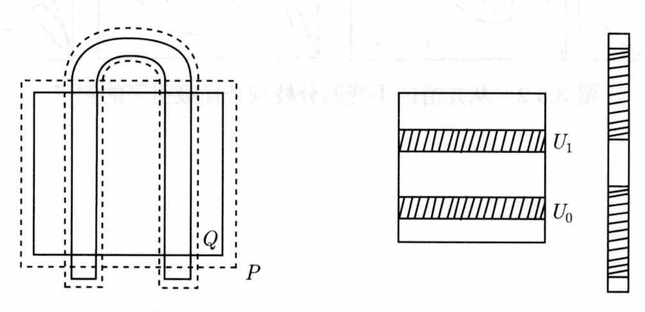
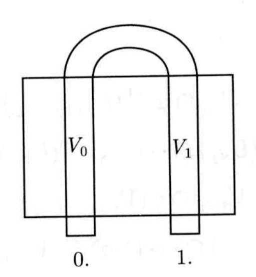


图 4.1.1　Smale 的马蹄映射 (1)

用这种方法我们构造了一个映射 $\varphi : P \to \mathbf{R}^2$. 它是从 P 到象集合的微分同胚. 我们将证明, 映射 φ 存在一个不变集合 $\Lambda \subset Q, \varphi|_\Lambda$ 拓扑共轭于符号空间 $\Sigma(2)$ 中的双边移位映射.



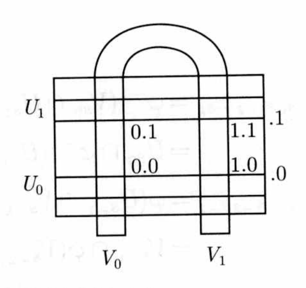


图 4.1.2 Smale 的马蹄映射 (2)

首先注意, $V=\varphi(Q)\cap Q$ 由两不相交的竖条 V_0 和 V_1 构成, $V=V_0\cup V_1$, 每个竖条宽度小于 Q 的宽度的一半, 用 $\theta(V_i)$ 表示竖条宽度, 有

$$\theta(V_0),\theta(V_1)<1.$$

其次, $U=\varphi^{-1}(V)$ 由两个不相交的横条

$$U_0=\varphi^{-1}(V_0),\quad U_1=\varphi^{-1}(V_1)$$

组成, $U=U_0\cup U_1$, 每个横条的厚度小于 Q 的厚度的一半, $\theta(U_0),\theta(U_1)<1$.

以下记

$$U_{ij}=\varphi^{-1}(V_i\cap U_j)=U_i\cap\varphi^{-1}(U_j),\quad i,j=0,1; \tag{4.1.1}$$

$$V_{ij}=\varphi(U_j\cap V_i)=V_i\cap\varphi(V_j),\quad i,j=0,1. \tag{4.1.2}$$

可以看出：U_{ij} 是包含在 U_j 中的横条, 其厚度小于 U_i 厚度的一半：$\theta(U_{ij})<\frac{1}{2}\theta(U_i)<\frac{1}{2}$.

V_{ij} 是包含 V_i 中的竖条, 其宽度小于 V_i 的一半：$\theta(U_{ij})<\frac{1}{2}\theta(V_i)<\frac{1}{2}$ (图 4.1.3).

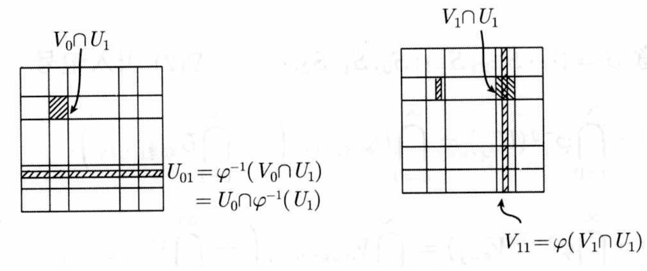


图 4.1.3 马蹄映射的编码

一般地, 对于符号

$$S_{-k},S_{-(k-1)},\cdots,S_{-1};S_0,S_1,\cdots,S_k\in\{0,1\}=S(2),$$

定义

$$
\begin{aligned}
U_{s_0s_1s_2\cdots s_k} &= \varphi^{-1}(V_{s_0}\cap U_{s_1s_2\cdots s_k}) = U_{s_0}\cap\varphi^{-1}(U_{s_1s_2\cdots s_k})\\
&= U_{s_0}\cap\varphi^{-1}(U_{s_1})\cap\varphi^{-2}(U_{s_2})\cap\cdots\cap\varphi^{-k}(U_{s_k}), \qquad (4.1.3)\\
V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}} &= \varphi(U_{s_{-1}}\cap V_{s_{-k}\cdots s_{-2}}) = V_{s_{-1}}\cap\varphi(V_{s_{-k}\cdots s_{-2}})\\
&= V_{s_{-1}}\cap\varphi(V_{s_{-2}})\cap\varphi^2(V_{s_{-3}})\cap\cdots\cap\varphi^{k-1}(V_{s_{-k}}). \qquad (4.1.4)
\end{aligned}
$$

因此, $U_{s_0s_1\cdots s_k}$ 为含于 $U_{s_0s_1s_2\cdots s_{k-1}}$ 中的一横条, 而 $V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}}$ 是含于 $V_{s_{-k+1}\cdots s_{-2}s_{-1}}$ 中的一竖条. 由上述定义可见

引理 4.1.1　以下关系成立:

(1) $\varphi(U_{s_0s_1\cdots s_k}) = V_{s_0}\cap U_{s_1s_2\cdots s_k}$, $\varphi(V_{s_{-k}\cdots s_{-1}})\cap V_{s_0} = V_{s_{-k}\cdots s_{-1}s_0}$;

(2) $\theta(U_{s_0s_1\cdots s_k}) < \dfrac{1}{2}\theta(U_{s_1\cdots s_k}) < \dfrac{1}{2^k}$, $\theta(V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}}) < \dfrac{1}{2}\theta(V_{s_{-k}s_{-k+1}\cdots s_{-2}}) < \dfrac{1}{2^{k-1}}$.

证　(1) 由定义 (4.1.3) 与定义 (4.1.4) 式直接验证即知.

(2) 由上述定义有

$$
U_{s_0s_1s_2\cdots s_k} = \varphi^{-1}(V_{s_0}\cap U_{s_1\cdots s_k}).
$$

因 φ^{-1} 在竖向上压缩, 压缩比小于 $\dfrac{1}{2}$, 故

$$
\theta(U_{s_0s_1\cdots s_k}) < \frac{1}{2}\theta(U_{s_1s_2\cdots s_k}) < \frac{1}{2^k}.
$$

类似地有

$$
\theta(V_{s_{-k}\cdots s_{-2}s_{-1}}) < \frac{1}{2}\theta(V_{s_{-k}\cdots s_{-2}}) < \frac{1}{2^{k-1}},
$$

证毕. □

以下对任意 $S = (\cdots S_{-2}, S_{-1}; S_0, S_1, S_2, \cdots)\in\Sigma(2)$ 引入记号

$$
U(s) = \bigcap_{j=0}^{\infty}\varphi^{-j}(U_{s_j}) = \bigcap_{k=0}^{\infty}U_{s_0s_1\cdots s_k}\left(=\bigcap_{k=1}^{\infty}U_{s_0s_1\cdots s_k}\right),
$$

$$
V(s) = \bigcap_{j=1}^{\infty}\varphi^{j-1}(V_{s_{-j}}) = \bigcap_{k=0}^{\infty}V_{s_{-k}\cdots s_{-1}}\left(=\bigcap_{k=2}^{\infty}V_{s_{-k}s_{-k+1}\cdots s_{-1}}\right).
$$

引理 4.1.2　有

(1) $\varphi(V(s)\cap U(s)) = V(\sigma(s))\cap U(\sigma(s))$;

(2) $\mathrm{Card}(V(s)\cap U(s)) = 1$.

证 (1) 由引理 4.1.1(1) 可得

$$\varphi(U(s))=\bigcap_{k=1}^{\infty}\varphi(U_{s_0s_1\cdots s_k})=V_{s_0}\cap\bigcap_{k=1}^{\infty}U_{s_1\cdots s_k}=V_{s_0}\cap U(\sigma(s)),$$

$$\varphi(V(s))\cap V_{s_0}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\varphi(V_{s_{-k}\cdots s_{-1}})\cap V_{s_0}=\bigcap_{k=1}^{\infty}V_{s_{-k}s_{-k+1}\cdots s_{-1}s_0}=V(\sigma(s)).$$

故

$$\begin{aligned}\varphi(V(s)\cap U(s))&=\varphi(V(s))\cap\varphi(U(s))=\varphi(V(s))\cap V_{s_0}\cap U(\sigma(s))\\&=V(\sigma(s))\cap U(\sigma(s)).\end{aligned}$$

(2) 对任意的 $k\in\mathbf{N}$, 有

$$V(s)\cap U(s)\subset V_{s_{-k}\cdots s_{-1}}\cap U_{s_0s_1\cdots s_k},$$

而

$$\theta(V_{s_{-k}\cdots s_{-1}})<\frac{1}{2^{k-1}}\theta(U_{s_0s_1\cdots s_k})<\frac{1}{2^k}.$$

因此, $\mathrm{Card}(V(s)\cap U(s))=1$, 证毕. □

再令

$$\Lambda=\bigcup_{s\in\Sigma(2)}(V(s)\cap U(s)).$$

把单点集与它所含唯一点等同视之, 可定义一个映射 $h:\Sigma(2)\to\Lambda$ 如下:

$$h(s)=V(s)\cap U(s),\quad \forall s\in\Sigma(2).$$

定理 4.1.1 (Samle) Λ 是 ϕ 的一个紧致不变集, 且 $\varphi|_\Lambda$ 拓扑共轭于 (双边) 符号系统 $\sigma:\Sigma(2)\to\Sigma(2)$.

证 首先, $h:\Sigma(2)\to\Lambda$ 是连续映射. 事实上, 若 $s,t\in\Sigma(2)$ 满足 $d(s,t)<\dfrac{1}{2^k}$, 则 s,t 的标号从 $-k+1$ 到 $k-1$ 之间的一切元素相同, 因此 $h(s)$ 与 $h(t)$ 就落在宽度小于 $\dfrac{1}{2^{k-1}}$, 厚度小于 $\dfrac{1}{2^k}$ 的矩形之中,

$$h(s),h(t)\in V_{s_{-k}\cdots s_{-1}}\cap U_{s_0s_1\cdots s_k}.$$

换言之, h 是连续的.

其次, 证明 h 为单射. 设 $s,t\in\Sigma(2)$, 如果存在 $k\in\mathbf{Z},k\geqslant0$, 使 $s_k\neq t_k$, 那么

$$U_{s_k}\cap U_{t_k}=\varnothing,$$

$$\varphi^k(h(s)) \in U_{s_k},\quad \varphi^k(h(t)) \in U_{t_k}.$$

故 $h(s) \neq h(t)$. 另一方面, 若存在 $l \in \mathbf{Z}, l > 0$, 使得 $s_{-l} \neq t_{-l}$, 那么 $V_{s_{-l}} \cap V_{t_{-l}} = \varnothing$,

$$\varphi^{-(l-1)}(h(s)) \in V_{s_{-l}},\quad \varphi^{-(l-1)}(h(t)) \in V_{t_{-l}}.$$

从而, $h(s) \neq h(t)$ 也成立, 故 h 是单一的.

最后证明 h 为满射, 从而 h 为双射. 连续的双射必是同胚 (因为 $\Sigma(2)$ 为紧致空间, $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$ 是 Hausdorff 空间). 事实上, 任给 $x \in \Lambda$, 由引理 4.1.2, 必有某个 $s \in \Sigma(2)$ 使得 $x \in V(s) \cap U(s)$, 从而 h 是满映射, 证毕. □

定义 4.1.1　设 X 为拓扑空间, $f: X \to X$ 是同胚或连续映射, Λ 是 f 的不变集, 若存在同胚 $h: \Sigma(N) \to \Lambda$, 其中 $\Sigma(N)$ 是适当的双边或单边符号空间, 使得 $f \circ h = h \circ \sigma$, 则称 Λ 为系统 f 的移位不变集.

推论 4.1.1　Smale 马蹄映射的不变集 Λ 是 φ 的移位不变集.

定理 4.1.2　Smale 马蹄模型中的 φ 在其移位不变集 Λ 上是结构稳定的.

证明略.

为形象和简单地说明 Smale 马蹄不变集的性质, 张景中等 (1981) 构造了马蹄映射的具体数值例子. 取 $U_0 = [0,1] \times [0.1, 0.2], U_1 = [0,1] \times [0.8, 0.9]$, $V_0 = [0.1, 0.2] \times [0,1], V_1 = [0.8, 0.9] \times [0,1]$. 并取铅直方向的扩张系数 $\mu = 10$, 水平方向的压缩系数 $\lambda = 1/10$, 定义

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} \left(\dfrac{1+x}{10}, 10y - 1\right), & 当\ (x,y) \in U_0, \\ \left(\dfrac{9-x}{10}, 9 - 10y\right), & 当\ (x,y) \in U_1. \end{cases}$$

在上述映射之下, 再设 $(x,y) \in Q/U_0 \cup U_1$, $\varphi^n(x,y) \overline{\in} Q$, 则

(i) 若 $z = (x,y) \in Q$, 而 x, y 可表为十进制循环小数形式:

$$\begin{cases} x = 0.\dot{a}_{m-1}a_{m-2}\cdots\dot{a}_m, \\ y = 0.\dot{a}_1 a_2 \cdots \dot{a}_m, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} m \geqslant 1, & a_m = 1 \\ 对\ i < m, & a_i = 1, 8 \end{pmatrix}.$$

则 $f^m(z) = z$, 即 z 为周期点.

(ii) $Q \cap \Omega(f) = \{(x,y) | (x,y)$ 的十进无穷小数仅由 1,8 两数组成 $\}$. 显然, $Q \cap \Omega(f)$ 具有二维 Cantor 集的结构. 且 (i), (ii) 两点表达了我们所希望得到的 Smale 马蹄的基本性质.

在上面的线性 Samle 马蹄例子中, 如考虑整个不变集的点集的 Lebesgue 测度, 显然等于零. R.Bowen 曾经举例证明, 如果微分同胚是 C^1 的, 那么存在正 Lebesgue 测度的马蹄.

注意, 由第 2 章关于子系统的定义可知, 定理 4.1.1 也可以说: 映射 φ 以 $\Sigma(2)$ 上的移位为子系统.

4.2 Moser 定理及其推广

分析上节映射 φ 产生的移位不变集的关键因素在于: 不相交的横条与竖条间有一定映射关系, 而横条与竖条的宽度和厚度又有一定控制关系. 将这些关键因素概括和推广, 可得到许多更加一般的产生马蹄不变集的条件. 我们首先介绍 Moser (1973) 给出的条件, 接着再介绍一些推广的结果. 兹叙述一些定义与术语.

对给定的 $0 < \mu < 1$, 若 $u : [-1,1] \to [-1,1]$ 满足条件 $|u(x_1) - u(x_2)| \leqslant \mu|x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in [-1,1]$, 则称 $y = u(x)$ 为 μ 横曲线.

若两条 μ 横曲线 $y = u_1(x), y = u_2(x)$ 满足关系 $-1 \leqslant u_1(x) < u_2(x) \leqslant 1$, 则称集合

$$U = \{(x,y)| -1 \leqslant x \leqslant 1, u_1(x) \leqslant y \leqslant u_2(x)\}$$

为一个 μ 横条, 横条厚度定义为

$$\theta(U) = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \{u_2(x) - u_1(x)\}.$$

类似地, 若函数 $V : [-1,1] \to [-1,1]$ 满足条件

$$|V(y_1) - V(y_2)| \leqslant \mu|y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in [-1,1],$$

则称曲线 $x = V(y)$ 为 μ 竖曲线. 同样可定义 μ 竖条 V 及宽度 $\theta(V)$.

引理 4.2.1 设有一串 μ 横条

$$U^{(1)} \supset U^{(2)} \supset \cdots \supset U^{(k)} \supset U^{(k+1)} \supset \cdots$$

满足 $\lim\limits_{k \to +\infty} \theta(U^{(k)}) = 0$, 则这些 μ 横条之交 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} U^{(k)}$ 是一 μ 横曲线. 类似结果对 μ 竖条亦真.

证 设 $U^{(k)} = \{(x,y)| -1 \leqslant x \leqslant 1$ 且有 $u_1^{(k)}(x) \leqslant y \leqslant u_2^{(k)}(x)\}$. 对固定的 $x \in [-1,1]$, 由闭区间套定理, 存在极限

$$\lim_{k \to +\infty} u_1^{(k)}(x) = \lim_{k \to +\infty} u_2^{(k)}(x) = u(x).$$

当 x 在 $[-1,1]$ 中改变时, 定义了一个函数 $u = u(x)$, $u : [-1,1] \to [-1,1]$ 且满足 $|u(x_1) - u(x_2)| \leqslant \mu|x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in [-1,1]$. 曲线 $y = u(x)$ 即为横条 $u^{(k)}(k = 1, 2, \cdots)$ 之交集. 证毕. □

引理 4.2.2　每条 μ 横曲线 $y=u(x)$ 与 μ 竖曲线 $x=V(y)$ 相交于唯一点.

证　只需证明函数方程

$$\begin{cases} y=u(x), \\ x=v(y) \end{cases}$$

有唯一解即可, 将第一方程代入第二方程得

$$x=v(u(x)).$$

由于 $|v(u(x_1))-v(u(x_2))|\leqslant \mu|u(x_1)-u(x_2)|\leqslant \mu^2|x_1-x_2|, \forall x_1,x_2\in[-1,1]$ 成立, 故函数 $v\circ u:[-1,1]\to[-1,1]$ 存在唯一的不动点. 证毕. □

由引理 4.2.2 可知, 由每对 μ 横条和 μ 竖曲线唯一地确定了一个点 $z=(x,y)\in Q=[-1,1]\times[-1,1]$. 引入范数

$$\|u\|=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\{|u(x)|\},\quad \|v\|=\max_{-1\leqslant y\leqslant 1}\{|v(y)|\},\quad \|z\|=\max\{|x|,|y|\}.$$

引理 4.2.3　设 $z_j=(x_j,y_j)$ 为 μ 横曲线 u_j 与 μ 竖曲线 v_j 的交点 $(j=1,2)$, 则有以下估计式:

$$|z_1-z_2|\leqslant\frac{1}{1-\mu}\max\{\|u_1-u_2\|,\|v_1-v_2\|\}.$$

证　由于

$$\begin{aligned}|x_1-x_2|&=|v_1(y_1)-v_2(y_2)|\leqslant|v_1(y_1)-v_1(y_2)|+|v_1(y_2)-v_2(y_2)|\\&\leqslant\mu|y_1-y_2|+\|v_1-v_2\|\leqslant\mu|z_1-z_2|+\|v_1-v_2\|.\end{aligned}$$

同样

$$|y_1-y_2|\leqslant\mu|z_1-z_2|+\|u_1-u_2\|.$$

以上两式说明

$$|z_1-z_2|\leqslant\mu|z_1-z_2|+\max\{\|u_1-u_2\|,\|v_1-v_2\|\}.$$

即

$$|z_1-z_2|\leqslant\frac{1}{1-\mu}\max\{\|u_1-u_2\|,\|v_1-v_2\|\}.$$

证毕. □

推论 4.2.1　若 μ 横曲线 u 与 μ 竖条 v 的两竖边分别交于 z_1 与 z_2, 则

$$|z_1-z_2|\leqslant\frac{1}{1-\mu}\theta(V).$$

类似地, 若 μ 竖曲线 v 与 μ 横条 U 的两横边 u_1 和 u_2 分别交于 z_1,z_2, 则

$$|z_1-z_2|\leqslant\frac{1}{1-\mu}\theta(U).$$

证 在引理 4.2.3 中分别令 $u_1 = u_2 = u$ 与 $v_1 = v_2 = v$ 即得. 证毕. □

以下设 $\psi : Q \to \mathbf{R}^2$ 是从 Q 到 $\psi(Q)$ 的同胚; $U_0, U_1, \cdots, U_{N-1}$ 为 Q 中 N 个两两不交的 μ 横条, $V_0, V_1, \cdots, V_{N-1}$ 为 Q 中 N 个两两不交的 μ 竖条.

Moser 给出以下两个条件:

条件 (I) 对于 $j = 0, \cdots, N-1, \psi(U_j) = V_j$, 且 ψ 把 U_j 的横边变成 V_j 的横边, 把 U_j 的竖边变成 V_j 的竖边.

条件 (II) 对于任意 μ 横条 $U \subset \bigcup\limits_{j=0}^{N-1} U_j$, $\widetilde{U_k} = \psi^{-1}(V_k \cap U)$ 是包含在 U_k 中的 μ 横条, 满足 $\theta(\widetilde{U_k}) \leqslant \nu\theta(U)$; 对于任意 μ 竖条 $V \subset \bigcup\limits_{j=0}^{N-1} V_j$, $\widetilde{V_l} = \psi(U_l \cap V)$ 是包含 V_l 中的 μ 竖条, 满足 $\theta(\widetilde{V_l}) \leqslant \nu\theta(V)$, 其中 $0 < \nu < 1$.

定理 4.2.1(Moser) *在条件 (I) 和 (II) 下, ψ 存在紧致不变集 $\Delta \subset Q$, 使得 $\psi|_\Delta$ 拓扑共轭于双边符号系统 $\sigma : \Sigma(N) \to \Sigma(N)$($N$ 个符号的完全移位).*

为证明定理 4.2.1, 类似于 4.1 节的做法, 对于

$$S_{-k}, \cdots, S_{-1}; S_0, S_1, \cdots, S_k \in S(N),$$

引入记号

$$\begin{aligned} U_{s_0 s_1 \cdots s_k} &= \psi^{-1}(V_{s_0} \cap U_{s_1 \cdots s_k}) = U_{s_0} \cap \psi^{-1}(U_{s_1 \cdots s_k}) \\ &= U_{s_0} \cap \psi^{-1}(U_{s_1}) \cap \cdots \cap \psi^{-k}(U_{s_k}), \\ V_{s_{-k} \cdots s_{-2} s_{-1}} &= \psi(U_{s_{-1}} \cap V_{s_{-k} \cdots s_{-2}}) = V_{s_{-1}} \cap \psi(V_{s_{-k} \cdots s_2}) \\ &= V_{s_{-1}} \cap \psi(V_{s_{-2}}) \cap \cdots \cap \psi^{k-1}(V_{s_{-k}}). \end{aligned}$$

由条件 (I) 与 (II) 容易证明以下结果.

引理 4.2.4 有

(i) $U_{s_0 s_1 \cdots s_k} \subset U_{s_0 s_1 \cdots s_{k-1}}$; $V_{s_{-k} \cdots s_{-2} s_{-1}} \subset V_{s_{-k+1} \cdots s_{-2} s_{-1}}$;

(ii) $\psi(U_{s_0 s_1 \cdots s_k}) = V_{s_0} \cap U_{s_1 s_2 \cdots s_k}$, $\psi(V_{s_{-k} \cdots s_{-2} s_{-1}}) \cap V_{s_0} = V_{s_{-k} \cdots s_{-1} s_0}$;

(iii) $\theta(U_{s_0 s_1 \cdots s_k}) \leqslant \nu\theta(U_{s_1 s_2 \cdots s_k}) < \nu^k$, $\theta(V_{s_{-k} \cdots s_{-2} s_{-1}}) \leqslant \nu\theta(V_{s_{-k} \cdots s_{-2}}) < \nu^{k-1}$.

上述引理只需用定义作归纳法即得.

又对于 $s = (\cdots, s_{-k}, \cdots, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, \cdots, s_k, \cdots) \in \Sigma(N)$. 引入记号

$$U(s) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \psi^{-j}(U_{s_j}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} U_{s_0 s_1 \cdots s_k} \left(= \bigcap_{k=1}^{\infty} U_{s_0 s_1 \cdots s_k} \right),$$

$$V(s) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \psi^{j-1}(V_{s_{-j}}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_{s_{-k} \cdots s_{-2} s_{-1}} \left(= \bigcap_{k=2}^{\infty} V_{s_{-k} \cdots s_{-2} s_{-1}} \right).$$

引理 4.2.5　有

(i) $\psi(V(s)\cap U(s))=V(\sigma(s))\cap U(\sigma(s))$;

(ii) $\mathrm{Card}(V(s)\cap U(s))=1$.

证　(i) 类似于引理 4.1.2.

(ii) 由引理 4.2.2, μ 竖曲线 $V(s)$ 与 μ 横曲线 $U(s)$ 仅交于唯一点. 记

$$\Delta=\bigcup_{s\in\Sigma(N)}(V(s)\cup U(s)),$$

则 Δ 就是 Moser 定理中所述不变集. □

定理 4.2.1 的证明　将单点集等同于它所包含的唯一点, 定义 $h:\Sigma(N)\to\Delta$ 如下:

$$h(s)=V(s)\cap U(s).$$

以下验证 h 的连续性, 至于 f 的双射性类似于 4.1 节的证明. 若 $s,t\in\Sigma(N)$ 满足 $d(s,t)<\dfrac{1}{2^k}$, 则

$$h(s),h(t)\in V_{s_{-k}\cdots s_{-1}}\cap U_{s_0s_1\cdots s_k}.$$

故根据引理 4.2.3, 有

$$|h(s)-h(t)|\leqslant\frac{1}{1-\mu}\max\{\theta(V_{s_{-k}\cdots s_{-1}}),\theta(U_{s_0s_1\cdots s_k})\}\leqslant\frac{\nu^{k-1}}{1-\mu}.$$

定理 4.2.1 中的条件 (II) 在应用中不便验证, 如果对映射 ψ 附加可微性条件, 那么, 条件 (II) 可以用许多方便讨论的条件来代替.

设 C^1 映射 ψ: $P\to\mathbf{R}^2$ 是到其象集 $\psi(P)$ 的微分同胚, 其坐标表示为

$$\psi:\begin{cases}x_1=f(x_0,y_0),\\ y_1=g(x_0,y_0).\end{cases}$$

ψ 的切映射 $d\psi$ 将 (x_0,y_0) 处的切向量 (ξ_0,η_0) 变为 (x_1,y_1) 处的切向量 (ξ_1,η_1),

$$d\psi:\begin{cases}\xi_1=f'_x\xi_0+f'_y\eta_0,\\ \eta_1=g'_x\xi_0+g'_y\eta_0.\end{cases}$$

Moser 给出了以下涉及微分的条件:

条件 (III)

(III^+) 对任意 $P\in\bigcup\limits_{j=0}^{N-1}U_j$, $(d\psi)_p$ 把 P 点切空间中的 μ 竖扇形 $S_P^+=\{(\xi_0,\eta_0)|$

$|\xi_0| \leqslant \mu|\eta_0|\}$ 映入到 $\psi(P)$ 点切空间中类似的扇形之中

$$(d\psi)_P(S_P^+) \subset S_{\psi(P)}^+ = \{(\xi_1,\eta_1)|\ |\xi_1| \leqslant \mu|\eta_1|\},$$

并且 $(\xi_0,\eta_0) \in S_P^+$ 与对应的 $(\xi_1,\eta_1) = (d\psi)_P(\xi_0,\eta_0) \in S_{\psi(P)}^+$ 应满足 $|\eta_1| \geqslant \mu^{-1}|\eta_0|$.

(III$^-$) 对任意 $q \in \bigcup_{j=0}^{N-1} V_j$, $(d\psi^{-1})_q$ 把 q 点切空间中的 μ 横扇形 $S_q^- = \{(\xi_1,\eta_1)|\ |\eta_1| \leqslant \mu|\xi_0\}$ 映入到 $\psi^{-1}(q)$ 点切空间中的相应扇形之中

$$(d\psi^{-1})_q(S_q^-) \subset S_{\psi^{-1}(q)}^- = \{(\xi_0,\eta_0)|\ |\eta_0| \leqslant \mu|\xi_0|\},$$

并且 $(\xi_1,\eta_1) \in S_q^-$ 与相应的 $(\xi_0,\eta_0) = (d\psi^{-1})_q(\xi_1,\eta_1) \in S_{\psi^{-1}(q)}^+$ 应满足 $|\xi_0| \geqslant \mu^{-1}|\xi_1|$.

兹证条件 (I) 与条件 (III) 满足意味着条件 (II) 成立, 从而在 (I), (III) 条件下, 定理 4.2.1 的结论正确.

引理 4.2.6 *存在光滑函数 $\beta: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 满足*

(i)

$$\beta(t) \begin{cases} > 0, & \text{若 } |t| < 1, \\ = 0, & \text{若 } |t| \geqslant 1; \end{cases}$$

(ii) $\beta(-t) = \beta(t),\ \forall t \in \mathbf{R}$;

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \beta(t)dt = 1.$

证 取

$$\alpha(t) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{t^2-1}\right), & \text{若 } |t| < 1, \\ 0, & \text{若 } |t| \geqslant 1. \end{cases}$$

再令 $\beta(t) = \alpha(t) \Big/ \left[\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \alpha(t)dt\right]$. $\beta(t)$ 满足引理的条件, 证毕. □

引理 4.2.7 *设 $V: [-1,1] \to \mathbf{R}$ 满足*

$$|V(t_1) - V(t_2)| \leqslant \mu|t_1 - t_2|, \quad \forall t_1, t_2 \in [-1,1],$$
$$|V(t)| \leqslant 1, \quad \forall t \in [-1,1].$$

则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在光滑函数 $\widetilde{V}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 满足

$$|\widetilde{V}(t_1) - \widetilde{V}(t_2)| \leqslant \mu|t_1 - t_2|, \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbf{R},$$
$$|\widetilde{V}(t)| \leqslant 1, \quad \forall t \in \mathbf{R},$$
$$|\widetilde{V}(t) - V(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [-1,1].$$

证 补充规定

$$V(t) = \begin{cases} V(-1), & 若\ t < -1, \\ V(1), & 若\ t > 1. \end{cases}$$

我们把 V 的定义域扩充到整个实数轴 $\mathbf{R}$. 显然, 扩充后的函数满足 $|V(t_1) - V(t_2)| \leqslant \mu|t_1 - t_2|, \forall t_1, t_2 \in \mathbf{R}, |V(t)| \leqslant 1, \forall t \in \mathbf{R}$. 对于 $0 < \lambda < \mu^{-1}\varepsilon$, 令

$$\widetilde{V}(t) = \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbf{R}} \beta(t-s)V(s)ds = \int_{\mathbf{R}} \beta(r)V(t+\lambda r)dr.$$

显然, $\widetilde{V} \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 并且满足

$$\begin{aligned} |\widetilde{V}(t_1) - \widetilde{V}(t_2)| &\leqslant \int_{\mathbf{R}} \beta(r)|V(t_1 + \lambda r) - V(t_2 + \lambda r)|dr \\ &\leqslant \mu|t_1 - t_2|, \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbf{R}, \\ |\widetilde{V}(t)| &\leqslant \int_R \beta(r)|V(t+\lambda r)|dr \leqslant 1, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \\ |\widetilde{V}(t) - V(t)| &= \int_{\mathbf{R}} \beta(r)|V(t+\lambda r) - V(t)|dr \\ &\leqslant \mu\lambda \int_{-1}^{1} \beta(r)|r|dr \\ &\leqslant \mu\lambda \int_{-1}^{1} \beta(r)dr < \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

□

引理 4.2.8 设 $\psi: P \to \mathbf{R}^2$ 是到象集 $\psi(P)$ 的微分同胚, 满足条件 (I) 和 (III); $\gamma \subset \bigcup_{j=0}^{N-1} V_j$ 是一条 μ 竖曲线, $\delta \subset \bigcup_{j=0}^{N-1} U_j$ 是一条 μ 横曲线. 则 ψ 把 $\hat{\gamma} = U_k \cap \gamma$ 映成 V_k 中一条 μ 竖曲线 $\psi(\hat{\gamma})$, ψ^{-1} 把 $\breve{\delta} = V_l \cap \delta$ 映成 U_l 中的一条 μ 横曲线 $\psi^{-1}(\breve{\delta})$.

证 设 γ 由 $x = V(y)$ 确定, 由条件 (I), V 满足

$$|V(y_1) - V(y_2)| \leqslant \mu|y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in [-1, 1].$$

如果 γ 是光滑的, 易见

$$|V'(y)| \leqslant \mu, \quad \forall y \in [-1, 1].$$

对任意不同的点 (x_1, y_1) 和 $(x_2, y_2) \in \hat{\gamma}$, 记

$$(x_3, y_3) = \psi(x_1, y_1), \quad 即 \begin{cases} x_3 = f(x_1, y_1), \\ y_3 = g(x_1, y_1), \end{cases}$$

$$(x_4, y_4) = \psi(x_2, y_2), \quad 即 \begin{cases} x_4 = f(x_2, y_2), \\ y_4 = g(x_2, y_2). \end{cases}$$

利用 Cauchy 中值公式和条件 (III$^+$) 得

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_3-x_4}{y_3-y_4}\right| &= \left|\frac{f(v(y_1),y_1)-f(v(y_2),y_2)}{g(v(y_1),y_1)-g(v(y_2),y_2)}\right| \\ &= \left|\frac{f'_x(v(\zeta),\zeta)v'(\zeta)+f'_y(v(\zeta),\zeta)}{g'_x(v(\zeta),\zeta)v'(\zeta)+g'_y(v(\zeta),\zeta)}\right| \leqslant \frac{\mu|\eta_1|}{|\eta_1|}=\mu,\end{aligned}$$

即 $|x_3-x_4|\leqslant \mu|y_3-y_4|$. 由此可以推出 $\psi(\hat{\gamma})$ 是一个函数 $x=\omega(y)$ 的图像, 并且

$$|\omega(y_3)-\omega(y_4)|\leqslant \mu|y_3-y_3|, \quad \forall y_3,y_4\in[-1,1]. \qquad \square$$

对于 γ 不一定光滑的一般情形, 利用引理 4.2.8, 可用一光滑的 μ 竖曲线 $\tilde{\gamma}$ 来一致逼近 γ, 记 $\hat{\tilde{\gamma}}=U_k\cap\tilde{\gamma}$, 则 $\psi(\hat{\tilde{\gamma}})$ 为一条 μ 竖曲线, 而且 $\tilde{\gamma}$ 一致收敛于 γ 时, $\psi(\hat{\tilde{\gamma}})$ 一致收敛于 $\psi(\hat{\gamma})$. 这证明了 $\psi(\hat{\gamma})$ 也是一条 μ 竖曲线. 用类似方法, 可对 ψ^{-1} 证明相对应的结果.

定理 4.2.2 设 C^1 映射 $\psi:P\to\mathbf{R}^2$ 是到象集 $\psi(P)$ 的微分同胚, 如果 ψ 对于 $0<\mu<\dfrac{1}{2}$ 满足条件 (I) 和 (III), 那么, 对于 $\nu=\dfrac{\mu}{1-\mu}$, ψ 满足条件 (II), 从而定理 4.2.1 的结论成立.

证 设 $V\subset\bigcup\limits_{j=0}^{N-1}V_j$ 是一条 μ 竖条, 由引理 (4.2.8), ψ 把 $U_k\cap V$ 变成 μ 的竖条: $\widetilde{V_k}=\psi(U_k\cap V)\subset V_k$. 尚需验证关于宽度的要求是否满足. 设 P_0 和 P_1 为 $\widetilde{V_k}$ 的边界竖曲线 $\psi(\hat{\gamma_0})$ 与 $\varphi(\hat{\gamma_1})$ 上有相同纵坐标的两点. 用平行于横轴的线段 $P=p(t)(t\in[0,1])$ 连接这两点

$$p(t)=(1-t)P_0+tP_1, \quad t\in[0,1].$$

由条件 (III$^-$), $\dot{p}(t)=P_1-P_0\in S^-_{p(t)}$ 且对于曲线

$$z(t)=\psi^{-1}(p(t)), \quad t\in[0,1], \quad z(t)=(x(t),y(t))$$

满足 $\dot{z}(t)=d\psi^{-1}(\dot{p}(t))\in S^-_{z(t)}$,

$$|\dot{x}|\geqslant\mu^{-1}|\dot{p}(t)|>0.$$

由于 $\dot{x}(t)$ 对 $t\in[0,1]$ 不变号, 故

$$\begin{aligned}|P_1-P_0| &= \int_0^1|\dot{p}(t)|dt\leqslant\mu\int_0^1|\dot{x}(t)|dt \\ &= \mu|x(1)-x(0)|\leqslant\mu|z(1)-z(0)|.\end{aligned}$$

由于 $z = \psi^{-1}(p(t))$ 是一条 μ 横曲线, $z(0)$ 与 $z(1)$ 分别为该 μ 横曲线与 μ 竖曲线 γ_0 与 γ_1 之交点, 故由推论 4.2.1 可知, $|z(1)-z(0)| \leqslant \dfrac{1}{1-\mu}\theta(v)$, $|P_1 - P_0| \leqslant \dfrac{\mu}{1-\mu}\theta(v)$. 从而对 $\nu = \dfrac{\mu}{1-\mu}$, $\theta(\widetilde{V_k}) \leqslant \nu\theta(V)$. 类似地, 对横条也可证明相应结果, 定理 4.2.2 证毕. □

周建莹 (1981) 在可微同胚条件下, 将 Moser 的条件 (III) 作了改进, 给出了具体的估计性条件.

定理 4.2.3　设 θ 为正方形区域, 其中给定了各不相交的水平条于竖直条各 N 个, 分别记为 U_i 与 $V_i(i=0,1,\cdots,N-1)$, 设可微同胚

$$\psi:\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y), \end{cases} \quad (x,y)\in Q$$

满足 Moser 定理中的条件 (I), 且在 $\bigcup\limits_{i=0}^{N-1} V_i$ 中, ψ 的偏导满足以下条件:

$$(\widetilde{\text{II}})\quad |u_x| \geqslant M, \quad |u_y| \leqslant K, \quad |v_x| \leqslant K|\Delta|, \quad |v_y| \leqslant \alpha|u_y|,$$

其中 M, K, α 为常数, 以下关系成立

$$M - \mu K|\Delta| > \max\left(K\alpha + \frac{K}{\mu}, 1\right),$$
$$M - \mu K > \max\left(K\alpha + \frac{K|\Delta|}{\mu}, |\Delta|\right),$$

这里 Δ 为映射 ψ 的 Jacobi, μ 为条形定义中的常数. 则在 (I), $(\widetilde{\text{II}})$ 条件下, 定理 4.2.1 的结论成立.

上述文献还对二维映射 $\psi: u = f(x,y), v = mx (m \geqslant 1)$ 给出了更为具体的 ψ 以 σ 为子系统的条件, 并用之于研究 Taylor 映射与广义 Taylor 映射的混沌性质.

Moser 定理的条件 (I), (II) 中, 对 μ 横条和 μ 竖条所加的 μ “尺度”及在映射下横条与竖条的“拉细尺度”都是统一的. 如果对横条和竖条的上述尺度改为“双尺度” $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$, Moser 定理的条件可以再减弱, 例如可以证明以下的结果:

定理 4.2.4　设 ψ 为正方形 $Q = [0,1]\times[0,1]$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的 C^1 微分同胚. $0 < \mu_1, \mu_2 < 1, K_1, K_2 > 1$, 且

$$\frac{1}{K_1} + \mu_1\mu_2 < 1, \quad \frac{1}{K_2} + \mu_1\mu_2 < 1.$$

在定理 4.2.2 中将条件 (I) 的 μ 横条改为 μ_2 横条, μ 竖条改为 μ_1 竖条, 条件 (III^+) 的 μ 竖扇形丛改为 μ_1 扇形丛, (III^-) 中 μ 横扇形丛改为 μ_2 扇形丛, 并将相应的 μ^{-1}"拉伸"条件改为 $K_1.K_2$"拉伸"条件, 则定理 4.2.2 中竖条满足压缩率 $\nu_1 = \dfrac{1}{K_1(1-\mu_1\mu_2)}$, 横条满足压缩率 $\nu_2 = \dfrac{1}{K_2(1-\mu_1\mu_2)}$, 因而 ψ 拓扑共轭于 $\sigma : \Sigma(N) \to \Sigma(N)$.

利用定理 4.2.4, 定理 4.2.3 的条件又可进一步改进.

定理 4.2.5 *若定理 4.2.3 中条件 (I) 作类似定理 4.2.4 的改变, 条件 ($\widetilde{\mathrm{II}}$) 改为*

$$|u_x| \geqslant M, \quad |u_y| \leqslant K_1, \quad |v_x| \leqslant K_2, \quad |v_y| \leqslant K_3$$

且

(1) $K_2 + K_3\mu_1 \leqslant \mu_1(M - K_1\mu_1), \quad K_1 + K_3\mu_2 \leqslant \mu_2(M - K_2\mu_2)$;

(2) $\mu_1\mu_2 + \dfrac{1}{M - K_1\mu_1} < 1, \quad \mu_1\mu_2 + \dfrac{|\Delta|}{M - K_2\mu_2} < 1$,

Δ 是 ψ 的 Jacobi, 则定理 4.2.3 的结论成立.

4.3 二维微分同胚的双曲不变集、跟踪引理和 Smale-Birkhoff 定理

为了较直观地理解由映射的横截同宿点产生的混沌动力学, 本节先介绍 1990 年由 Kirchgraber 等所撰写的关于二维映射的综述报告的基本结果. 下节再介绍关于 m 维映射一般的结果.

4.3.1 二维微分同胚的双曲不变集

考虑 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的微分同胚 f. 设 $z \in \mathbf{R}^2$ 是 f 的一个双曲不动点, 即 $f(z) = z$, 且 $Df(z)$ 的谱 $\sigma = \{\Lambda^+, \Lambda^-\}$ 满足 $0 < \Lambda^+ < 1 < \Lambda^-$. 设 E^+ 与 E^- 表示对应于上述二特征值的特征向量. 根据一般的稳定流形存在定理, 在 $\mathbf{R}^2$ 中存在 z 的局部稳定与不稳定流形 $W^+_{\mathrm{loc}}, W^-_{\mathrm{loc}}$, 使得以下性质成立:

(i) $z \in W^\pm_{\mathrm{loc}}$, $W^\pm_{\mathrm{loc}}$ 在 z 点与 $E^\pm$ 相切;

(ii) $W^\pm_{\mathrm{loc}}$ 是不变的, 即 $f^{\pm 1}(W^\pm_{\mathrm{loc}}) \subset W^\pm_{\mathrm{loc}}$;

(iii) $W^\pm_{\mathrm{loc}}$ 包含在 z 的吸引域中, 即 $x^\pm \in W^\pm_{\mathrm{loc}}$, 则 $\lim\limits_{n\to\pm\infty} f^n(x^\pm) = z$;

(iv) 最大性质: 若对一切 $x_0 \in U$ 都有: 对一切 $i \in \pm N$(正负整数集合), $x_i = f^i(x_0) \in U$, 则 $x_0 \in W^\pm_{\mathrm{loc}}$.

我们还要考虑 z 的全局稳定与不稳定流形:

$$W^\pm = \left\{x \in \mathbf{R}^2 \big| \lim_{i\to\pm\infty} f^i(x) = z\right\},$$

并假设它们在某个点 $x_0 \neq z$ 横截地相交.

定义 4.3.1 (双曲不变集)　关于 f 不变的紧集合 $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$ 称为 f 的双曲不变集, 倘若在 Λ 上存在两个向量场, 即两个连续映射:

$$h^+ : x \in \Lambda \to h^+(x) \in \mathbf{R}^2, \quad h^- : x \in \Lambda \to h^-(x) \in \mathbf{R}^2,$$

$h^+(x)$ 和 $h^-(x)$ 关于一切 $x \in \Lambda$ 线性无关, 并满足以下性质:

(a) 向量场 h^+, h^- 关于 Df 不变, 即存在映射 $\lambda^+ : x \in \Lambda \to \lambda^+(x) \in \mathbf{R}$, $\lambda^- : x \in \Lambda \to \lambda^-(x) \in \mathbf{R}$, 使得对一切 $x \in \Lambda$ 满足

$$h^+(f(x)) = \frac{1}{\lambda^+(x)} Df(x)h^+(x),$$

$$h^-(f(x)) = \frac{1}{\lambda^-(x)} Df(x)h^-(x).$$

(b) 映射 f 在 h^+ 方向压缩, 在 h^- 方向扩张, 即存在常数 $\theta \in (0,1), \tau > 1$, 使得对一切 $x \in \Lambda$ 有

$$\frac{1}{\tau} \leqslant |\lambda^+(x)| \leqslant \theta < 1, \quad 1 < \frac{1}{\theta} \leqslant |\lambda^-(x)| \leqslant \tau.$$

显然, 对于 f 的双曲不动点 z, 由于 $Df(z)E^{\pm} = \Lambda^{\pm}E^{\pm}$ 满足上述条件 (a), (b). 因此, 双曲不动点是最简单的双曲不变集, 而更一般的双曲集是双曲不动点的推广.

定义 4.3.2(横截同宿性)　设 f 有双曲不动点 z, 若 $\mathbf{R}^2$ 中两段弧 $\Gamma^- = \{\gamma_-(s) | s \in I_- = (a_-, b_-)\}$ 和 $\Gamma^+ = \{\gamma_+(s) | s \in I_+ = (a_+, b_+)\}$ 满足

$$W^{\pm}_{\mathrm{loc}}(z) \subset \Gamma^{\pm} \subset W^{\pm}(z)$$

以及

(i) 存在 $\sigma_- \in I_-, \sigma_+ \in I_+$, 使得 $\gamma_{\pm}(\sigma_{\pm}) = z$;

(ii) 存在 $s_- \in I_-, s_+ \in I_+, s_{\pm} \neq \sigma_{\pm}$, 使得 $\gamma_-(s_-) = \gamma_+(s_+) = x_0$,

并且 $\gamma'_-(s_-)$ 与 $\gamma'_+(s_+)$ 线性无关, 则点 x_0 称为 f 的横截同宿点 (图 4.3.1), 而由 x_0 产生的 f 轨道 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$, 称为同宿到 z 的横截同宿轨道, 其中 $\mathbf{Z}$ 表示正负自然数集合.

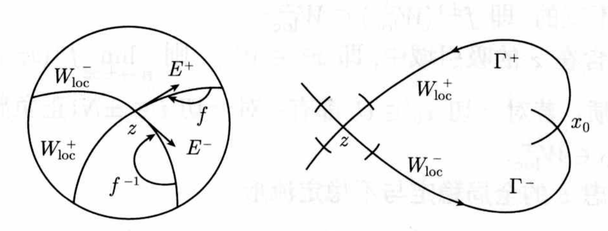


图 4.3.1　f 的稳定流形与不稳定流形的横截同宿点

显然, 横截同宿轨道全由同宿点组成. 因此, 我们说 f 存在一个横截同宿点, 意味着存在无穷多个横截同宿点.

恒假设 $\gamma_\pm : I_\pm \to \mathbf{R}^2$ 是单射, 充分的正则且对一切 $s \in I_\pm, \gamma'_\pm(s) \neq 0$.

引理 4.3.1 设映射 f 存在定义 4.3.2 所述的横截同宿轨道 $\{x_n\}$, 则存在两单位向量集合 e_n^+, e_n^-, $n \in \mathbf{Z}$, 实数 t_n^+, t_n^-, $n \in \mathbf{Z}$ 及三个常数 $N \in \mathbf{N}, \theta_1 \in (0,1), \tau_1 > 1$, 使得以下结论成立:

(i) $e_{n+1}^\pm = \dfrac{1}{t_n^\pm} Df(x_n) e_n^\pm, n \in \mathbf{Z}$;

(ii) $\lim\limits_{n\to-\infty} e_n^- = E^-$, $\lim\limits_{n\to\infty} e_n^+ = E^+$;

(iii) $1 < \dfrac{1}{\theta_1} \leqslant |t_n^-| \leqslant \tau_1$, 倘若 $n < -N$, $\dfrac{1}{\tau_1} \leqslant |t_n^+| \leqslant \theta_1 < 1$, 倘若 $n > N$;

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} e_n^- = E^-$, $\lim\limits_{n\to-\infty} e_n^+ = E^+$;

(v) $1 < \dfrac{1}{\theta_1} \leqslant |t_n^-| \leqslant \tau_1$, 倘若 $n > N$, $\dfrac{1}{\tau_1} \leqslant |t_n^+| \leqslant \theta_1 < 1$, 倘若 $n < -N$.

证 分几步证明. 首先构造 e_n^-(e_n^+ 可类似构造). 因 $x_n \in \Gamma^-, n \leqslant 0$, 因此存在唯一的 $s_n \in I_-$, 使得 $\gamma_-(s_n) = x_n$, 记 $v_n = \gamma'_-(s_n), n \leqslant 0$.

考虑映射

$$F : (s, \varphi) \in I_- \times I_- \to F(s, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(\gamma_-(s)) - \gamma_-(\varphi) \in \mathbf{R}^2.$$

由 $\gamma_\pm : I_\pm \to \mathbf{R}^2$ 是单射的假设, 对给定的 $s \in I_-$ 存在唯一的 $\varphi \in I_-$, 使得 $F(s, \varphi) = 0$, 令 $\varphi(s)$ 表示上述隐函数方程的解. 由于

$$f^{-1}(\gamma_-(s_n)) = f^{-1}(x_n) = x_{n-1} = \gamma_-(s_{n-1}), \quad n \leqslant 0,$$

$$f^{-1}(\gamma_-(\sigma_-)) = f^{-1}(z) = z = \gamma_-(\sigma_-).$$

因此, $\varphi(s_n) = s_{n-1}$, $\varphi(\sigma_-) = \sigma_-$. 又因 $F_\varphi(s, \varphi) = -\gamma'_-(\varphi) \neq 0$, 根据隐函数定理, $\varphi(s) \in C^1$, 并且

$$Df^{-1}(\gamma_-(s))\gamma'_-(s) = \varphi'(s)\gamma'_-(\varphi(s)). \tag{4.3.1}$$

因 Df^{-1} 非奇异, $\gamma' \neq 0$, 故 $\varphi'(s) \neq 0$, 在 (4.3.1) 式中令 $s = s_{n+1}$, 注意到 $Df(x_n)Df^{-1}(x_{n+1}) = I$. 因此有

$$v_{n+1} = \frac{1}{1/\varphi'(s_{n+1})} Df(x_n) v_n, \quad n < 0. \tag{4.3.2}$$

又在 (4.3.1) 式中令 $s = \sigma_-$, 得到

$$Df(z)\gamma'_-(\sigma_-) = \frac{1}{\varphi'(\sigma_-)}\gamma'_-(\sigma_-).$$

因此, $1/\varphi'(\sigma_-)$ 是 $Df(z)$ 的一个特征值, $\gamma'_-(\sigma_-)$ 是一个特征向量. 可以证明, $|\varphi'(\sigma_-)| \leqslant 1$. 我们先证当 $n \to -\infty$ 时, $s_n \to \sigma_-$. 由于序列 $\{s_n\}$ 是有界的, 故只需证 σ_- 是该序列的唯一极限点. 为此, 设 $\lim\limits_{j\to-\infty} s_{n_j} = s^*, \{s_{n_j}\}$ 为 $\{s_n\}$ 的某收敛子序列. 于是

$$\gamma(s^*) = \lim_{j\to-\infty} \gamma(s_{n_j}) = \lim_{j\to-\infty} x_{n_j} = z = \gamma(\sigma_-).$$

由 $\gamma^{\pm}(s)$ 的单射性可知, $s^* = \sigma_-$. 既然 $\lim\limits_{n\to-\infty} s_n = \sigma_-$, 故在 σ_- 任何邻域 U, 存在 $N \in \mathbf{N}$, 使得对一切 $n < -N, s_n \in U$. 现用反证法, 假设 $|\varphi'(\sigma_-)| > 1$, 则由映射 φ 在 σ_- 的不稳定性, 存在 σ_- 的邻域 U 使得对给定的 $\widetilde{s} \in U - \{\sigma_-\}$, 存在数 $\widetilde{N} \in \mathbf{N}$, 使得 $\varphi^{\widetilde{N}}(\widetilde{s}) \notin U$. 特别, 取 $\widetilde{s} = s_{n^*}$, 于是 $\varphi^k(s_{n^*}) = s_{n^*-k}$, 当 $k \to \infty$ 时, $s_{n^*-k} \notin U$, 这与上述 $\lim\limits_{n\to-\infty} s_n = \sigma_-$ 矛盾.

综合以上讨论可知, $(1/\varphi'(\sigma_-)) \geqslant 1$ 且 $(1/\varphi'(\sigma_-)) = \lambda^-$. 因为 $(1/\varphi'(\sigma_-))$ 是 $Df(z)$ 的一个特征值, 并且 $\gamma'_-(\sigma_-)$ 平行于 E^-, 由 $\lim\limits_{n\to-\infty} s_n = \sigma_-$ 可知

$$\lim_{n\to-\infty} v_n = \lim_{n\to-\infty} \gamma'_-(s_n) = \gamma'_-(\sigma_-) = \nu E^-, \tag{4.3.3}$$

其中 ν 为某个适当常数. 对 $n \leqslant 0$, 令 $e_n^- = \mathrm{sign}\nu v_n/|v_n|$, 并定义

$$e_{n+1}^- = \pm\frac{Df(x_n)e_n^-}{|Df(x_n)e_n^-|}, \quad n \leqslant 0. \tag{4.3.4}$$

(4.3.4) 右边的符号后面再确定.

注意到 (4.3.2) 与 (4.3.4), 若取 $t_n^- = |Df(x_n)e_n^-|$, 则引理中结论 (i) 成立. 另一方面, 由 (4.3.3) 可推导引理中结论 (ii). 为证引理中结论 (iii), 应用性质 (i) 和 (ii), 可得

$$\lim_{n\to-\infty} |t_n^-| = \lim_{n\to-\infty} |Df(x_n)e_n^-| = |Df(z)E^-| = \Lambda^-.$$

故 (iii) 成立.

为证明引理 4.3.1 中的结论 (iv) 与 (v), 首先需证明以下的 λ 引理或倾角引理. 对 $n \geqslant 0$ 考虑满足关系 $v_{n+1} = Df(x_n)v_n$ 的向量 v_n 的序列, 其中 v_0 在 x_0 横截于 Γ^+, 即 v_0 与 $\gamma'_+(s_+)$ 线性无关. 由 $\Gamma^{\pm}$ 关于 $f^{\pm1}$ 的不变性及 $Df(x_n)$ 的可逆性可知, 对一切 $n \geqslant 0$, v_n 在 x_n 横截于 Γ^+.

引理 4.3.2(λ 引理) 当 $n \to \infty$ 时, v_n 的方向收敛于 Γ^- 在 z 点的切向 (类似地, 当 $n \to -\infty$ 时, v_n 的方向收敛于 Γ^+ 在 z 点的切向).

证 不失一般性, 设 $z = 0, \sigma_{\pm} = 0, \gamma'_-(0) = (1,0)^T, \gamma'_+(0) = (0,1)^T$ 并设 $x = (u,v)^T$. 在原点的某充分小邻域考虑 $\Gamma^{\pm}$, 并用 $\Gamma^{\pm}_{\mathrm{loc}}$ 表示 $\Gamma^{\pm}$ 在该邻域的限制. 根据隐函数定理, $\Gamma^{\pm}_{\mathrm{loc}}$ 有以下的参数表示:

$$\Gamma_{\rm loc}^{-}=\{(u,s^{-}(u))|\,|u|<\sigma\},\quad \Gamma_{\rm loc}^{+}=\{(s^{+}(v),v)|\,|v|<\sigma\},$$

其中 σ 为某个小常数, $s^{\pm}$ 满足 $s^{-}(0)=\dfrac{ds^{-}(0)}{du}=0$ 与 $s^{+}(0)=\dfrac{ds^{+}(0)}{dv}=0$. 作坐标变换

$$\widetilde{x}=U(x)=\begin{pmatrix}u-s^{+}(v)\\ v-s^{-}(u)\end{pmatrix},$$

使得 $\Gamma_{\rm loc}^{\pm}$ 成为坐标轴, 显然 $U(0)=0, DU(0)=I$. 从而 U 确实定义了原点邻域的一个坐标变换且 $\Gamma_{\rm loc}^{\pm}$ 分别由 $\overline{v}=0$ 及 $\overline{u}=0$ 来描述. 为简化记号. 再次用 u,v 表示新坐标. 于是在新坐标下, f 具有以下表达式:

$$f(x)=\begin{pmatrix}\Lambda^{-}u+u\hat{g}(u,v)\\ \Lambda^{+}v+v\hat{h}(u,v)\end{pmatrix},$$

其中 $\hat{g}(0,0)=\hat{h}(0,0)=0$. 因此

$$Df(x)=\begin{pmatrix}\Lambda^{-}+\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21} & \Lambda^{+}+\varepsilon_{22}\end{pmatrix},$$

其中

$$\varepsilon_{11}=\hat{g}(u,v)+u\partial_{u}\hat{g}(u,v),\quad \varepsilon_{12}=u\partial_{v}\hat{g}(u,v),$$

$$\varepsilon_{21}=v\partial_{u}\hat{h}(u,v),\quad \varepsilon_{22}=\hat{h}(u,v)+v\partial_{v}\hat{h}(u,v).$$

显然, $\varepsilon_{12}(0,v)=\varepsilon_{21}(u,0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_{ij}(x)=0$.

令 $V_r=\{(u,v)|\,|u|<r,|v|<r\}$ 为 $x=0$ 的一个小邻域, $r>0$ 充分小, 使得

$$|\varepsilon_{ij}(x)|<K_1=\min\left(\frac{1}{2}[\Lambda^{-}-1],\frac{1}{2}[1-\Lambda^{+}]\right),\quad x\in V_r.$$

于是存在

$$\mu=\min_{x\in V_r}(\Lambda^{-}+\varepsilon_{11})\geqslant\Lambda^{-}-\max_{x\in V_r}|\varepsilon_{11}|\geqslant\frac{1}{2}[\Lambda^{-}+1]>1,$$

$$\Lambda=\max_{x\in V_r}(\Lambda^{+}+\varepsilon_{22})\leqslant\Lambda^{+}+\max_{x\in V_r}|\varepsilon_{22}|\leqslant\frac{1}{2}[\Lambda^{+}+1]<1.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 故存在 m, 使得对一切 $n\geqslant m, x_n\in\Gamma_{\rm loc}^{+}$. 考虑满足 $n\geqslant m$ 的 v_n 并引入记号

$$v_n=\begin{pmatrix}v_n^{-}\\ v_n^{+}\end{pmatrix},\quad \theta_n=\frac{|v_n^{+}|}{|v_n^{-}|},\quad \varepsilon_{ij}^{n}=\varepsilon_{ij}(x_n).$$

因为 v_n 横截 $u=0$, 故 $v_n^{-}\neq 0$. 从 $v_{n+1}=Df(x_n)v_n$ 可得

$$v_{n+1}^{-} = (\Lambda^{-} + \varepsilon_{11}^{n})v_n^{-} + \varepsilon_{12}^{n} v_n^{+},$$

$$v_{n+1}^{+} = \varepsilon_{21}^{n} v_n^{-} + (\Lambda^{+} + \varepsilon_{22}^{n}) v_n^{+}.$$

注意到 $u_n = 0$, 故 $\varepsilon_{12}^{n} = 0$, 从而

$$|v_{n+1}^{-}| \geqslant |\Lambda^{-} + \varepsilon_{11}^{n}||v_n^{-}| - |\varepsilon_{12}^{n}||v_n^{+}| \geqslant \mu |v_n^{-}|,$$

$$|v_{n+1}^{+}| \leqslant |\varepsilon_{21}^{n}||v_n^{-}| + \lambda |v_n^{+}| \leqslant (|\varepsilon_{21}^{n}| + \lambda\theta_n)|v_n^{-}|.$$

由 $(1/\mu) < 1$ 及设 $\sigma = (\lambda/\mu) < 1$ 可得

$$\theta_{n+1} \leqslant |\varepsilon_{21}^{n}| + \sigma\theta_n. \tag{4.3.5}$$

上式对一切 $n > m'$ ($m' > m$ 充分大) 都成立. 因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} |\varepsilon_{21}^{n}| = 0$, 从而 (4.3.5) 意味着 $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = 0$, 即 $v_n^{+} \to 0$, 本引理证毕. □

λ 引理说明, 当 f 存在横截同宿点时, f 的双曲不动点的稳定流形与不稳定流形存在着复杂的同宿缠结 (homoclinic tangle) 现象, 见图 4.3.2.

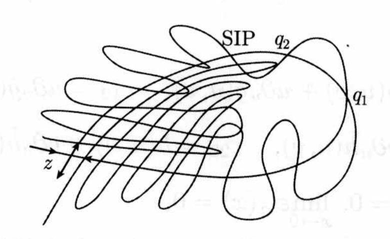


图 4.3.2 稳定流形与不稳定流形复杂的缠结

引理 4.3.1 续证 根据 Γ^{+} 与 Γ^{-} 在 x_0 横截性的假设以及 λ 引理, 当 $n \to \infty$ 时, e_n^{-} 的方向收敛于 E^{-} 的方向, 注意 e_n^{-} 与 E^{-} 都是单位向量, 因此, (4.3.4) 所定义的 e_n^{-} 的符号可选择得使 $n > 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} e_n^{-} = E^{-}$. 即引理 4.3.1 中结论 (iv) 成立.

为证 (v), 由结论 (i) 有

$$\lim_{n\to\infty} |t_n^{-}| = \lim_{n\to\infty} |Df(x_n)e_n^{-}| = |Df(z)E^{-}| = \Lambda^{-}.$$

从而 (v) 正确, 引理 4.3.1 证毕. □

引理 4.3.3 *在引理 4.3.1 的条件下, 存在两向量集合 $h_n^{+}, h_n^{-}, n \in \mathbf{Z}, h_n^{+}$ 与 h_n^{-} 线性无关, 并存在实数 $\lambda_n^{+}, \lambda_n^{-}$ 和正常数 $\theta_2 \in (0,1), \tau_2 > 1$, 使得以下结论成立:*

(a) $h_{n+1}^{\pm} = \dfrac{1}{\lambda_n^{\pm}} Df(x_n) h_n^{\pm}, n \in \mathbf{Z};$

(b) $\lim\limits_{n\to\pm\infty} h_n^- = E^-, \lim\limits_{n\to\pm\infty} h_n^+ = E^+$;

(c) $\dfrac{1}{\tau_2} \leqslant |\lambda_n^+| \leqslant \theta_2 < 1, 1 < \dfrac{1}{\theta_2} \leqslant |\lambda_n^-| \leqslant \tau_2, n \in \mathbf{Z}$.

证 证明的基本思想是对充分大的 $|n|$, 令 $h_n^\pm = e_n^\pm$, 并对有限多个 $e_n^\pm$, 改变其长度. 兹对 e_n^+ 给出这种构造方法. 记 $Q(n) = \prod\limits_{i=-n}^{n} |t_i^+|$. 设 N 为引理 4.3.1 中给定的正整数 N, 则存在 $M \geqslant N$, 使得

$$Q(M) = \prod_{i=-M}^{M} |t_i^+| \leqslant Q(N)\theta_1^{2(M-N)} < 1.$$

设 $\theta^+ = Q(M)^{1/(2M+1)} < 1$. 定义

$$d_n^+ = \begin{cases} 1, & \text{若 } n \leqslant -M \text{ 或 } n > M, \\ \dfrac{t_{n-1}^+ d_{n-1}^+}{\theta^+}, & \text{若 } -M < n \leqslant M. \end{cases}$$

并对一切 $n \in \mathbf{Z}$ 定义 $h_n^+ = d_n^+ e_n^+$. 于是, 取 $\lambda_n^+ = t_n^+ d_n^+ / d_{n+1}^+$, 则显然有

$$h_{n+1}^+ = \frac{1}{\lambda_n^+} Df(x_n) h_n^+.$$

不难看出

$$|\lambda_n^+| = \begin{cases} \theta^+, & \text{若 } |n| \leqslant M, \\ |t_n^+|, & \text{若 } |n| > M. \end{cases}$$

从而引理证毕. □

定理 4.3.1 *在引理 4.3.1 的假设下, 集合*

$$\Lambda = \{z\} \cup \{x_n | n \in \mathbf{Z}\}$$

是 f 的双曲不变集, 其中 $\{x_n\}$ 是 f 的横截同宿轨道.

证 Λ 显然有界, 且 z 是唯一的凝聚点, 故 Λ 为闭集, 从而 Λ 紧. Λ 为两条轨道的并集, 故是 f 的不变集. 用引理 4.3.3 定义向量场 h^+, h^-:

$$h^+(x_n) = h_n^+, \quad h^-(x_n) = h_n^-, \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$h^+(z) = E^+, \quad h^-(z) = E^-,$$

其中 E^-, E^+ 为双曲不动点 z 的单位特征向量. 向量 h_n^+ 与 h_n^- 线性无关, 同样, E^+, E^- 也线性无关. 兹讨论 h^+, h^- 的连续性. 这只需要考虑在 Λ 的聚点 z 的情

况. 但由引理 4.3.3 的性质 (b), 在这点, 连续性保持. 以下定义映射 λ^+, λ^-. 由引理 4.3.3 设

$$\lambda^+(x_n) = \lambda_n^+, \quad \lambda^-(x_n) = \lambda_n^-,$$

$$\lambda^+(z) = \Lambda^+, \quad \lambda^-(z) = \Lambda^-.$$

Λ^+, Λ^- 为 $Df(x)$ 的两特征向量. 再利用引理 4.3.3 可知, Λ 是双曲不变集, 定理证毕. □

4.3.2 跟踪引理

设 $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 是微分同胚, Λ 为 f 的双曲不变集.

定义 4.3.3 *若双边无穷序列 $q = \{q_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 的每个元 $q_n \in \Lambda$, 称 q 为 f 的伪轨 (pseudo orbit). 伪轨 q 称为 f 的 ε 伪轨, 倘若对一切 $n \in \mathbf{Z}, |q_{n+1} - f(q_n)| \leqslant \varepsilon$.*

显然 ε 伪轨是 f 的近似轨道. 本节主要介绍以下定理:

定理 4.3.2 (跟踪引理) *设 f 有双曲不变集 Λ, 则存在 $\rho_0 > 0$ 使得对 $\rho \in (0, \rho_0)$, 下述结论正确: 存在 $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$, 使得每个 ε 伪轨 $q = \{q_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 都有唯一的 ρ 跟踪轨道. 换言之, 存在 f 的真正轨道 $p = \{p_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$, 使得对一切 $n \in \mathbf{Z}$, $|p_n - q_n| \leqslant \rho$.*

为证上述定理, 需要做一些准备工作.

考虑有界的双边无穷序列

$$\{x = \{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}} | x_n \in \mathbf{R}^2, \sup_{n\in\mathbf{Z}} |x_n| < \infty\}$$

所构成的空间 X, 用 $|\cdot|$ 表示 $\mathbf{R}^2$ 中最大模, 则在范数 $\|x\| = \sup\limits_{n\in\mathbf{Z}} |x_n|$ 下, X 构成 Banach 空间.

对数 $\theta \in (0,1), \tau > 1$, 设已知满足以下条件的实数序列 $\lambda_n^+, \lambda_n^-, n \in \mathbf{Z}$:

$$\frac{1}{\tau} \leqslant |\lambda_n^+| \leqslant \theta < 1, \quad 1 < \frac{1}{\theta} \leqslant |\lambda_n^-| \leqslant \tau.$$

记 $A_n = \mathrm{diag}(\lambda_n^+, \lambda_n^-)$. 兹用

$$(Lx)_n = x_{n+1} - A_n x_n$$

引入算子 $L: X \to X$.

引理 4.3.4 *L 是 X 到自己的线性同胚, 且*

$$\|L^{-1}x\| \leqslant \frac{1}{1-\theta} \|x\|.$$

证 显然, L 是有界线性算子, 即它是连续的. 为证 L 为单射, 只需证 $Lx = 0$ 隐含着 $x = 0$ 即可. 设 $x_n = \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix}$, 则 $Lx = 0$, 即

$$r_{n+1} = \lambda_n^+ r_n, \quad s_{n+1} = \lambda_n^- s_n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

于是有

$$r_n = \frac{1}{\lambda_n^+ \lambda_{n+1}^+ \cdots \lambda_{-1}^+} r_0, \quad n < 0,$$

$$s_n = \lambda_{n-1}^- \lambda_{n-2}^- \cdots \lambda_0^- s_0, \quad n > 0.$$

注意到 $\lambda_n^\pm$ 的估计式, 得到

$$|r_n| \geqslant \frac{|r_0|}{\theta^{|n|}}, \quad n < 0, \quad |s_n| \geqslant \frac{|s_0|}{\theta^n}, \quad n > 0.$$

上式说明 $\lim\limits_{n\to-\infty} |r_n| = \infty, \lim\limits_{n\to\infty} |s_n| = \infty$, 除非 $r_0 = s_0 = 0$, 这就证明了 $x = 0$.

往证 L 为 X 到自己的满射. 设 $g \in X$ 已给定, 考虑方程 $Lx = g$, 即

$$x_{n+1} - A_n x_n = g_n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

记 $x_n = \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix}, g_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$. 于是级数

$$\begin{cases} r_n = \alpha_{n-1} + \lambda_{n-1}^+ \alpha_{n-2} + \lambda_{n-1}^+ \lambda_{n-2}^+ \alpha_{n-3} + \cdots, \\ s_n = -\dfrac{\beta_n}{\lambda_n^-} - \dfrac{\beta_{n+1}}{\lambda_n^- \lambda_{n+1}^-} - \dfrac{\beta_{n+2}}{\lambda_n^- \lambda_{n+1}^- \lambda_{n+2}^-} - \cdots, \end{cases} \quad n \in \mathbf{Z}$$

收敛, 因为 $|r_n|, |s_n| \leqslant (1/(1-\theta))\|g\|$, 并满足上述差分方程. 这就证明了 L 是满射. 因此, L^{-1} 有定义, 并由上面的公式明显地确定. 由此可见, L^{-1} 是线性的, 并满足引理中所述的有界条件, 引理证毕. □

在证跟踪定理前, 我们对双曲集再作一些讨论. 对 f 的双曲不变集 Λ, 应用向量场 h^+, h^-, 定义一个 2×2 矩阵场 T 如下:

$$T : x \in \Lambda \to T(x) = (h^+(x), h^-(x)) \in GL(2).$$

引理 4.3.5 (i) 对一切 $x \in \Lambda, T(x)$ 的逆映射 $T^{-1}(x)$ 存在, 且存在常数 $\tau_3 > 0$, 使得对一切 $x \in \Lambda, |T(x)| < \tau_3, |T^{-1}(x)| < \tau_3$. 对任给的 $\varepsilon > 0$, 记 $\delta(\varepsilon) = \sup\{|T^{-1}(x) - T^{-1}(\widetilde{x})|, (x, \widetilde{x}) \in \Lambda, |x - \widetilde{x}| < \varepsilon\}$, 则 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \delta(\varepsilon) = 0$.

(ii) 对一切 $x \in \Lambda$, 记 $A(x) = T^{-1}(f(x))Df(x)T(x)$, 则

$$A(x) = \operatorname{diag}(\lambda^+(x), \lambda^-(x)).$$

证 由于 $h^+(x)$ 与 $h^-(x)$ 线性无关, 故对一切 $x \in \Lambda, \Delta(x) = \det(h^+(x), h^-(x)) \neq 0$. 因此, $T^{-1}(x)$ 必存在. 因 h^+, h^- 连续, 故 $T(x), \Delta(x), T^{-1}(x)$ 亦连续. 又因 Λ

是紧不变集, 从而 T 与 T^{-1} 有界. δ 是连续函数 T^{-1} 的连续性模, 再由 Λ 的紧性, 可得 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=0$.

引理的结论 (ii) 可由引理 4.3.3 中向量场 h^+, h^- 的不变性质 (a) 推出. 引理证毕. □

定理 4.3.2 的证明 我们分四步证明此定理.

(1) 设 $\rho_0 \leqslant 1$. 存在映射

$$\widetilde{f}:(\xi,\eta)\in\Lambda\times\{\eta|\eta\in\mathbf{R}^2,|\eta|\leqslant 1\}\to\widetilde{f}(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^2$$

及正常数 c, 使得

$$f(\xi+\eta)=f(\xi)+Df(\xi)\eta+\widetilde{f}(\xi,\eta)$$

并且

$$|Df(\xi)|\leqslant c,\quad |\widetilde{f}(\xi,\eta)|\leqslant c|\eta|^2,\quad |D_\eta\widetilde{f}(\xi,\eta)|\leqslant c|\eta|,$$

这里 D_η 表示关于 η 的导数.

(2) 设 $q=\{q_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是一 ε 伪轨, 由定义知 $q_n\in\Lambda, n\in\mathbf{Z}$. 引入如下记号:

$$\begin{aligned}&\overline{q}_{n+1}=f(q_n),\quad T_n=T(q_n),\quad \overline{T}_{n+1}=T(\overline{q}_{n+1}),\\&A_n=\overline{T}_{n+1}^{-1}Df(q_n)T_n=\mathrm{diag}(\lambda_n^+,\lambda_n^-),\quad \lambda_n^\pm=\lambda_n^\pm(q_n).\end{aligned}$$

兹证 q 具有 ρ 跟踪轨道, 当且仅当存在序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 满足:

(a) $|T_nx_n|\leqslant\rho$;

(b) $x_{n+1}-A_nx_n=g_n(T_nx_n)$, 其中 $g_n(x)=T_{n+1}^{-1}(\overline{q}_{n+1}-q_{n+1})+(T_{n+1}^{-1}-\overline{T}_{n+1}^{-1})Df(q_n)x+T_{n+1}^{-1}\widetilde{f}(q_n,x)$.

先设 p 为 q 的唯一 ρ 跟踪轨道, 用等式 $p_n=q_n+T_nx_n$ 定义 x_n. 显然条件 (a) 成立. 从 $p_{n+1}=f(p_n)$ 得

$$q_{n+1}+T_{n+1}x_{n+1}=f(q_n+T_nx_n)=\overline{q}_{n+1}+Df(q_n)T_nx_n+\widetilde{f}(q_n,T_nx_n).$$

上式两边作用 T_{n+1}^{-1} 即得关系 (b).

反之, 若存在 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 满足 (a), (b), 易证 $\{p_n\}_{n\in\mathbf{Z}}, p_n=q_n+T_nx_n$ 是 q 的 ρ 跟踪轨道, 故上述结论正确.

注意, 以下估计式成立: 对一切 $|x|\leqslant\rho$,

$$|g_n(x)|\leqslant\tau_3\varepsilon+\delta(\varepsilon)c\rho+\tau_3c\rho^2,\tag{4.3.6}$$

$$|Dg_n(x)|\leqslant\delta(\varepsilon)c+\tau_3c\rho.\tag{4.3.7}$$

(3) 对 (2) 中给定的矩阵 $A_n, n \in \mathbf{Z}$, 定义算子 $L: X \to X$, L 由引理 4.3.4 确定, 并引入算子 $T: X \to X$ 定义为 $(Tx)_n = T_n x_n$, T 仍然是映射 X 到自己的线性同胚, 并且对 $x \in X$ 有

$$\|Tx\| \leqslant \tau_3 \|x\|.$$

最后, 再引入一个非线性算子 $G: B_1 = \{x | x \in X, \|x\| \leqslant 1\} \to X$. 其定义是 $(G(x))_n = g_n(x_n)$.

记 $\alpha = (1-\theta)/2\tau_3$. 先证以下关于 G 的引理.

引理 4.3.6 *存在 $\rho_0 \leqslant 1$, 使得对给定的 $\rho \in (0, \rho_0)$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得下述估计式成立: 当 $v, \overline{v} \in B_\rho = \{x | x \in X, \|x\| \leqslant \rho\}$ 时,*

$$\|G(v) - G(\overline{v})\| \leqslant \alpha \|v - \overline{v}\|, \tag{4.3.8}$$

$$\|G(0)\| \leqslant \alpha\rho. \tag{4.3.9}$$

证 由于 $|v|, |\overline{v}| \leqslant \rho$, 由 (4.3.7) 式可见

$$\begin{aligned}\|(G(v))_n - (G(\overline{v}))_n\| &= |g_n(v_n) - g_n(\overline{v}_n)| \\ &\leqslant \sup_{\|x\| \leqslant \rho_0} |Dg_n(x)| \cdot \|v_n - \overline{v}_n\| \\ &\leqslant (\delta(\varepsilon)c + \tau_3 c \rho_0)\|v - \overline{v}\|.\end{aligned}$$

故

$$\|G(v) - G(\overline{v})\| \leqslant (\delta(\varepsilon)c + \tau_3 c\rho_0)\|v - \overline{v}\|.$$

选取 $\rho_0 \leqslant 1, \varepsilon_0 > 0$ 小得足以满足 $\tau_3 c \rho_0 < \alpha/2, \delta(\varepsilon_0)c < \alpha/2$. 由于 $\delta(\varepsilon)$ 随 ε 而单减, 故若 $\rho \in (0, \rho_0), \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, 则 (4.3.8) 成立. 注意到 (4.3.6), 故有 $|g_n(0)| \leqslant \tau_3 \varepsilon$ 即 $\|G(0)\| \leqslant \tau_3\varepsilon$. 从而对给定的 $\rho \in (0, \rho_0)$, 存在 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ 使得 (4.3.9) 成立, 引理证毕. □

现在假设 ρ, ε 已按引理 4.3.6 所选取, 再引入一个算子 $F: B_\rho \to X$, 定义为

$$F(v) = TL^{-1}G(v).$$

我们回到跟踪引理的第四步证明:

(4) 兹证: q 有 ρ 跟踪轨道, 当且仅当 F 有不动点. 事实上, 若 q 存在 ρ 跟踪, 则存在 $x \in X$, 满足第 (2) 步证明中的条件 (a), (b). 令 $v = Tx$, 显然有 $v \in B_\rho$ 且 $Lx = G(v)$. 这说明 $x = L^{-1}G(v)$, 从而 $v = Tx = TL^{-1}G(v) = F(v)$.

反之, 设 $v \in B_\rho$ 是 F 的不动点, 令 $x = T^{-1}v$. 显然, $\|Tx\| \leqslant \rho$; 此外, $v = TL^{-1}G(v)$ 成立, 即 $x = L^{-1}G(Tx)$ 或 $Lx = G(Tx)$.

最后, 我们证明 F 在 B_ρ 是压缩的, 事实上, 对于一切 $v, \overline{v} \in B_\rho$,

$$\begin{aligned}\|F(v) - F(\overline{v})\| &= \|TL^{-1}G(v) - TL^{-1}G(\overline{v})\| \\ &\leqslant \tau_3 \frac{1}{1-\theta}\alpha\|v - \overline{v}\| = \frac{1}{2}\|v - \overline{v}\|\end{aligned}$$

并且

$$\|F(v)\| \leqslant \|F(0)\| + \|F(v) - F(0)\| \leqslant \tau_3 \frac{1}{1-\theta}\alpha\rho + \frac{1}{2}\rho = \rho.$$

因而 F 的不动点唯一存在, 定理证毕.

4.3.3 Smale-Birkhoff 定理与混沌运动

继续考虑微分同胚 $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. 设 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是 f 的同宿到双曲不动点 z 的横截同宿轨道, 因而存在双曲不变集 $\Lambda = \{z\} \cup \{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$. 现取 $\rho \in (0, \rho_0)$, 使得 $\rho < \dfrac{1}{3}|x_0 - z|$, 并按照跟踪引理选择好 ε 的尺度. 我们将要描述一类 ε 伪轨. 由于 $\lim\limits_{n\to\pm\infty} x_n = z$, 故可找到 $N \in \mathbf{N}$ 使得

$$Q_1 = z, x_{-N}, x_{-N+1}, \cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots, x_N, z$$

(总计 $m = 2N + 3$ 个点) 是 f 的 ε 伪轨中的一节. 此外, 设

$$Q_0 = z, z, z, \cdots, z, z, z, \cdots, z, z \text{ (共 } m = 2N + 3 \text{ 个 } z).$$

用 Σ 表示由 0 与 1 两个符号构成的双边无穷序列的空间. 对一个给定的双边无穷序列 $s = (\cdots, s_{-1}; s_0, \cdots)$, 相应地考虑一个 ε 伪轨 q_s, 其定义为

$$q_s = (\cdots Q_{s_{-2}} Q_{s_{-1}}; Q_{s_0} Q_{s_1} \cdots).$$

用 $p = \{p_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 表示 q_s 的唯一的 ρ 跟踪轨道. 定义映射:

$$h: s \in \Sigma \to h(s) = p_{N+1} \in \mathbf{R}^2.$$

用 σ 表示 Σ 上的移位映射, 在 Σ 上定义了移位的系统称符号动力系统或 Bernoulli 系统.

下面的定理是非常重要的.

定理 4.3.3 (Smale-Birkhoff 定理) (i) *f 的 m 次迭代 f^m 以 Bernoulli 系统作为其子系统, 换言之, 存在 Σ 到集合 $S = h(\Sigma) \subset \mathbf{R}^2$ 的同胚 h, 使得 $f^m \circ h(s) = h \circ \sigma(s), s \in \Sigma$.*

(ii) 存在 $\rho > 0$ 使得以下的结论成立:

(a) 若 $s_0 = 0$, 有 $|h(s) - z| \leqslant \rho$; 若 $s_0 = 1$, 则 $|h(s) - z| \geqslant 2\rho$.

(b) 若 $s_i = s_{i+1} = 0$, 则对一切 $n \in [im, (i+2)m]$, 有 $|\rho_n - z| \leqslant \rho$.

(iii) f^m 在集合 S 上的限制定义了一个具有以下性质的混沌动力系统:

(a) 周期点是稠的;

(b) f^m 是拓扑传递的;

(c) f^m 在集合 S 上关于初始条件具有敏感依赖性, 即存在 $\Delta > 0$ 使得对任何给定的 $p \in S$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $p_0 \in S$ 及 $n \in \mathbf{N}$, 使得虽然 $|p - p_0| < \varepsilon$, 但 $|f^{mn}(p) - f^{mn}(p_0)| \geqslant \Delta$.

证 对 Bernoulli 系统 (Σ, σ) 定义距离为

$$d(s,t) = \max\{2^{-|j|}, j \in \mathbf{Z}, s_j \neq t_j\}.$$

于是若 $|i| \leqslant n \in \mathbf{N}$ 时, $s, t \in \Sigma$ 满足 $s_i = t_i$, 则 $d(s,t) \leqslant 1/2^{n+1}$, 反之亦真. Σ 是紧度量空间, 集合

$$\Sigma_0 = \{s \in \Sigma | s_0 = 0\}, \quad \Sigma_1 = \{s \in \Sigma | s_0 = 1\}$$

是既开又闭的紧的集合, 且 $\Sigma_0 \cup \Sigma_1 = \Sigma$.

先证结论 (i). 设 $s' = \sigma(s)$,

$$q_s = (\cdots Q_{s_{-1}}; Q_{s_0} Q_{s_1} \cdots), \quad q_{s'} = (\cdots Q_{s_0}; Q_{s_1} Q_{s_2} \cdots).$$

用 $\{p_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 表示 q_s 的 ρ 跟踪轨道. 由 Q_0 与 Q_1 的定义可见, $\{p_{(n+m)}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是 $q_{\sigma(s)}$ 的 ρ 跟踪轨道. 由于 ε 伪轨的 ρ 跟踪轨道是唯一的. 故若 $h(s) = p_{N+1}$, 则 $h(\sigma(s)) = p_{N+1+m}$. 另一方面 $f^m(p_{N+1}) = p_{N+1+m}$. 因此 $f^m \circ h(s) = h \circ \sigma(s)$ 正确.

以下证 h 是同胚. 为此, 先证 h 是单射. 设 $s \neq \widetilde{s}$, 则存在 $k \in \mathbf{Z}$, 使 $s_k \neq \widetilde{s}_k$, 从而 ε 伪轨 q_s 与 $q_{\widetilde{s}}$ 的节 Q_{s_k} 与 $Q_{\widetilde{s}_k}$ 不相同. 设 $s_k = 0$, $\widetilde{s}_k = 1$, 于是存在 $j \in \mathbf{Z}$, 使得 $(q_s)_j = z$, $(q_{\widetilde{s}})_j = x_0$. 用 $p, \widetilde{p}$ 分别表示 q_s, $q_{\widetilde{s}}$ 的 ρ 跟踪轨道, 由于 $\rho \leqslant \dfrac{1}{3}|x_0 - z|$, 故 $|p_j - \widetilde{p}_j| \geqslant \dfrac{1}{3}|x_0 - z|$, 即 $p_j \neq \widetilde{p}_j$. 因此, $p_{N+1} \neq \widetilde{p}_{N+1}$. 这说明 h 是单射.

再证 h 的连续性. 令 $\{s^k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 是 Σ 中收敛于 s 的元素序列, q^k 与 q 是 s^k 与 s 所对应的伪轨. 设 p^k 与 p 是相应的 ρ 跟踪轨道. 需证 $\lim\limits_{k\to\infty} p^k_{N+1} = p_{N+1}$. 由跟踪轨道定义, $|p^k_{N+1} - q^k_{N+1}| \leqslant \rho$, $q^k_{N+1} = z$ 或 $q^k_{N+1} = x_0$. 对于一切 $k \in \mathbf{Z}$, 序列 $\{p^k_{N+1}\}$ 有界. 若能证明 p_{N+1} 是 $\{p^k_{N+1}\}_{k\in\mathbf{N}}$ 的唯一极限点, 则上述结论成立. 为此, 用 $\hat{p}_{N+1}$ 表示 $\{p^k_{N+1}\}_{k\in\mathbf{N}}$ 的唯一极限点, 即存在序列 $\{p^{k_i}_{N+1}\}_{i\in\mathbf{N}}$ 满足 $\hat{p}_{N+1} = \lim\limits_{i\to\infty} p^{k_i}_{N+1}$. 考虑 $\hat{p}_{N+1+n} = f^n(\hat{p}_{N+1}), n \in \mathbf{N}$. 兹证, 对一切 $n \in \mathbf{N}$, $|\hat{p}_{N+1+n} - q_{N+1+n}| \leqslant \rho$. 事实上

$$\begin{aligned}|\hat{p}_{N+1+n} - q_{N+1+n}| \leqslant &|\hat{p}_{N+1+n} - p^{k_i}_{N+1+n}| \\ &+ |\hat{p}^{k_i}_{N+1+n} - q^{k_i}_{N+1+n}| + |\hat{q}^{k_i}_{N+1+n} - q_{N+1+n}|.\end{aligned}$$

由于

$$\hat{p}_{N+1+n} = f^n\big(\lim_{i\to\infty} p^{k_i}_{N+1}\big) = \lim_{i\to\infty} f^n(p^{k_i}_{N+1}) = \lim_{i\to\infty} p^{k_i}_{N+1+n},$$

故 $\lim_{i\to\infty} |\hat{p}_{N+1+n} - p^{k_i}_{N+1+n}| = 0$. 又因 p^{k_i} 是 ρ 跟踪轨道 q^{k_i} 的, 故

$$|p^{k_i}_{N+1+n} - q^{k_i}_{N+1+n}| \leqslant \rho.$$

设 $N+1+n = jm+r$, $r \in (0,\cdots,m-1)$. 于是 q_{N+1+n} 含于 Q_{s_j} 内. 类似地, $q^{k_i}_{N+1+n}$ 含于 $Q^{k_i}_{s_j}$ 内. 由于符号序列 $\lim_{l\to\infty} s^l = s$, 故存在 $L \in \mathbf{N}$, 使得当 $l > L$ 时, $d(s^l_j, s) \leqslant \dfrac{1}{2^{|j|+1}}$. 根据度量 d 的定义, 当 $l > L$ 时, $s^l_j = s_j$. 因此, 对于足够大的 $i, s^{k_i}_j = s_j$, 这意味着 $q^{k_i}_{N+1+n} = q_{N+1+n}$. 综合以上, 我们已证明了 $|\hat{p}_{N+1+n} - q_{N+1+n}| \leqslant \rho$, 即 $\{\hat{p}_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ ρ 跟踪 q_s 轨道. 因 q_s 只有唯一的 ρ 跟踪轨道 $\{p_n\}$, 这说明 $\hat{p}_{N+1} = p_{N+1}$, 即 h 连续.

综上所述, 我们已证得: h 是紧度量空间到紧度量空间的单值连续映射. 根据现代分析理论可知, h 是从 Σ 到 $S = h(\Sigma)$ 的同胚. 结论 (i) 证毕.

定理的结论 (ii) 及性质 (a), (b) 由 h 的构造和 ε 伪轨 q 的性质可以推出.

以下证明 (iii), 即 f^m 所产生的动力系统在 S 上的性质. 由于符号动力系统 (Σ, σ) 的周期点稠, 且具有拓扑传递性. 因此根据拓扑共轭性知, f^m 的周期点稠, 并有拓扑传递性. 再根据定理 2.1.1, f^m 必有关于初始条件的敏感依赖性, 定理证毕. □

Smale-Birkhoff 定理告诉我们, 如果二维微分同胚 f 存在横截同宿点, 则存在某些 $m \in \mathbf{N}$ 和紧集 $S \subset \mathbf{R}^2$ 使得 $F = f^m$ 限制于 S 上, 其动力学性质是混沌的. 因此, 我们说同宿缠结意味着混沌.

Smale-Birkhoff 定理所揭示的性质在几何上可通过 Smale 马蹄映射来解释. 因此, 上述混沌性质, 也称为在 Smale 马蹄意义上的混沌. 这是 f 在其双曲不变集上特有的动力学性质.

4.4 $\mathbf{R}^m$ 上的 C^r 微分同胚的不变集与双曲性

4.1 和 4.2 节所描述的 Smale 马蹄提供了二维映射具有混沌性质的典型例子. 以 Smale 马蹄为刺激, 在动力系统理论中, 进而一般地研究双曲动力系统, 如像"公理 A"系统. 双曲系统是其动态复杂性在数学上有了较好理解的系统. 本节对双曲动力系统的基本概念和理论做一些简要介绍.

设 $F: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ 为给定的 C^r 微分同胚.

定义 4.4.1 F 的不动点 q 称为双曲的, 如果其 Jacobi 矩阵 $DF(q)$ 没有单位模的特征值. 又若 q 为 F 的 N 周期点, $DF^N(q)$ 的一切特征值的模不为 1, 则周期轨道 $\overline{F}=\{q,F(q),F^2(q),\cdots,F^{N-1}(q)\}$ 称双曲周期轨道. 当 $m=2$ 时, 若 $DF^N(q)$ 的特征值满足 $|\lambda_1|<1<|\lambda_2|$, 称 q 为周期鞍点, 若 $|\lambda_1|<1,|\lambda_2|<1$ 称为周期汇, $|\lambda_1|>1,|\lambda_2|>1$ 称为周期源.

定理 4.4.1(不动点的稳定流形存在定理) 设 $F:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ 为 C^r 微分同胚. q 为 F 的双曲不动点, 则存在与 F 的光滑性相同的局部稳定与不稳定流形

$$W^s_{\rm loc}(q)=\{x\in U|F^n(x)\to q,\ 当\ n\to+\infty\ 且 F^n(x)\in U,\forall n\geqslant 0\},$$
$$W^u_{\rm loc}(q)=\{x\in U|F^{-n}(x)\to q,\ 当\ n\to+\infty\ 且\ F^{-n}(x)\in U,\forall n\geqslant 0\}.$$

$W^s_{\rm loc}$ 和 $W^u_{\rm loc}$ 在点 q 分别与 $DF(q)$ 的特征空间 E^s_q 与 E^u_q 相切, 并有相同维数 (见图 4.4.1).

定理 4.4.1 可以通过微分方程相应的定理推出. 这里证略.

映射 F 的全局稳定与不稳定流形定义为局部流形的向后与向前迭代, 即

$$W^s(q)=\bigcup_{n\geqslant 0}F^{-n}(W^s_{\rm loc}(q)),$$
$$W^u(q)=\bigcup_{n\geqslant 0}F^{n}(W^u_{\rm loc}(q)).$$

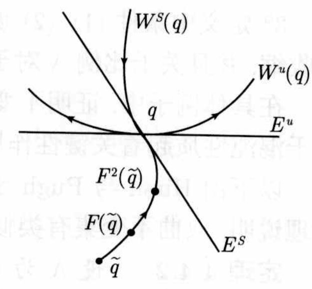


图 4.4.1 双曲不动点的稳定与不稳定流形

类似地, 可以定义 F 的 N 周期点 q 的局部与全局的不稳定与稳定流形. 应注意的是, 周期轨道 $\overline{y}$ 的稳定流形是在 F 的 N 次迭代下, 其轨道上每点的稳定流形的并集:

$$W^s(\overline{y},F)=\bigcup_{K=0}^{N-1}W^s(F^K(q),F^N).$$

定义 4.4.2 设 $\overline{y}$ 为 F 的周期 $N(N\geqslant 1)$ 的轨道, 点 $x\in W^s(\overline{y},F)\cap W^u(\overline{y},F)-\overline{y}\neq\varnothing$, 称 x 为 $\overline{y}$ 的同宿 (homoclinic) 点, 若 $W^s(\overline{y},F)$ 与 $W^u(\overline{y},F)$ 在 x 点横截相交, 称 x 为横截同宿点. 若它们相切地相交, 称为同宿相切.

定义 4.4.3 设 $\overline{y}$ 与 $\overline{y'}$ 为 F 的不同周期轨道, 点 $x\in W^u(\overline{y},F)\cap W^s(\overline{y'},F)$, 称 x 为 $\overline{y}$ 到 $\overline{y'}$ 的异宿 (heteroclinic) 点, 类似于定义 4.4.2, 有横截和相切概念.

命题 4.4.1 若 r 为 F 关于不动点 (周期点) q 的同宿点, 则 $F^K(r),K\in\mathbf{Z}$ 也是 F 的同宿点, 从而 F 存在一个同宿点, 必存在无穷多同宿点.

为研究 F 的不变集的性质, 我们引入如下的定义:

定义 4.4.4 设 Λ 为离散动力系统 $F: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ 的不变集合, 对于 Λ, 若存在具有以下性质的连续不变的直和分解 $T_\Lambda \mathbf{R}^m = E_\Lambda^u \oplus E_\Lambda^s$, 存在常数 $C > 0, 0 < \lambda < 1$, 使得

(1) 若 $V \in E_x^u$, 则 $|DF^{-n}(x)V| \leqslant C\lambda^n |V|$,

(2) 若 $V \in E_x^s$, 则 $|DF^n(x)V| \leqslant C\lambda^n |V|$.

此时, 称不变集 Λ 有双曲结构.

对于定义 4.4.4, 需作以下的说明.

1° 在定义 4.4.4 中, $T_\Lambda \mathbf{R}^m$ 由 Λ 中一切点在 $\mathbf{R}^m$ 中的全体切向量组成. 对每个 $x \in \Lambda, T_x \mathbf{R}^n$ 是在 x 点的切空间, 且 $T_x \mathbf{R}^n = E_x^u \oplus E_x^s$ 是向量空间到其不变子空间的直和分解, 其维数为 $u + s = m$.

2° F 的导算子 DF 映射 $T_x \mathbf{R}^n$ 到 $T_{f(x)} \mathbf{R}^n$, 定义中的不变性要求是 $Df(E_x^s) = E_{f(x)}^s, Df(E_x^u) = E_{f(x)}^u$. 定义中直和分解的连续性是指随着 x 在 Λ 中的连续变化, E_x^u 与 E_x^s 的基也连续变化. 一般分解不是光滑依赖的.

3° 定义中条件 (1), (2) 说明, $E^s(E^u)$ 中无穷多向量向前 (向后) 以比例 λ 指数地收缩, 并且关于比例 λ 对于 Λ 中一切点和不变子空间中一切向量都是一致的.

在具体例子中, 证明不变集的双曲性是十分困难的工作. 但双曲不变集的结构对于混沌性质起着关键性作用.

以下由 Hirsh 与 Pugh 于 1970 年建立的双曲不变集的稳定与不稳定流形存在定理说明, 双曲不变集有类似于鞍点的性质.

定理 4.4.2 设 Λ 为 C^r 微分同胚 $F: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 的紧不变集, Λ 有双曲结构: $E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^u$. 则 $\forall x \in \Lambda$, 存在 $\varepsilon > 0$ 和两个 C^r 流形 $W_\varepsilon^s(x), W_\varepsilon^u(x)$, 有以下性质:

(1) $\forall n \geqslant 0, y \in W_\varepsilon^s(x) \rightleftharpoons d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \varepsilon$; 并且 $\forall n \geqslant 0, \quad y \in W_\varepsilon^u(x) \rightleftharpoons d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leqslant \varepsilon$;

(2) $W_\varepsilon^s(x)$ 与 $W_\varepsilon^u(x)$ 在点 x 处的切空间分别是 E_x^s 与 E_x^u;

(3) 存在常数 $C > 0, 0 < \lambda < 1$, 使得若 $y \in W_\varepsilon^s(x)$, 则 $d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant C\lambda^n, \forall n \geqslant 0$, 且若 $y \in W_\varepsilon^u(x)$, 则 $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leqslant C\lambda^n, \forall n \geqslant 0$;

(4) $W_\varepsilon^s(x)$ 与 $W_\varepsilon^u(x)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的嵌入圆盘. 对于嵌入圆盘的 C^r 函数空间, 由 $x \to W_\varepsilon^s(x), x \to W_\varepsilon^u(x)$ 给出的从 Λ 到 $\mathbf{R}^n$ 的映射是连续的.

定理 4.4.2 的证明涉及较多的知识, 我们不能给出证明. 注意定理 4.4.2 中结论 (4) 说明, $W_\varepsilon^s(x)$ 与 $W_\varepsilon^u(x)$ 的切空间和半径随 x 而连续地变化.

推论 4.4.1 设 Λ 为微分同胚 $F: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 的紧双曲不变集, 则存在 $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, 使得若 $x, y \in \Lambda$ 且 $d(x, y) < \delta$, 则 $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y)$ 恰由一点组成, 记之为 $[x, y]$.

证 当 $x = y$ 时, $W_\varepsilon^s(x)$ 与 $W_\varepsilon^s(x)$ 的切空间为 E_x^s 与 E_x^u, 由于这里有 $E_x^s \oplus E_x^u = T_x\Lambda$, 故 $W_\varepsilon^s(x)$ 与 $W_\varepsilon^u(x)$ 在 x 相互横截. 当 ε 充分小时, $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^s(x)$ 仅

包含 x 一个点, 用不变流形的连续性与 Λ 的完备性, 可以独立地选取 x 与 $\delta > 0$, 使满足推论之结论. □

推论 4.4.1 的结论可用图 4.4.2 作解释.

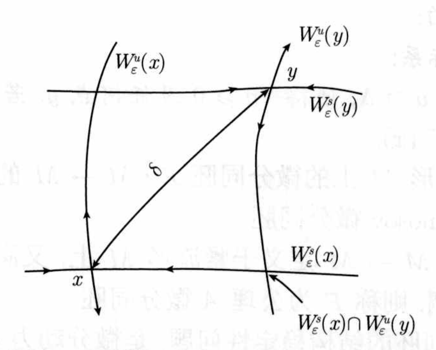


图 4.4.2 推论 4.4.1 的结论的几何解释

定义 4.4.5 如果存在 $\delta > 0$, 使得当 $x, y \in \Lambda, d(x,y) < \delta$ 时, 必有 $[x,y] \in \Lambda$, 称 F 在 Λ 上具有局部乘积结构.

问题: 在什么条件下有 $[x,y] \in \Lambda$? 为回答这个问题, 再引入以下两个定义:

定义 4.4.6 闭不变集 Λ 称为不可分解的, 如果对每个点对 $[x,y] \in \Lambda$ 及 $\varepsilon > 0$, 存在 $x = x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = y$ 及时刻 $k_1, k_2, \cdots, k_n \geqslant 1$, 使得从 $F^k(x_{i-1})$ 到 x_i 的距离小于 ε.

定义 4.4.7 同胚 $F: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ 的不变集 Λ 称为局部极大的, 倘若存在 Λ 的邻域 u, 使得对于任何满足关系式 $\Lambda \subset \Lambda' \subset u$ 的不变集 Λ', 都有 $\Lambda = \Lambda'$.

由这个定义可知 $\Lambda = \bigcap\limits_{n\in\mathbf{Z}} f^{-n}u$.

推论 4.4.2 如果 Λ 是不可分解的极大双曲不变集, 则 Λ 具有局部乘积结构.

证 设 $z \in W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(x), \rho > 0$, 取 $n_1, n_2 > 0$, 使得 $d(F^{n_1}(z), F^{n_1}(x)) < \dfrac{\rho}{2}$, $d(F^{-n_2}(z), F^{-n_2}(y)) < \dfrac{\rho}{2}$, 由于 $F^{n_1}(x), F^{-n_2}(y) \in \Lambda$, Λ 不可分解, 因此存在从 $F^{n_1}(x)$ 到 $F^{-n_2}(y)$ 的链回归点 $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$. 从而 $\{z, \cdots, F^{n_1}(z), u_2, u_3, \cdots, u_{k-1}, F^{-n_2}(z), \cdots, z\}$ 为 z 的 ρ 回归链, 即 z 为同一个最大的不可分解的 x, y 的回归链集中一部分, 即 $z = [x,y] \in \Lambda$. 证毕. □

定义 4.4.8 微分同胚 $F: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 的双曲不变集 Λ 具有规范坐标系, 倘若存在 $\varepsilon > 0$ 与 $r > 0$, 使得

(1) 若 $x, y \in \Lambda$, 且 $\rho(x,y) \leqslant \varepsilon$, 则 $\varnothing \neq W_r^s(x) \cap W_r^u(y) \in \Lambda$;

(2) 由 $[x,y] = W_r^s(x) \cap W_r^u(y)$ 定义的映射

$$[\bullet, \bullet]: \{(x,y) \in \Lambda \times \Lambda, \rho(x,y) \leqslant \varepsilon\} \to \Lambda$$

是唯一连续的 (即 Λ 有局部乘积结构).

双曲集 Λ 有以下性质:

定理 4.4.3 微分同胚 $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的双曲不变集 Λ 的以下性质是等价的:

(1) Λ 是局部最大的;

(2) λ 具有规范坐标系;

(3) 存在 Λ 的邻域 $u\supset\Lambda$, 使得 $\forall n\geqslant 0$ 及任何点 y, 若存在 $F^n(y)\in u(\Lambda)$, 则存在点 $x\in\Lambda$, 有 $y\in W^s(x)$.

倘若定义于某个流形 M 上的微分同胚 $F:M\to M$ 的整个流形是 F 的双曲不变集, 此时称 F 为 Anosov 微分同胚.

又若微分同胚 $F:M\to M$ 定义于紧流形 M 上, 又满足 (1)$\Omega(F)$ 是双曲集; (2) 周期点在 $\Omega(F)$ 中稠, 则称 F 为公理 A 微分同胚.

涉及公理 A 微分同胚的结构稳定性问题, 是微分动力系统理论中最引人入胜的问题, 这里不作介绍. 但我们需要用到以下的谱分解定理 (Ω 分解定理).

定理 4.4.4 设 $F:M\to M$ 为紧致微分流形上定义的公理 A 微分同胚, $\Omega(F)$ 为其非游荡集, 则 $\Omega(F)$ 可分解为两两不交的闭不变集之并:

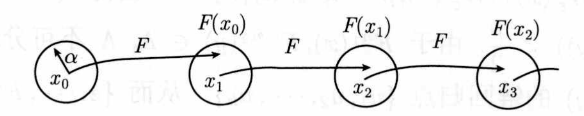
$$\Omega(F)=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\cdots\cup\Omega_s$$

而 F 限制在每个 Ω_i 上是拓扑传递的.

集 Ω_k 全体 $(k=1,2,\cdots,s)$ 称为基本集, 此时, 流形 M 可分解为 F 的不变集, 即 $M=\bigcup\limits_{K=1}^{S}W^s(\Omega_K)$.

最后, 我们再介绍 α 伪轨道与 β 跟踪的有关结论.

定义 4.4.9 称序列 $x=\{x_i\}_{i=a}^b$ 为微分同胚 F 的 α 伪轨 (α-psendo-orbit), 倘若 $d(x_{i+1},F(x_i))<\alpha,\forall a<i<b$. 称点 y 为序列 x 的 β-跟踪 (β-shadows), 倘若 $d(F^i(y),x_i)<\beta,\forall a\leqslant i\leqslant b$ (见图 4.4.3).



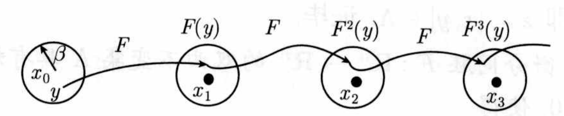


图 4.4.3 α 伪轨道与 β 跟踪

推论 4.4.3 (Bowen 跟踪引理) 设 Λ 为 F 的双曲不变集, 则对每个 $\beta>0$, 存在 $\alpha>0$, 使得 Λ 中的每个 α-伪轨 $\{x_i\}_{i=a}^b$ 都有点 $y\in\Lambda$ 的 β-跟踪.

这个命题说明, 如果我们用计算机计算双曲不变集的所希望求的轨道, 即便未能找到真实轨道, 但仍能用足够精确的近似程度而发现它们.

下面我们再介绍 Palis 所证明的一般形式的 λ-引理.

定理 4.4.5 (λ-引理) 设 $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 为微分同胚, p 是其双曲不动点或周期 N 点, 其稳定与不稳定流形分别为 s 和 u 维的 $(s+u=m)$. 若 D 为在 $W^u(p)$ 中的 u 维圆盘, 令 Δ 为以 $q\in W^s(p)/p$ 为心, 横截于 $W^s(p)$ 的 u 维圆盘, 则 $\bigcup\limits_{n>0} f^n(\Delta)$ 包含任意地 C^1 接近于 D 的 u 维圆盘.

定理 4.4.6 (Smale-Birkhoff) 设 $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 为微分同胚, p 是其双曲不动点, 且存在 $q\neq p$ 是 $W^s(p)$ 与 $W^u(p)$ 的横截交点, 则 f 具有双曲不变集 Λ, 在 Λ 上 f 拓扑共轭于有限型子移位. 特别, 存在正数 $N<+\infty,\Lambda$ 的子集 Λ^N, 同胚 $h:\Lambda^N\to\Sigma(2)$, 使得 $f^N\Lambda^N=h^{-1}\circ\sigma\circ h$, 即 f^N 拓扑共轭于两个符号的完全移位.

利用定理 4.4.6 指出, 要判定微分同胚是否具有 Smale 马蹄或移位自同构, 只需设法判别是否存在横截同宿点, 使问题转化为数学上的细致估计. 不过, 在应用之中, 由于稳定流形定理所给出的稳定与不稳定流形的位置信息很少, 离开不动点 p 愈远, 稳定与不稳定流形的性态就愈不易把握, 因此, 估计工作常常困难很大. 严寅和钱敏 (1985) 所证明的"横截异宿环蕴含横截同宿点"的定理可以缓和上述矛盾.

设 M 为充分光滑的微分流形, f 为 M 到 M 的 C^r 微分同胚. p 为 f 的双曲不动点, B^s,B^u 分别为 $W^s(p)$ 与 $W^u(p)$ 中 p 的半径充分小的拓扑开球, 记 $V=B^s\times B^u$, 又设 $q\in W^s(p),D^u$ 为含 q 的 C^r 拓扑开球, $\dim D^u=\dim W^u(p)$ 且 $D^u\Phi_q W^s(p)$.

于是 λ-引理断言: 若 D_n^u 为 $f^n(D^u)\cap V$ 的含有 $f^n(q)$ 的连通分枝, 则对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $n_0\in z$, 使 $n>n_0$ 时, D_n^u 与 $B^u\varepsilon C^1$ 接近. 对 $f^k(k\in\mathbf{Z}_+$充分大) 应用 λ- 引理, 可将 λ-引理改善为下述的命题:

命题 4.4.2 设 $\widetilde{B^u}$ 为 $W^u(p)$ 中任意具有紧致闭包的, 与 $W^u(p)$ 有相同维数的 C^r 子流形. 则对任意 $\widetilde{\varepsilon}>0$, 存在 C^r 子流形 $\widetilde{D_n^u}\subset f^n(D^u)$, 使 $\widetilde{D_n^u}$ 与 $\widetilde{B^u}\varepsilon C^1$ 接近, 且 $\dim\widetilde{D_n^u}=\dim W^u(p)$.

证明从略

定义 4.4.10 设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为 f 的互不相同的双曲不动点, 若存在 $q_i\in W^u(p_i)\cap W^s(p_{i+1})$ 使 $W^u(p_i)$ 在 q_i 横截于 $W^s(p_{i+1})(i=1,\cdots,n$ 且 $P_{n+1}=p_1)$, 则称 f 有一横截 n 环, 记为

$$p_1\overset{q_1}{\to}p_2\overset{q_2}{\to}\cdots\overset{q_{n-1}}{\to}p_n\overset{q_n}{\to}p_1$$

(见图 4.4.4). 由上述定义显然可见, f 具有横截同宿点 $\rightleftharpoons f$ 具有横截 1 环.

定理 4.4.7 若 f 具有横截 n 环, 则 f 具有横截同宿点.

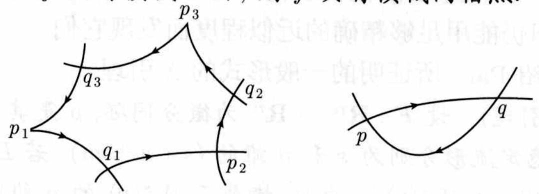


图 4.4.4 横截 1-环和横截 3-环

证 若能证明 "f 具有横截同宿点 $\Rightarrow f$ 具有横截 $n-1$ 环", 则对 n 进行归纳可知 f 具有横截 1 环, 即 f 具有横截同宿点.

设 f 具有一横截 n 环. 由 $W^u(p_2)$ 在 q_2 横截于 $W^s(p_3)$ 可知, 存在 $W^u(p_2)$ 与 $W^u(p_2)$ 中含 q_2 的小球 B 及充分小的 $\varepsilon_0 > 0$, 使任意 C^r 子流形 S, 若 S 与 B 是 ε_0 C^1 接近的, 则 S 与 $W^u(p_3)$ 相交于一点 r 且 S 横截于 $W^s(p_3)$(见图 4.4.5).

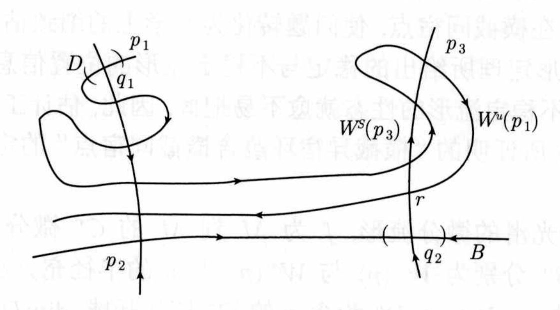


图 4.4.5 横截 n 环

又 $q_1 \in W^s(p_2)$ 且 $W^u(p_1)$ 在 q_1 横截于 $W^s(p_2)$, 故可取 $W^u(p_1)$ 中含 q_1 的小球 D, 则 D 在 q_1 横截于 $W^s(p_2)$. 对 p_2, q_1, D 及 B 应用命题 4.4.2 可知, 存在 $n > 0$ 及 $D_n \bigcap f^n(D)$ 使 D_n 与 B 是 $\varepsilon_0 C^1$ 接近的. 由前述事实知, 存在 $r \in D_n \bigcap W^s(p_3)$ 且 D_n 在 r 横截于 $W^s(p_3)$. 而 $D_n \subset f^n(D) \subset f^n(W^u(p_1)) = W^u(p_1)$, 故有 $W^u(p_1)$ 在 r 横截于 $W^s(p_3)$. 因而

$$p_1 \xrightarrow{r} p_3 \xrightarrow{q_3} p_4 \xrightarrow{q_4} \cdots \xrightarrow{q_{n-1}} p_{n-1} \xrightarrow{q_n} p_1$$

为 f 的一横截 $n-1$ 环. □

4.5 分枝到无穷多个汇

Newhouse 与 Robinson 先后研究过存在周期鞍点 P_t 的二维微分同胚的单参数族 $\{F_t\}$, 设 $F_t^n(P_t) = P_t, |\det DF_t^n(P_t)| < 1$, 作者们主要讨论同宿相切时产生的结

果. 本节对这些结论作简要介绍. 首先介绍若干定义与术语.

设 r_1 与 r_2 为两条定向的可微曲线, 我们说 r_1 与 r_2 在点 P 是正向 (负向) 相交的, 倘若 P 在两曲线上且存在接近 P 点的局部坐标 $(x,y), x(p)=y(p)=0$, r_j 具有定向参数表示 $\{x_j(s), y_j(s): |s|<\varepsilon\}$, 满足: (i) $y_2(s)\equiv 0, x_2(0)=0, x_2'(0)>0$; (ii) $y_1(0)=0=x_1(0), y_1(s)<0$ 当 $-\varepsilon<s<0$(对应地 $0<s<\varepsilon$), 又当 $0<s<\varepsilon(-\varepsilon<s<0)$ 时, $y_1(s)>0$.

定义 4.5.1 称 r_1 与 r_2 是 $n+1$ 阶相交 (n 阶相切) 的, 倘若存在上述参数表示, 满足 (i) $y_2(s)\equiv 0$; (ii) $y_1(0), y_1'(0)=0,\cdots, y_1^{(n)}(0)=0, y^{(n+1)}(0)\neq 0$.

在上述定义下, r_1 与 r_2 横截于 P, 当且仅当它们有一阶相交, 零阶相切.

定义 4.5.2 称单参数同胚 $\{F_t\}$ 随 t 之改变在 t_0 值产生 (失去) 周期鞍点 P_t 的同宿相交, 倘若存在 $\varepsilon>0, \theta_t=F_t^k(P_t)$ 以及当 $t_0-\varepsilon\leqslant t\leqslant t_0+\varepsilon$ 时, 子弧 $r_t^s\subset W^s(P_t,F_t), r_t^u\subset W^u(\theta_t,F_t)$ 具有连续的变化, 使得

(i) $r_t^s\cap r_t^u=\varnothing$, 当 $t_0-\varepsilon\leqslant t\leqslant t_0$ (对应的 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\varepsilon$);

(ii) 当 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\varepsilon$ (对应的 $t_0-\varepsilon\leqslant t\leqslant t_0$), r_t^s 与 r_t^u 有两个交点, 一个正向相交, 另一个负向相交.

称 $\{F_t\}$ 在 t_0 产生奇阶同宿相交, 若条件 (i) 满足并有

(ii)′ 当 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\varepsilon$ 时, r_t^u 与 r_t^s 至少有一个奇阶正交点, 且至少有一个负的奇阶相交点.

定义 4.5.3 称 $\{F_t\}$ 非退化地在 t_0 产生同宿相交, 倘若 $\{F_t\}$ 产生奇阶同宿相交 (条件 (i), (ii)′ 成立) 并且

(iii) $r_{t_0}^s$ 与 $r_{t_0}^u$ 有阶数 2 的交点 (一阶相切);

(iv) 若坐标取法使 r_t^s 位于 $y=0$, 且 $y^*(t)$ 为 y 属于 r_t^u 的极值点, 则 $\left.\dfrac{dy^*}{dt}\right|_{t=t_0}\neq 0$.

注意, 当 $\{F_t\}$ 在 t_0 非退化地产生同宿相交时, 当 $t>t_0$ 时, 必然是横截的, 即相交阶数为 1.

定理 4.5.1 设 $\{F_t\}$ 为两维实解析微分同胚的单参数族, 并连续依赖于 t. 对于 $\{F_t\}$ 的周期 n 点 P_t, $|\mathrm{det}DF_{t_0}^n(p_{t_0})|<1$. 若 $\{F_t\}$ 在 $t=t_0$ 时产生 (失去) 同宿相交, 则 F_t 存在无穷多个汇的分枝序列 (infinite cascade of sinks). 换言之, 存在单调地收敛于 t_0 的参数值 t_j 的序列, 使得 F_{tj} 有周期 n_j 的汇. 汇的轨道靠近 $W^s(P_{t_0},F_{t_0})$ 与 $W^u(F^k(P_{t_0}),F_{t_0})$ 相切的点. 汇的周期 n_j 按 $n_{j+1}-n_j=n$ 或 $n_{j+1}-n_j=2n$ 增加, 依赖于 F_t 保持 $W^s(P_t,F_t)$ 与 $W^u(P_t,F_t)$ 的定向, 还是反此定向.

这个结果可以从以下结果推出.

定理 4.5.2 设 $\{F_t\}$ 为 C^j 微分同胚的单参数族, 并设它在 $t=t_0$ 产生 (失

去) 奇阶 j 次的同宿相交, 则定理 4.5.1 之结论对 $j \geqslant 1$ 成立.

注意, 上面的定理仅指出存在无穷多个汇的分枝序列, 每个汇对应于一个确定的参数值 t_0. 但定理并未断言存在同一个参数值 t_0, 使 F_{t_0} 同时存在无穷多个汇. 为得到后一结论, 需要比定理 4.5.1~4.5.2 更多的条件.

以下设 $G = F_t^n$, Λ 为 G 的双曲基本集.

定义 4.5.4 一个双曲基本集 Λ 称为 F 的粗放的双曲集 (wild hyperbolic set), 或称稳定与不稳定流形具有持续相切性, 倘若对任何 C^2 接近 F 的 G, 存在点 q_1 与 $q_2 \in \Lambda(G)$, 使得 $W^s(q_2, G)$ 与 $W^u(q_1, G)$ 有非退化相切性.

定理 4.5.3 假如 $\{F_t\}$ 关于周期点 P_t 的曲线在 $t = t_0$ 非退化地产生同宿相交, $|\det DF_{t_0}^n(P_{t_0})| \neq 1$, 且每个 F_t 是 C^3 的, 则对给定的 $\varepsilon > 0$, 存在子区间 $[t_1, t_2] \subset [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, 使得 $\forall t \in [t_1, t_2]$, F_t 存在包含相应的周期 n 点 P_t 的粗放的双曲集.

为继续介绍 Newhouse 与 Robison 的结果, 我们指出, 设 Z 为拓扑空间, $X \subset Z$ 为 Z 的子集, 若 X 可表示为可数个稠密开集的交, 称 X 为 Z 的剩余子集, 或 Z 的 Baire 集; 如果拓扑空间 Z 中任一 Baire 集在 Z 中稠密, 称 Z 为 Baire 空间. 一个完备度量空间必为 Baire 空间, 微分流形 M 上定义的一切 C^1 向量场构成的集合 $x(M)$ 也是 Baire 空间. $x(M)$ 中剩余子集所具有的性质称通有性质. 因为用剩余子集可描述拓扑空间中 "大多数" 具有的性质.

定理 4.5.4 设 $\{F_t\}$ 有区间参数值 $[t_1, t_2]$, 使得对于 $t \in [t_1, t_2]$, F_t 具有包含周期点 P_t 的粗放的双曲集, 且 $|\det DF_t^n(P_t)| < 1$, 则存在一个剩余子集 $J \subset [t_1, t_2]$, 使得对 $t \in J, F_t$ 有无穷多个汇.

上述定理说明, 对于同样的某些 t 值, F_t 存在无穷多个汇, 这是 F 的具通有性质之情况, 从而使得在 F_t 映射作用下, 点趋于无穷多的不同的吸引子. 由于本节定理的证明都较长, 我们不再给出证明, 有兴趣的读者, 可参考所附参考文献.

4.6 Hénon 映射的 Smale 马蹄

1976 年, Hénon 用数值方法研究了迭代过程

$$x_{i+1} = y_i + 1 - 1.4x_i^2, \quad y_{i+1} = 0.3x_i. \tag{4.6.1}$$

他发现 (4.6.1) 的渐近行为与初始点 (x_0, y_0) 的选取有关, 或发散到无穷, 或收敛到某个 "奇怪吸引子"——Cantor 集与一维流形的 Descartes 积的拓扑结构, 但人们迄今对 Hénon 经 5×10^6 次迭代所获得的上述信息, 尚缺乏数学上严格的理论解释. 自 1976 年以来, 对一般性的 Hénon 映射

$$H(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx), \tag{4.6.2}$$

已经作过许多研究, 本节主要介绍 Smale 马蹄的存在性, 内容取自张锦炎 (1984).

(4.6.2) 可经变换坐标：$X = \dfrac{x}{a}$, $Y = \dfrac{b}{a}y$ 化为形式

$$F(x,y) = (A + By - x^2, x), \tag{4.6.3}$$

其中, $a = A$, $b = B$. 当 A, B 固定时, $H(x,y)$ 与 $F(x,y)$ 拓扑共轭.

F 具有逆映射

$$F^{-1}(x,y) = \left(y, \frac{1}{B}(x - A + y^2)\right). \tag{4.6.4}$$

由此可见, 对 $B > 1$, 映射 F 未出现新的性质, 因此, 只需考虑 $0 < |B| \leqslant 1$ 的情形即可. 特别 $B = \pm 1$ 时, F 是保面积映射. 记

$$A_0 = -\frac{1}{4}(1 + |B|)^2, \tag{4.6.5}$$

$$R = \frac{1}{2}[|B| + 1 + \sqrt{(|B| + 1)^2 + 4A}], \tag{4.6.6}$$

其中, 倘若 $A > A_0$, R 为二次代数方程

$$R^2 - (|B| + 1)R - A = 0 \tag{4.6.7}$$

的最大正根.

我们首先证明

定理 4.6.1 (i) 若 $A < A_0$, 则 $\Omega(F) = \varnothing$.

(ii) 若 $A > A_0$, 则 $\Omega(F)$ 包含于矩形 $S = \{(x,y) \mid |x| \leqslant R,\ |y| \leqslant R\}$ 之内.

为证上述定理, 我们需要若干引理, 首先记 $(x_1, y_1) = F(x_0, y_0)$ 以及 $(x_{-1}, y_{-1}) = F^{-1}(x_0, y_0)$. 容易证明

引理 4.6.1 (1°) 在 F 作用下, 水平条域 $|y_0| \leqslant C$ 被映射为两抛物线所夹区域:

$$A - |B|C - y_1^2 \leqslant x_1 \leqslant A + |B|C - y_1^2.$$

竖直条域 $|x_0| < C$ 被 F 映为水平条域 $|y_1| < C$.

(2°) 在 F^{-1} 作用下, 竖直条域 $|x_0| \leqslant C$ 被映为

$$-C - A + x_{-1}^2 \leqslant By_{-1} \leqslant C - A + x_{-1}^2.$$

水平条域 $|y_0| \leqslant C$ 被映为竖直条域 $|x_{-1}| \leqslant C$.

下面的引理中, 如果 R 为复数, 则我们认定 $\min(a, R)$ 与 $\max(a, R)$ 就等于 a.

引理 4.6.2 (1°) 若 $x_0 \leqslant \min(-|y_0|, R)$, 则 $x_1 \leqslant x_0$, 且等号仅当 $x_0 = -R$, $y_0 = \pm R$ 成立.

(2°) 若 $x_0 \geqslant -|y_0|$ 并且 $By_0 \geqslant \max(0, |B|R)$, 则 $By_{-1} \geqslant By_0, |y_{-1}| \geqslant |y_0|$, 等号仅当 $x_0 = -R, y_0 = \pm R$ 成立.

证　由迭代关系 (4.6.3) 及引理的假设有

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= A + By_0 - x_0^2 - x_0 \leqslant A + |B|y_0 - x_0^2 - x_0, \\ &\leqslant A - (|B|+1)x_0 - x_0^2. \end{aligned}$$

当 $x_0 = -\frac{1}{2}(1+|B|) \pm \frac{1}{2}[(1+|B|)^2 + 4A]^{1/2}$ 时, 上述不等式右边等于零. 若 R 为复数, x_0 也为复数, 对一切 x_0, 不等式 (4.6.5) 右边为负数; 若 R 为实数, 则因 (4.6.5) 右边最小根为 $x_0 = -R$. 因此, 当 $x_0 < -R$ 时, (4.6.5) 右边仍为负值. 另一方面, 当 $x_0 = -R$, $|y_0| < R$ 时, 不等式 (4.6.5) 是严格的, 因此, 等号仅当 $x_0 = -|y_0| = -R$ 才成立. 这就证明了结论 (1°). 类似地, 为证 (2°), 考虑

$$B(y_{-1} - y_0) = y_0^2 + x_0 - A - By_0 \geqslant y_0^2 - (1+|B|)y_0 - A. \tag{4.6.8}$$

倘若 $|y_0| > \max(0, R)$, (4.6.8) 右边为正. 若 $B > 0$, 这意味着 $y_{-1} \geqslant y_0 \geqslant 0$. 反之, 若 $B < 0$, 则有 $y_{-1} < y_0 \leqslant 0$. 等号仅当 $x_0 = -R, y_0 = \pm R$ 才成立. (2°) 证毕. □

以下划分 (x, y) 平面区域为三个集合 (见图 4.6.1):

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x,y) |\ x \leqslant -|y|\}, \\ M_2 &= \{(x,y) |\ x \geqslant -|y|, By \leqslant 0\}, \\ M_3 &= \{(x,y) |\ x \geqslant -|y|, By \geqslant 0\}. \end{aligned}$$

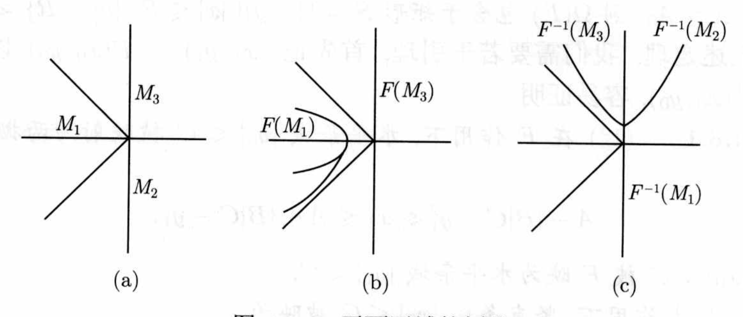


图 4.6.1　平面区域的划分

引理 4.6.3　当 $A < A_0$ 时,

(1°) $F(M_1 \cup M_2) \subset \mathrm{int} M_1$, int 表示内部;

(2°) 沿着 F 在 M_1 中的轨道, x 严格单减;

(3°) $F^{-1}(M_2 \cup M_3) \subset \mathrm{int} M_3$;

(4°) 沿着 F^{-1} 在 M_3 中的轨道, $|y|$ 严格单增.

证　根据引理 4.6.2(1°), 若 $(x_0, y_0) \in M_1$, 则 $y_1 = x_0 > x_1$, 不等号是严格的. 因为 R 为复数, 又因为 $x_0 \leqslant 0$, 故必有 $y_1 = -|y_1|$. 这就证明了 $F(M_1) \subset \mathrm{int} M_1$

且 (2°) 亦成立. 又由引理 4.6.1(1°), x 轴被 F 映到顶点在 $(A,0)$ 开口向左的抛物线, 且这条抛物线完全位于 M_1 之边界的左侧. 直线 $By=-\varepsilon$ 的像是上述抛物线左边的另一条抛物线 $(x_1=(A-\varepsilon)-y_1^2)$. 因此, $F(M_2)$ 位于 M_1 之边界左侧 (见图 4.6.1(b)).

类似地, 可证 (3°) 与 (4°). 若 $(x_0,y_0)\in M_3$, 根据引理 4.6.2(2°), $|y_1|>|y_0|=|x_{-1}|$ 且 $By_{-1}>By_0\geqslant 0$. 再应用 4.6.1(2°), 即得本引理的结论 (3°). □

引理 4.6.3 实际上指出了映射 F 的具体结构 (filtration). 根据该引理所述的结论, 当 $A<A_0$ 时, 显然有 $\Omega(F)=\varnothing$, 此即定理 4.6.1 的结论 (i).

以下考虑 $A\geqslant A_0$ 的情形, 此时 R 为实数, 定义 (x,y) 平面的新分解

$$
\begin{aligned}
N_1&=\{(x,y)|\ x\leqslant \min(-|y|,R)\},\\
N_2&=\{(x,y)|\ x\geqslant -R,|y|\leqslant R\},\\
N_3&=\{(x,y)|\ x\geqslant -|y|,By\leqslant |B|R\},\\
N_4&=\{(x,y)|\ x\geqslant -|y|,By\geqslant |B|R\}.
\end{aligned}
$$

引理 4.6.4 设 $A\geqslant A_0$, 则有

(1°) $F(N_1)\subset N_1$;

(2°) $F(N_2\cup N_3)\subset N_1\cup N_2$;

(3°) 沿着 F 在 N_1 中的轨道, x 单减 (除在 $x=-|y|=-R$ 上的两点外, 严格减少);

(4°) $F^{-1}(N_3\cup N_4)\subset N_4$;

(5°) $F^{-1}(N_2)\subset N_2\cup N_3\cup N_4$;

(6°) 沿着 F^{-1} 在 N_4 中的轨道, $|y|$ 增加 (除在点 $(-R,R\mathrm{sign}(B))$ 外, 严格地增加).

图 4.6.2 标明了 $A>A_0$ 且 $B>0$ 时上述情况, 其中 (a) 为平面的分划; (b) 为 F 之象集; (c) 为 F^{-1} 之象集.

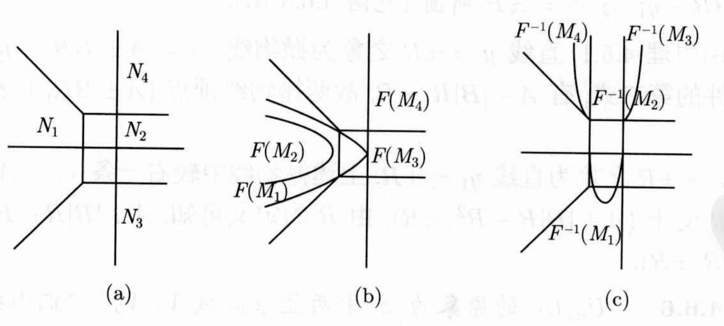


图 4.6.2 平面的新划分

证　本引理的证明与引理 4.6.3 的不同在于 (2°) 与 (5°). 在引理 4.6.1(1°) 中取 $C = R$ 并注意到 $F(N_2)$ 的右边界在 $|y| = R$ 与 $x = -R$ 相交即证得引理 4.6.4(2°).

类似地, 注意 N_1 的边界曲线 $-x_0 = |y_0| > R$ 在 F^{-1} 映射下映为域 N_4 中的曲线, 再引用引理 4.6.2 (2°) 我们证得 (4°). 此外, 线段 $x_0 = -R, |y_0| \leqslant R$ 被映为抛物线段

$$By_{-1} = x_{-1}^2 - R - A, \quad |x_{-1}| \leqslant R.$$

该段抛物线与 N_1 不相连, 这就证明了 (5°). □

严格地讲, 引理 4.6.3 并未给出 F 的结构, 因为正方形 S 的左边两个角之一在 F 映射下, 映到 N_1 之边界, 在 F^{-1} 映射下映到 N_4 的边界. 稍稍修改一下 N_1 与 N_2 可做得仔细一些, 但对于定理 4.6.1 的证明, 上述引理已经可应用了, 因为由引理 4.6.4 的 (3°), (4°), 在 $N_1 \cup N_4$ 内的一切点都是游荡的. 事实上, 至少在某个方向上, 它们逃逸到无穷远. 这就意味着, $\Omega(F) \subset N_2 \cap F^{-1}(N_2)$. 于是根据引理 4.6.1, 立即有

$$N_2 \cap F^{-1}(N_2) \subset S = \{(x, y) |\ |x| \leqslant R, |y| \leqslant R\}.$$

这就证明了定理 4.6.1 的结论 (ii).

定理 4.6.2　当参数 A, B, R 满足关系

$$0 < |B| \leqslant 1, \quad A - (|B| + 1)R > 4$$

时, 则映射 F 在正方形 S 上以序列空间 Σ 的移位自同构 σ 为其子系统. 于是存在 S 中一个集合 Λ, F 的周期点在 Λ 内稠, 且 F 有轨线在 Λ 内稠, Λ 是 F 的不变集, 是闭的二维 Cantor 集.

为证定理 4.6.2, 我们需要证明以下引理, 并引用 Moser 定理.

引理 4.6.5　$F(S) \cap S$ 是 S 中两个横条形区域, 记作 U_a, U_b, 它们由抛物线 $x_1 = A \pm BR - y_1^2$ 与 $x_1 = \pm R$ 所围 (见图 4.6.3(b)).

证　由引理 4.6.1, 直线 $y = \pm R$ 之象为抛物线 $x_1 = A \pm BR - y_1^2$, 根据定理 4.6.2 中条件的第二式, 有 $A - |B|R > R$, 故两抛物线顶点 $(A \pm BR, 0)$ 都在 $x_1 = R$ 右边.

直线 $x = \pm R$ 之象为直线 $y_1 = \pm R$, 上述抛物线中较右一条 $x_1 = A + |B|R - y_1^2$ 与 $y_1 = \pm R$ 交于 $(A + |B|R - R^2, \pm R)$, 由 R 的定义可知, $A + |B|R - R^2 = -R$, 故交点为 $(-R, \pm R)$. □

引理 4.6.6　U_a, U_b 的原象为 S 中两竖条区域 V_a, V_b, 它们由抛物线 $A + By_{-1} - x_{-1}^2 = \pm R$, 与直线 $y_{-1} = \pm R$ 所围 (图 4.6.3(a)).

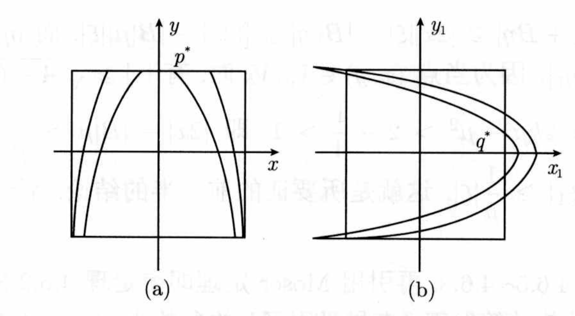


图 4.6.3 横条和竖条

证 由引理 4.6.1 及逆迭代关系 (4.6.4) 可知, U_a, U_b 抛物线之原象显然为直线 $y = \pm R$ 之一段. U_a, U_b 的直线边界之原象为抛物线 $y = \dfrac{1}{B}(x^2 - A \pm R)$ 在 S 中一段 (在图 4.6.3(a) 中, 设 $B < 0$. 若 $B > 0$, 图形与该图的 x 轴对称). □

引理 4.6.7 *U_a, U_b 的抛物线边界上一切点处对 x 轴 (V_a, V_b 的抛物线边界上一切点处对 y 轴) 的斜率的绝对值都不超过 $\mu = \dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{2}$, 其中 $k = \sqrt{A - (|B| + 1)R}$.*

证 由图 4.6.3 可见, 点 $q^* = (R, \sqrt{A - (1 + |B|)R})$ 处对 x 轴 (点 $p^* = (\sqrt{A - (1 + |B|)R}, R)$ 处对 y 轴) 的斜率最大为 $-\dfrac{1}{2k}\left(\dfrac{B}{2k}\right)$, 由于 $|B| \leqslant 1$, 故其绝对值小于 $\mu = \dfrac{1}{k}$, 因 $k > 2$, 故 $\mu < \dfrac{1}{2}$.

综合引理 4.6.5~4.6.7, 我们已证得: F 映 V_a, V_b 为 U_a, U_b, 且将 V_a, V_b 的横边 (竖边) 映为 U_a, U_b 的横边 (竖边). 并且存在一个 $\mu, 0 < \mu < \dfrac{1}{2}$, 使 V_a, V_b 的竖边所对应的函数 $x = v_i(y)$ 与 V_a, V_b 的横边对应的函数 $y = u_i(x)$ 都满足 Lipschitz 条件, Lipschitz 数为 μ. □

引理 4.6.8 *当 $(x, y) \in V_a, V_b$ 时, dF 映扇形 $S^+ : |\eta| \leqslant \mu|\xi|$ 到 S^+ 内, 且 $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \equiv dF \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, 有 $|\xi_1| \geqslant \mu^{-1}|\xi|$. 当 $(x, y) \in U_a, U_b$ 时, dF^{-1} 映扇形 $S^- : |\xi| \leqslant \mu|\eta|$ 到 S^- 内, 且 $\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} \equiv dF^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, 有 $|\eta_0| \geqslant \mu^{-1}|\eta|$.*

证 若 $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in S^+, |\eta| \leqslant \mu|\xi|$, 则

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \equiv dF \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & B \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x\xi + B\eta \\ \xi \end{pmatrix}.$$

于是, $|\xi_1| = |-2x\xi + B\eta| \geqslant |2x||\xi| - |B||\eta| \geqslant [|2x| - |B|\mu]|\xi|$. 而 $|\eta_1| = |\xi|$, 故也有 $|\xi_1| \geqslant [|2x| - |B|\mu]|\eta_1|$. 因为当点 $(x, y) \in V_a, V_b$ 时, 有 $|x| \geqslant \sqrt{A - (|B|+1)R} = K$, 故 $|2x|\mu - |B|\mu^2 \geqslant 2k\mu - \mu^2 > 2 - \dfrac{1}{4} > 1$. 即 $|2x| - |B|\mu > \dfrac{1}{\mu}$. 于是, 我们得到 $|\eta| \leqslant \mu|\xi_1|$ 与 $|\xi_1| \geqslant \dfrac{1}{\mu}|\xi|$, 这就是所要证的前一半的结论. 后一半结论可类似证明. □

利用上述引理 4.6.5~4.6.8, 再引用 Moser 定理即得定理 4.6.2 的结论.

注意, Hénon 数值计算发现 “奇异吸引子” 的参数为 $A = 1.4, B = 0.3$, 将此数值代入 (4.6.5) 与 (4.6.6) 得到 $A_0 = -0.4225, R = 2$. 对于固定的 $B = 0.3$, 如令参数 A 从小到大地改变, 由上面所证的定理可见, Hénon 吸引子是 F 的非游荡集从空集逐渐生成 Smale 马蹄过程中出现的分枝现象的一部分, 但对于这最吸引人的部分, 本节开头所述, 其几何结构迄今仍缺少数学的理解, 有待进一步研究.

有关 Hénon 映射的近年研究, 可见参考文献中曹永罗的文章.

第 5 章　平面 Hamilton 系统和等变系统

对于 n 阶自治非线性常微分方程组所定义的流, 当 $n \geqslant 3$ 时, 系统地、完整地进行定性研究是极为困难的. 但是对周期时间扰动的平面可积系统所定义的三维流, 近年来获得了某些一般性结果. 其基本思想是通过已知的二维可积系统的全局知识, 去获取未知的扰动系统的全局信息. 为了系统地论述这方面的结果, 本章介绍可积系统的一些性质, 为后面几章作知识准备.

5.1　二维可积系统与作用-角度变量

考虑微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x_1, x_2), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \tag{5.1.1}$$

其中 f 为 C^r 函数, $r \geqslant 1$. 设系统 (5.1.1) 以原点为简单中心, 即在该点 $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} > 0$.

定义 5.1.1　*平面某区域 D 上所定义的实值函数 $\psi(x_1, x_2) \in C^{r+1}$ 称为系统 (5.1.1) 的积分, 沿着 (5.1.1) 的每条解曲线, $\psi(x_1, x_2)$ 等于常数. 又若 $\psi(x_1, x_2)$ 存在, 称系统 (5.1.1) 在 D 内可积.*

Markus 曾证明, 如果域 D 不含充满螺线的区域, 以及没有极限的分界线, 则 (5.1.1) 在 D 内存在全局积分, 从而具有全局的积分因子 $\mu(x_1, x_2)$, 使方程

$$f_1(x_1, x_2)dx_2 - f_2(x_1, x_2)dx_1 = 0 \tag{5.1.2}$$

在乘以 $\mu(x_1, x_2)$ 后, 化为恰当微分方程. 由于 $(\mu f_1)_{x_1} + (\mu f_2)_{x_2} \equiv 0$, 因此, (5.1.1) 右端若乘以 $\mu(x_1, x_2)$, 即化为全微分方程, 又称 Hamilton 系统.

以下设在包含原点 (0,0) 的域 D 内, 系统 (5.1.1) 存在一系周期解:

$$L^h : x_1 = x_1^h(t), \quad x_2 = x_2^h(t). \tag{5.1.3}$$

当 $h \to h_2$ 时, L^h 或延展到无穷远, 或以某些过鞍点的分界线环为极限边界曲线.

1963 年, 陈翔炎在 Markus 的上述结果的基础上证明了

定理 5.1.1 方程 (5.1.2) 的积分因子 $\mu(x_1, x_2)$ 沿 (5.1.1) 的任一解 (5.1.3) 取值时, 可表示为

$$\begin{aligned}&\mu(x_1(t), x_2(t))\\&= \mu(x_1(0), x_2(0)) \exp\left\{-\int_0^t \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1(t), x_2(t)) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1(t), x_2(t))\right] dt\right\}.\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

证 由于 $\mu(x_1, x_2)$ 是 (5.1.2) 的积分因子, 故

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[\mu(x_1, x_2) f_1(x_1, x_2)] + \frac{\partial}{\partial x_2}[\mu(x_1, x_2) f_2(x_1, x_2)] \equiv 0.$$

因此

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial \mu}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2) = -\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right) \mu(x_1, x_2),$$

即

$$\frac{d\mu(x_1(t), x_2(t))}{dt} = -\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right] \mu(x_1, x_2).$$

对上式关于 t 积分, 即得 (5.1.4). □

和陈翔炎几乎同时, 俄国数学家 Mel′nikov 也证明了积分因子的存在性和公式 (5.1.4), 此外还证明了以下定理.

定理 5.1.2 存在于整个域 D 内双方单值的 C^r 映射 $u = u(x_1, x_2), v = v(x_1, x_2)$ 将可积系统 (5.1.1) 化为 Hamilton 系统

$$\dot{u} = H_v(u, v), \quad \dot{v} = -H_u(u, v), \tag{5.1.5}$$

其中积分 $H = H(u, v)$ 称为 Hamilton 量.

根据上述定理, 我们可以先对 Hamilton 系统进行研究, 然后再结果应用和推广到较一般的可积系统.

Hamilton 系统又称保守系统, 因为沿着 $H(u, v)$ 的等位线, H 的改变等于零. 二维保守系统有以下的一般性质:

(I) 保守系统的平衡点不可能渐近稳定或完全不稳定, 因此二阶 Hamilton 系统所存在的有限远奇点, 只可能是中心、鞍点或退化鞍点.

(II) 保守系统的指标为 +1 的孤立平衡点邻域内所有轨道必是周期轨道, 平衡点必是中心, 闭轨道填满相平面上某个区域, 以无穷远或过鞍点的分界线环 (同宿或异宿圈) 作为边界.

(III) 保守系统具有保持相面积 (“二维相体积”) 的不变性, 即满足众所周知的 Liouville 定理.

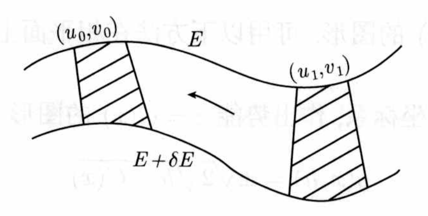


图 5.1.1 两个曲边梯形元

事实上, 考虑相空间位于两能量曲线之间的两个小曲边梯形元, 如图 5.1.1 所示, Liouville 定理指出, 两个小面积相等. 考虑系统 (5.1.5), 令 (u_0,v_0) 与 (u_1,v_1) 为在时间 t_0 与 t_1 的两个相点, 对于小的时间增量 $\delta t, t_1=t_0+\delta t$,

$$u_1=u(t_0+\delta t)=u_0+\delta t\cdot\frac{\partial}{\partial v}H(u_0,v_0)+O(\delta t^2),$$

$$v_1=v(t_0+\delta t)=v_0+\delta t\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial u}H(u_0,v_0)\right)+O(\delta t^2). \tag{5.1.6}$$

将 u_1,v_1 看作 (u_0,v_0) 的函数, 而 $t_0,\delta t$ 固定, 则有 Jacobi:

$$\frac{\partial(u_1,v_1)}{\partial(u_0,v_0)}=\begin{vmatrix}1+\delta t\dfrac{\partial^2 H}{\partial u_0\partial v_0} & \delta t\dfrac{\partial^2 H}{\partial v_0^2}\\ -\delta t\dfrac{\partial^2 H}{\partial u_0^2} & 1-\delta t\dfrac{\partial^2 H}{\partial u_0\partial v_0}\end{vmatrix}+O(\delta t^2)=1+O(\delta t^2). \tag{5.1.7}$$

(5.1.7) 即说明保面积性.

作为例子, 考察最简单的保守系统

$$\ddot{x}+g(x)=0 \tag{5.1.8}$$

或其等价方程组

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-g(x).$$

记 $G(x)=\displaystyle\int_0^x g(\zeta)d\zeta$, 则 (5.1.8) 有 Hamilton 积分

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+G(x)=h. \tag{5.1.9}$$

在力学上, $\dfrac{1}{2}y^2$ 表示动能, $G(x)$ 表示作用力作功的负值, 即位能, h 表示能量常数. 由 (5.1.9) 可见, 轨线有以下特点:

(i) 相轨线关于 x 轴对称, 因 (5.1.9) 中以 $-y$ 换 y, 方程不变;

(ii) x 轴 ($y=0$) 是轨线的铅垂等倾线 (x 轴上的奇点例外);

(iii) 对于使 $g(x_i)=0$ 的 x_i, 直线 $x=x_i$ 为轨道的水平等倾线.

如果给定势能 $G(x)$ 的图形, 可用以下方法在相平面上绘出 (5.1.8) 的轨线图形. 其方法如下:

(1°) 以 x, z 为直角坐标系, 作出势能 $z = G(x)$ 的图形. 由于

$$y(x,h) = \pm\sqrt{2}\sqrt{h - G(x)}, \tag{5.1.10}$$

显然, 在 $x - z$ 平面上给定总能量 $z = h_i$, 则动能为 $h_i - G(x)$. 故若 $h_i - G(x) < 0$ 就不可能有相对运动 (见图 5.1.2).

(2°) 对应于 $z = G(x)$ 的极小值, 相轨线退化为中心型奇点; 对应于 $z = G(x)$ 的极大值, 相轨线退化为鞍点型奇点; 若在 $z = G(x)$ 的曲线上, $G'(x) = g(x) = 0$, 但 $z = G(x)$ 不取极值, 则该点对应于退化鞍点.

(3°) 绘出 $z = G(x)$ 曲线后, 在 $x - z$ 平面上连续改变 $z = h_i, i = 1, 2, \cdots$ 之值, 可得一族相轨线.

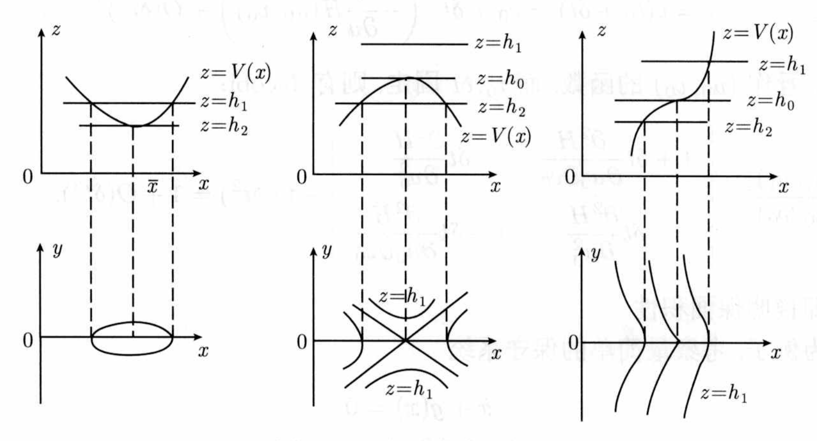


图 5.1.2　能量曲线和相图

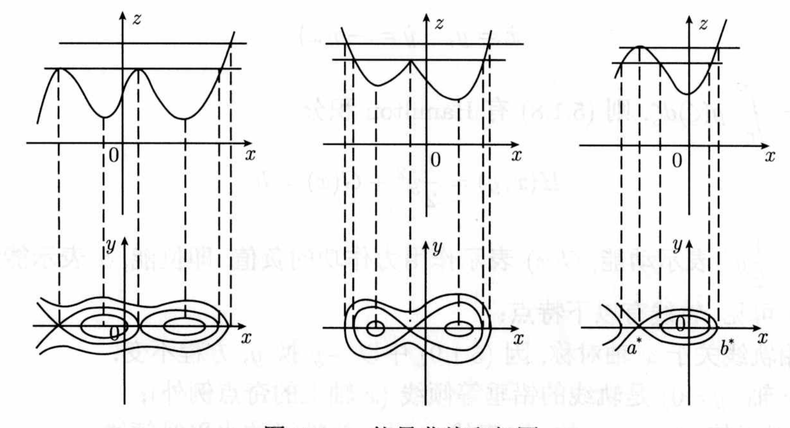


图 5.1.3　能量曲线和相图

对于 Hamilton 系统, 坐标变量的选取常常导致问题的简化. 下面要介绍的作用一角度变量 (对高维情形, 称辛变量) 的引入, 使得具有周期解族的 Hamilton 系统的研究在理论上可进行简化.

由 (5.1.10) 可见, $y(x,h)$ 具有多值性, 有时给研究带来不便. 我们引入变量 (I,θ), 使其具有性质:

(i) 每条相曲线在域 D 内唯一地由 I 确定, 且沿着每条曲线 $I=$ 常数;

(ii) 相曲线上每个点由 θ 单值地确定.

在这样的 (I,θ) 坐标下, 闭曲线 $H(x,y)=h$ 变成了常数 $I=$Constant 曲线, 而 Hamilton 方程化为形式:

$$\dot{I}=-\frac{\partial H}{\partial \theta}=0, \quad \dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial I}. \tag{5.1.11}$$

这种坐标系称为作用一角度坐标系. (I,θ) 坐标系和 (x,y) 坐标系有何关系呢? 考虑解析系统

$$\dot{x}=\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}, \quad \dot{y}=-\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}. \tag{5.1.12}$$

设 (5.1.12) 有中心型奇点 $O(0,0)$, 包围 O 的一族闭轨线为 $\{\Gamma^h\}$, 它们填满一个区域 D_0, $M_0(x_0,y_0)$ 为异于 O 的 D_0 中任一点, 用微分方程

$$\frac{d\alpha}{ds}=H_\alpha(\alpha,\beta), \quad \frac{d\beta}{ds}=H_\beta(\alpha,\beta) \tag{5.1.13}$$

来定义过 M_0 的轨线 Γ^{h_0} 的正交直线段 $L=\{x=\alpha(s), y=\beta(s)\}$, 其中 $\alpha(0)=x_0, \beta(0)=y_0$. 容易证明, 存在区间 (s_1,s_2), 当 $s_1<s<s_2$ 时, (5.1.12) 的闭轨道 Γ^h 与 L 仅相交一次. 兹用 $\Gamma^h_s(x_0(t,s),y_0(t,s))$ 表示 (5.1.12) 的满足条件 $x_0(0,s)=\alpha(s), y(0,s)=\beta(s)$ $(s_1<s<s_2)$ 的解.

设 $t=0$ 时, Γ^h_s 的初始点位于直线 L 上, 用 $\phi(x,y)$ 记 Γ^h_s 从 M 开始运动到 Γ^h_s 上点 (x,y) 的时间, 于是 $\phi=\phi(x,y)$ 与 $s=s(x,y)$ 满足关系

$$x_0(\phi,s)-x=0, \quad y_0(\phi,s)-y=0. \tag{5.1.14}$$

(5.1.14) 满足隐函数存在定理的条件, 因此, 由 (5.1.14) 可解出 ϕ, s 作为 x,y 的函数, 解析地依赖于 x,y. 在关系式

$$\begin{aligned}&\phi(x_0(t+\Delta t),y_0(t+\Delta t))-\phi(x_0(t),y_0(t))=\Delta t,\\&S(x_0(t+\Delta t),y_0(t+\Delta t))-S(x_0(t),y_0(t))=0.\end{aligned} \tag{5.1.15}$$

两边同除 Δt, 令 $\Delta t\to 0$, 求全导数, 立即推得

$$\begin{aligned}&\frac{d\phi}{dt}=\phi_x(x,y)H_y(x,y)-\phi_y(x,y)H_x(x,y)=1,\\&\frac{ds}{dt}=S_x(x,y)H_y(x,y)-S_y(x,y)H_x(x,y)=0.\end{aligned} \tag{5.1.16}$$

记 (5.1.12) 的首次积分为 $H(x,y)=h$, Γ_s^h 的周期为 $T=T(h)$, 兹令

$$I=I(h)=\frac{1}{2\pi}\int_{h_0}^{h}T(\zeta)d\zeta,\quad \theta=2\pi\frac{\phi(x,y)}{T(h)},\tag{5.1.17}$$

其中 $h_0=H(0,0)$, 函数 θ 是多值的, 但其偏导数唯一确定. 由 (5.1.16) 得

$$\begin{aligned}&\theta_x(x,y)H_y(x,y)-\theta_y(x,y)H_x(x,y)=\frac{2\pi}{T(h)},\\&I_x(x,y)H_y(x,y)-I_y(x,y)H_x(x,y)=0.\end{aligned}\tag{5.1.18}$$

于是在 (I,θ) 变量下, 由 (5.1.18) 得

$$\dot\theta=\frac{2\pi}{T(I)}\equiv\Omega(I),\quad \dot I=0.\tag{5.1.19}$$

注意到 $\oint_{\Gamma_s^h}y(x,h)dx$ 表示 Γ_s^h 内的面积 A. 在 (I,θ) 平面上, 面积为 $A=\int_0^{2\pi}Id\theta=2\pi I$, 即作用变量 I 正比于 Γ^h 内的面积, 往往用这个性质来定义作用变量

$$I(h)=\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma^h}y(x,h)dx.\tag{5.1.20}$$

(5.1.20) 反过来定义了 $h=h(I)$. 又因为 $\dot\theta=\dfrac{\partial H}{\partial I}=\left(\dfrac{dI}{dh}\right)^{-1}=2\pi\left(\dfrac{dA}{dh}\right)^{-1}$, 而周期 $T(h)=\dfrac{2\pi}{\dot\theta}$, 故 $T=\dfrac{dA}{dh}$, 由此可见 (5.1.20) 与 (5.1.17) 的定义是一致的.

例 5.1.1　设 (5.1.9) 中 $G(x)=v\mathrm{tg}^2\alpha x$, 于是

$$I=\frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_2}[2(h-U\mathrm{tg}^2\alpha x)]^{1/2}dx\quad\left(\mathrm{tg}^2\alpha x_2=\frac{h}{U},x_1=-x_2\right),$$

故 $\alpha I=[2(h+U)]^{1/2}-[2U]^{1/2}$, 当 $h=0$ 时, $I=0$, 由上式反解立即得 $h=h(I)=\alpha I[\alpha I+2\sqrt{2U}]/2$,

$$\omega=\dot\theta=\frac{\partial H}{\partial I}=\alpha[\alpha I+\sqrt{2U}].$$

于是 (5.1.19) 此时具体化为

$$\dot\theta=2[\alpha I+\sqrt{2U}],\quad \dot I=0.$$

对于 Hamilton 扰动系统

$$\begin{aligned}\dot x&=\frac{\partial H}{\partial y}+\varepsilon f(x,y,t,\varepsilon),\\\dot y&=-\frac{\partial H}{\partial x}+\varepsilon g(x,y,t,\varepsilon),\end{aligned}\tag{5.1.21}$$

引入作用 — 角度变量后, 研究系统的稳定性是十分方便的. 此时, 由 (5.1.16) 可见, 系统可化为形式

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \varepsilon(I_x f + I_y g) = \varepsilon F(I,\theta,t,\varepsilon),\\ \dot{\theta} &= \frac{2\pi}{T(I)} + \varepsilon(\theta_x f + \theta_y g) = \Omega(I) + \varepsilon G(I,\theta,t,\varepsilon).\end{aligned} \tag{5.1.22}$$

5.2 等变动力系统的定义和例子

动力系统的分枝与对称性有着密切的联系, 1978 年, Marsdan 说过 "虽然具有对称性的系统不是通有的, 但作为分枝点, 仍起着关键性作用, 这就是为什么在所有的 Hamilton 系统类中, 具有对称性的系统如此重要的原因." 作为自然现象的模型, 具有对称性的动力系统是普遍存在的. 一般的连续动力系统理论, 研究微分方程解的典型的, 或通有的动力学行为. 具有对称结构的动力系统是全体动力系统空间中的一个小子集合, 并且是高度退化的. 然而, 对称系统作为全体动力系统空间中的分叉点, 具有丰富的动力学行为, 必须认真研究. 系统的对称性通过对称群来描述. 首先我们叙述群论中的某些基本的结果.

定义 5.2.1 非空集合 X 到自身的一个一一映射称为置换. X 的一切置换全体 S_X 形成一个群, 称为 X 上的完全对称群. S_X 的任意子群称为 X 上的变换群.

定义 5.2.2 设 G 是 X 上的变换群, Y 是 X 的子集, 如果对一切 $g \in G$, 有 $g(Y) = Y$, 则称 Y 为 G 不变的或不变的.

给定一个变换群 G, 我们能求出 X 的所有 G 不变的子集 Y, 群 G 叫做 Y 的不变群或对称群, 类似地, 给出 X 的子集 Y, 我们可以找出一个子群 $K = \{g \in G | g(Y) = Y\}$, 不难证明 K 是一变换群, Y 是 X 的 K 不变子集, 通常称 K 是 Y 的 G 对称性群或对称群.

下面是对称群的例子.

例 5.2.1 对称群 S_n, n 为正整数.

设 n 个元素构成的集合记作 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$, S_n 是 X 到 X 的一切置换构成的群, 阶数为 $n!$, 它是 X 的完全对称群.

例 5.2.2 旋转群 (或实特殊正交群)$SO(2)$.

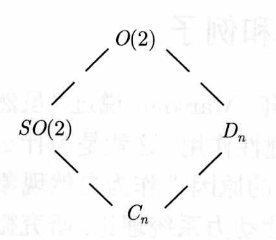
在欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 上引进直角坐标 (x, y), 则 $SO(2)$ 就是所有绕原点 (0,0) 的旋转变换组成, 它的元素 T_ψ 由连续参数 ψ(旋转角,$\psi \in \mathbf{R}$) 所决定. 其中 ψ 从正 x 轴算起. 注意 $T_\psi = T_{\psi+2\pi}$.

例 5.2.3 平面绕原点旋转 $2\pi/q$ 的变换生成的阶为 q 的群就是循环群 Z_q, 它是 $SO(2)$ 的一个子群.

例 5.2.4 实正交群 (旋转反射群)$O(2)$.

在平面 $\mathbf{R}^2$ 上绕原点的所有旋转变换和关于 x 轴的反射变换生成的群即是 $O(2)$.

例 5.2.5　$O(2)$ 中使正 n 边形不变的所有旋转和反射变换组成的子群即是 D_n. 它是正 n 边形的对称群. 不难验证, D_n 由旋转变换 $T2\pi/n$ 和关于 x 轴的反射变换 h 生成 (这时取坐标原点在正 n 边形的中心, x 轴在过原点的一条对称轴上), 阶数为 $2n$.



以上各个对称群的包含关系可用左面的图来显示.

群是通过表示论才在自然科学中得到广泛的应用的. 下面我们就来看以上一些群的表示.

设 V 是一实或复的向量空间, 而 V 映射到自身上的所有非奇异线性变换所组成的群, 则记为 $GL(V)$.

定义 5.2.3　群 G 到 $GL(V)$ 的同态 $T: g \to T(g)$, 称为群 G 在 V 上的表示, V 叫做表示空间, V 的维数称为表示的维数.

以上例子中的对称群的生成元都是旋转变换或反射变换. 所以只要找到旋转和反射的表示就可得例子中各对称群的表示.

考虑平面上的旋转群 $O(2)$, 它有无穷多个实的二维表示

$$R_K(\theta) = \begin{pmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

和反射表示

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

它们都是关于基 $\underline{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵表示.

现在选取复坐标: $\underline{f_1} = \dfrac{e_1 + ie_2}{\sqrt{2}}$, $\underline{f_2} = \overline{\underline{f_1}} = \dfrac{e_1 - ie_2}{\sqrt{2}}$ 及酉矩阵

$$U = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{i}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

则对角化 $R_K(\theta)$ 和 H:

$$T_k(\theta) = UR_k(\theta)U^* = \begin{pmatrix} e^{ik\theta} & 0 \\ 0 & e^{-ik\theta} \end{pmatrix},$$

$$K = UHU^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

如果原来的向量空间是实的, 则向量 $W = z_1\underline{f_1} + z_2\underline{f_2}$ 是实的充要条件是 $z_1 = \overline{z_2}$, 故我们可以利用坐标 z 和 $\overline{z}$. $SO(2)$ 及反射 K 在 z 和 $\overline{z}$ 上的群作用是

$$\begin{aligned} &Kz = \overline{z}, \quad K\overline{z} = z, \\ &T_k(\theta)z = e^{ik\theta}z, \quad T_k(\theta)\overline{z} = e^{-ik\theta}\overline{z}. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

设 $G = GL(n, \mathbf{R})$ 是元素为实数的一切 $n \times n$ 可逆矩阵的集合, 矩阵的乘法为群运算, 则 $GL(n, \mathbf{R})$ 也是一个群, 称为一般线性群, 简记为 $GL(n)$. 倘若群 G 具有 r 维光滑流形结构, 使得群运算和逆元运算是流形之间的光滑映射, 则称 G 为 r 参数 Lie 群.

定义 5.2.4 设 G 是一个作用在 $\mathbf{R}^n$ 上的紧 Lie 变换群. 映射 $\Phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 称 G-等变的, 倘若对一切 $g \in G$ 和 $x \in \mathbf{R}^n$, 等式 $\Phi(gx) = g\Phi(x)$ 成立. 一个向量场 $\dot{x} = f(x), x \in \mathbf{R}^n$, 称为是 G-等变的或对称的, 倘若映射 f 是一个 G-等变的映射.

定义 5.2.5 映射 $\Phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 称 G-不变的, 倘若对一切 $g \in G$ 和 $x \in \mathbf{R}^n$, 等式 $\Phi(gx) = \Phi(x)$ 成立.

定义 5.2.6 对 $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $G_{x_0} = \{gx_0 | g \in G\}$ 称为 x_0 的群轨道.

考虑下面的实平面系统

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{E}$$

其中 P, Q 充分光滑.

令 $z = x + iy, \overline{z} = x - iy$, 则 (E) 变为

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = F(z, \overline{z}), \\ \dfrac{d\overline{z}}{dt} = \overline{F(z, \overline{z})}, \end{cases}$$

其中 $F(z, \overline{z}) = P\left(\dfrac{z+\overline{z}}{2}, \dfrac{z-\overline{z}}{2i}\right) + iQ\left(\dfrac{z+\overline{z}}{2}, \dfrac{z-\overline{z}}{2i}\right)$.

注意, 如果由 (E) 定义的向量场 (P, Q) 具有对称性, 则存在某个对称群 G, 使得

$$T_G(P, Q) = (P, Q)T_G,$$

其中 T_G 是 G 在 $\mathbf{R}^2$ 的一个表示. 从而有

引理 5.2.1　(E) 的对称性对应于 (E) 的右边关于某对称群的等变性.

根据引理 5.2.1, 为求在 Z_q 下不变的平面系统的一般形式, 就是求群 Z_q 的等变映射 $(F,\overline{F})$, 即要求

$$T_{2\pi/q}(F,\overline{F})=(F,\overline{F})T_{2\pi/q}.$$

由 (5.2.1) 知, 此式等价于

$$e^{i\frac{2\pi}{q}}F(z,\overline{z})=F(e^{i\frac{2\pi}{q}}z,e^{-\frac{2\pi}{q}i}\overline{z}). \tag{5.2.2}$$

把 F 展成 $z,\overline{z}$ 的幂级数:

$$F(z,\overline{z})=\sum_{r,s}A_{r,s}z^r\overline{z}^s,\quad A_{r,s}\text{为复数}. \tag{5.2.3}$$

把 (5.2.3) 代入 (5.2.2) 得

$$e^{i\frac{2\pi}{q}}\sum_{r,s}A_{r,s}z^r\overline{z}^s=\sum_{r,s}A_{r,s}e^{i\frac{r-s}{q}2\pi}z^r\overline{z}^s. \tag{5.2.4}$$

(5.2.4) 成立的充要条件是 $e^{i\frac{2\pi}{q}}=e^{i\frac{r-s}{q}2\pi}$. 因此当且仅当 r,s 满足下面的关系:

$$r-s=1+kq,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{5.2.5}$$

上式可改写为

$$\begin{aligned}&s=r-(qk+1),\quad k=1,2,\cdots,\\&r=s+(qk+1),\quad k=0,1,2,\cdots.\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

从而有定理

定理 5.2.1　*Z_q 等变的实平面系统 (E) 对应的 $(\widetilde{\mathrm{E}})$ 中的 $F(z,\overline{z})$ 必为下面的形式:*

$$F(z,\overline{z})=\sum_{k=1}g_k(|z|^2)\overline{z}^{qk-1}+\sum_{k=0}h_k(|z|^2)z^{qk+1}, \tag{5.2.7}$$

其中 $g_k(r)$ 和 $h_k(r)$ 都是 r 的复值可微函数, $q\geqslant 2$.

注　(1) 如果 F 还在反射变换 K 下是等变的, 即 $KF=FK$, 则 F 的形式 (5.2.7) 不变, 但此时 $g_k(r)$ 和 $h_k(r)$ 都是实函数, 即 F 的展式 (5.2.3) 中系数全为实数. 由前面的例可知, 此时 F 对二面体群 D_q 是等变的.

(2) 如果 F 还在反射变换 K 作用下满足 $KF=-FK$, 则 (5.2.7) 式不变, 但 (5.2.3) 中系数全为纯虚数. 此时由 F 决定的实系统 (E) 的相图在反射变换下不变, 但时间走向反向.

定义 5.2.7 $F(z,\overline{z})=\sum_{k=0}^{n}a_k|z|^{2k}zi$ 对应的系统称为平凡系统, 其中 a_k 为实数.

之所以称为平凡系统, 是因为它的对应实系统的相图是平凡的, 为一族闭轨线, 可能其中还有充满奇点的奇闭轨道.

推论 5.2.1 当 $q\geqslant n+2$ 时, Z_q 等变的平面 n 次 Hamilton 系统必为平凡系统. 换言之, 对于任何 n 次 Hamilton 系统的相图, 最多只具有旋转 $2\pi/(n+1)$ 非平凡不变性.

证 由于 $q\geqslant n+2$, 而系统为 n 次系统, 故由定理 5.2.1 可知, 该系统对应的 $F_n(z,\overline{z})$ 必为

$$F_n(z,\overline{z})=\sum_{k=0}^{m}A_k|z|^{2k}z,\quad 2m+1\leqslant n,$$

其中 A_k 为复数. 又由于系统为 Hamilton 系统, 故

$$\frac{\partial F_n}{\partial z}+\frac{\partial\overline{F_n}}{\partial\overline{z}}\equiv 0.$$

从而可知, A_k 为纯虚数 $(k=0,1,2,\cdots,m)$, 记 $A_k=a_k(a_k$ 为实数), 则可得推论的结果. □

考虑 n 次多项式系统

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=P_{n-1}(x,y)+P_n(x,y)=P(x,y),\\ \frac{dy}{dt}&=Q_{n-1}(x,y)+Q_n(x,y)=Q(x,y),\end{aligned}\tag{5.2.8}$$

其中 P_n,Q_n 是 x,y 的实 n 次齐多项式, P_{n-1},Q_{n-1} 是不含大于 $n-1$ 次的多项式, 原点是 (5.2.8) 的奇点之一.

引理 5.2.2 设 (5.2.8) 的右边满足条件:

(i) $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}\equiv 0$,

(ii) $xQ_n(x,y)-yP_n(x,y)$ 定正或定负.

则 (5.2.8) 的首次积分 $H(x,y)=h$ 所对应的相轨线族中, 存在一系列包围 (5.2.8) 的全部有限远奇点的大范围闭分支 $\{\Gamma^h\}$, 在 Poincaré 映射圆盘上, 不存在无穷远奇点, 赤道 $z=0$ 是闭轨线.

以下对 $n=2$ 和 $n=3$ 情形作具体的讨论. 对 $n=2$, 有

定理 5.2.2 对于平面二次 Hamilton 系统, 非平凡的 Z_q-等变性只可能是 $q=3$, 此时拓扑相图有两种, 如图 5.2.1 所示.

证 当 (5.2.8) 为二次系统时, 对应的 $F(z,\overline{z})$ 为 $z,\overline{z}$ 的二次多项式. 由定理 5.2.1 知, 当 $q=2$ 或 >3 时, $F(z,\overline{z})$ 退化为 $z,\overline{z}$ 的一次式; 当 $q=3$ 时, 即

旋转 $2\pi/3$ 的二次系统对应的 $F(z,\overline{z}) = A_1\overline{z^2} + A_2 z(A_1, A_2$ 为复数). 又系统为 Hamilton 的充要条件是 $\dfrac{\partial F}{\partial Z} + \dfrac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}} \equiv 0$, 从而可知 A_2 为纯虚数, 旋转 $2\pi/3$ 不变的二次 Hamilton 系统对应的 $F(z,\overline{z}) = A_1\overline{z}^2 + azi$, 其中 A_1 为复数 $\neq 0$, a 为实数. 令变换 $z = \lambda z_1, t = \mu\tau$, 则适当选取 λ(复数) 和 μ(实数) 可使 $\dfrac{dF}{dt} = F(z,\overline{z})$ 变为 $\dfrac{dz_1}{d\tau} = \overline{z_1^2} + bz_1 i(b \geqslant 0)$, 故只需考虑系统 $\dfrac{dz}{dt} = \overline{z^2} + azi(a \geqslant 0)$ 的相图. 写为实系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ay + x^2 - y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = ax - 2xy, \end{cases} \quad a \geqslant 0.$$

经过简单的奇点分析不难得出图 5.2.1 的图形. □

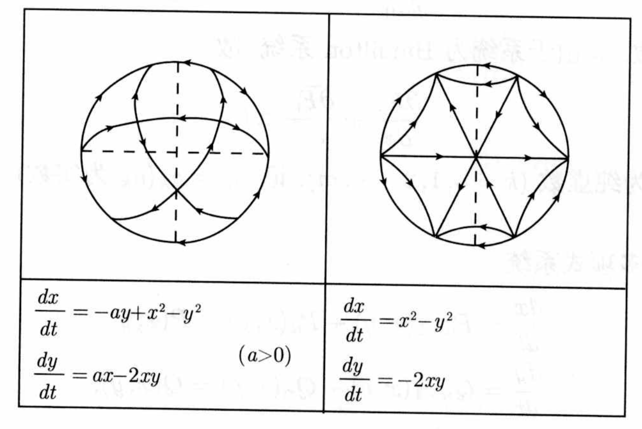


图 5.2.1 Z_3-等变的二次系统

对 $n = 3$ 情形, 一般地有

定理 5.2.3 (i) 当 $q > 4$ 时, Z_q 等变的三次 Hamilton 系统必为平凡系统;

(ii) Z_4-等变的三次 Hamilton 系统所对应的 $F(z,\overline{z})$ 为: $F(z,\overline{z}) = (A_1 + A_2|z|^2)z + A_3\overline{z}^3$, 非平凡系统对应的拓扑相图有六种 (图 5.2.2).

(iii) Z_3 等变的三次 Hamilton 系统对应的 $F(z,\overline{z})$ 为

$$F(z,\overline{z}) = (A_1 + A_2|z|^2)z + A_3\overline{z}^2,$$

非平凡系统的拓扑相图有四种 (图 5.2.3).

(iv) Z_2 等变的三次 Hamilton 系统对应的 $F(z,\overline{z})$ 为

$$F(z,\overline{z}) = (A_1 + A_2|z|^2)z + (A_3 + A_4|z|^2)\overline{z} + A_5\overline{z}^3 - \frac{1}{3}\overline{A_4}z^3,$$

在 (ii)~(iv) 中, A_1, A_2 为纯虚数, 其他 A_j 为复数.

证 (i) 是推论 5.2.1 的直接结果.

(ii)~(iv) 中的 $F(z,\overline{z})$ 的表达式可由定理 5.2.1 及 $\dfrac{\partial F}{\partial z}+\dfrac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}}\equiv 0$ 得出. □

Z_4-等变的非平凡系统为

$$\frac{dz}{dt}=(a+b|z|^2)zi+A_3\overline{z}^3,$$

其中 a,b 为实数, $A_3\neq 0$ 为复数.

若 $a=0$, 则与定理 5.2.3 的证明类似, 经过适当的坐标变换与时间变换, 可直接讨论等价系统:

$$\frac{dz}{dt}=b|z|^2zi+\overline{z}_i^3,\quad b\geqslant 0.$$

写为实系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y[(1+b)y^2+(b-3)x^2],\\ \dfrac{dy}{dt}=x[(1+b)x^2+(b-3)y^2],\end{cases}\qquad b\geqslant 0.$$

由奇点分析及引理 5.2.2 即可得图 5.2.2 的 (a),(b),(c).

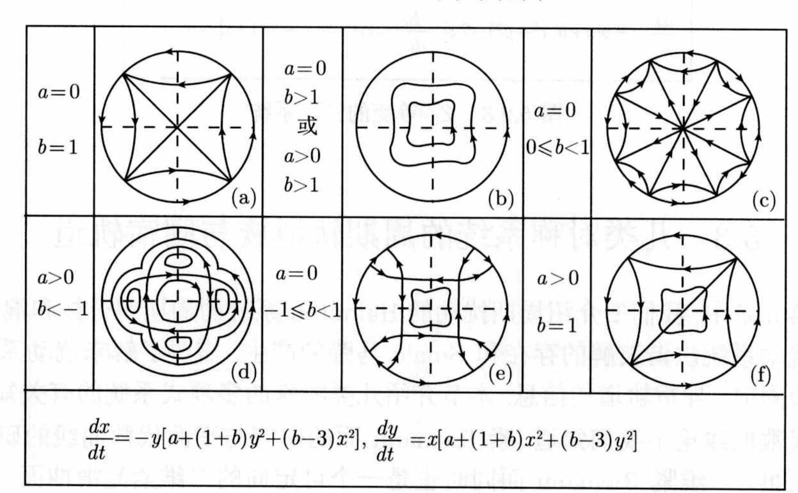


图 5.2.2 Z_4-等变的三次系统

若 $a\neq 0$, 同样可经变换化为讨论系统:

$$\frac{dz}{dt}=(a+b|z|^2)zi+\overline{z^3}i,\quad a>0.$$

对应的实系统为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y[a+(1+b)y^2+(b-3)x^2],\\ \dfrac{dy}{dt}=x[a+(1+b)x^2+(b-3)y^2],\end{cases}\qquad a>0.$$

由奇点分析及引理 5.2.2 可得图 5.2.2 的 (b),(d),(e),(f).

对 Z_3-等变的三次 Hamilton 系统进行同样的讨论可得图 5.2.3 的相图.

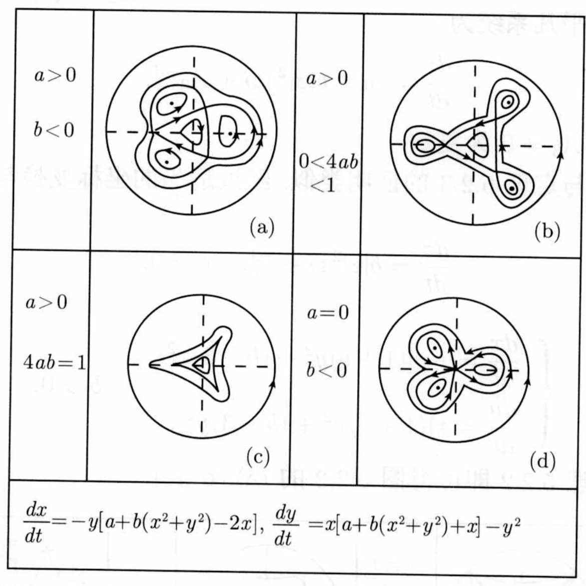


图 5.2.3　Z_3-等变的三次系统

5.3　几类对称系统的周期轨道族与同宿轨道

在第 6 章中, 我们要介绍周期扰动的 Hamilton 系统的周期解分枝和混沌理论. 为研究扰动系统次谐波解的存在和 Smale 马蹄的产生, 需要了解未扰动系统的周期轨道和同宿、异宿轨道的信息. 本节介绍几类特殊的多项式系统的有关知识.

在代数曲线论中我们知道, 紧 Riemann 面的研究与平面代数曲线的研究实际上是一回事. 二维紧 Riemann 面同时也是一个可定向的二维紧光滑曲面. 而任何可定向的二维紧流形都同胚于一个具有若干环柄的球面, 柄的个数 g 是一个拓扑不变量, 称为亏格. 例如: 球面的亏格 $g=0$, 环面的亏格 $g=1$, 双环面的亏格 $g=2$ 等等.

对于平面代数曲线, 有亏格公式 $g=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}-\delta$, 其中 n 为代数曲线的次数, δ 为二重点的个数. 由代数曲线论可知: 亏格 $g=0$ 的曲线是有理曲线, 在实平面直角坐标下, 曲线的 x,y 坐标可表示为一个参数的有理函数; $g=1$ 的平面代数曲线的 x,y 坐标线可表示为二参数的有理函数或椭圆函数的有理形式. 亏格等于 1 的平面代数曲线又称椭圆曲线, 它们一般是三次代数曲线; 亏格 $g\geqslant 2$ 的曲线

的参数表示问题尚未解决.

首先讨论平面二次 Hamilton 系统, 其一般形式为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Bx^2 + 2cxy + Dy^2 + 2Fx + 2Gy + I, \\ \dfrac{dy}{dt} = -(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ex + 2Fy + H). \end{cases} \tag{5.3.1}$$

其 Hamilton 量是三次代数曲线族

$$Ax^2 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 + 3Hx + 3Iy + K = 0. \tag{5.3.2}$$

对系统 (5.3.1) 可证以下命题:

命题 5.3.1 (i) (5.3.1) 的有限远奇点的指标只可能是 $+1, -1, 0, -2$, 且当指标等于 -2 时, (5.3.1) 为齐二次系统, 仅存在唯一的奇点;

(ii) 系统 (5.3.1) 至少存在一个无穷远奇点;

(iii) 系统 (5.3.1) 不存在连结退化鞍点的同宿轨道;

(iv) 系统 (5.3.1) 的异宿轨道中至少有一条是直线;

(v) 系统 (5.3.1) 不可能只有两个中心, 换言之, 若 (5.3.1) 有一个中心点, 则必存在其他有限远奇点.

将两个系统按照以下三条进行分类: (i) 有限远, 无穷远奇点数目不同; (ii) 奇点数目相同, 但指标分布不同; (iii) 指标分布相同, 但轨线结构不同, 对于系统 (5.3.1) 可得到其不同的拓扑图形 22 类.

特别, 对于至少具有一个指标为 $+1$ 的系统 (5.3.1), 若其轨线关于 x 轴对称, 则有

定理 5.3.1 若系统 (5.3.1) 至少有一个指标为 $+1$ 的奇点, 且轨线关于 x 轴对称, 则该系统可化为标准形式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(1 - 2lx), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + ly^2 + nx^2. \end{cases} \tag{5.3.3}$$

系统 (5.3.3) 的积分为

$$H(x, y) = y^2(1 - 2lx) + x^2 - \frac{2}{3}nx^3 = h. \tag{5.3.4}$$

在 (n, l)-参数平面上研究 (5.3.3) 的不同图形, 可归结为图 5.3.1 中八类. 其同宿与异宿轨道及周期轨道方程由表 5.3.1、表 5.3.2 确定.

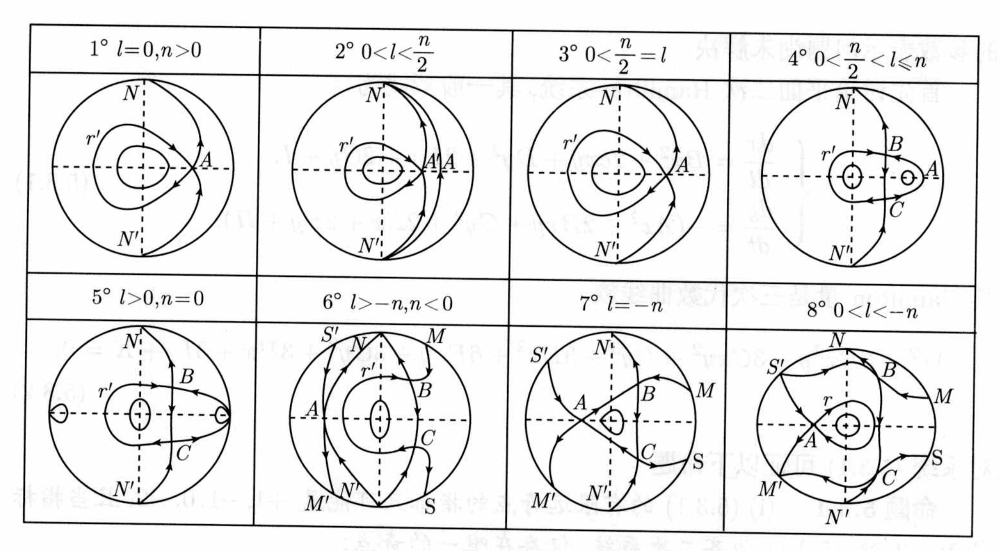


图 5.3.1　平面二次对称 Hamilton 系统的相图

下面的表 5.3.1 列出了系统 (5.3.3) 的同宿与异宿轨道方程的参数表示.

表 5.3.1

参数	Hamilton 量	轨道方程
1° $l=0$ $n>0$	$H(x,y)=\dfrac{1}{3n^2}$	$x_0(t)=\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{3}{2}\text{sech}^2\dfrac{t}{2}\right),y_0(t)=\dfrac{3}{2n}\text{th}\dfrac{t}{2}\text{sech}^2\dfrac{t}{2}$
2° $0<l<\dfrac{n}{2}$	$H(x,y)=\dfrac{1}{3n^2}$	$x_0(t)=\dfrac{1}{n}\left[1-\dfrac{3(n-2l)}{a\text{ch}\beta t-b}\right],y_0(t)=\dfrac{3\beta\text{th}\dfrac{\beta}{2}t}{a\text{ch}\beta t-b}$ 其中 $a=n+l,b=5l-n,\beta=\left(\dfrac{n-2l}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ $a^2-b^2=12l(n-2l)>0$
3° $0<\dfrac{n}{2}=l$	$H(x,y)=\dfrac{1}{3n^2}$	$x_0(t)=\dfrac{1}{2l}\left[1-\dfrac{12}{3t^2+8}\right],y_0(t)=\dfrac{3t}{l(3t^2+8)}$
4° $0<\dfrac{n}{2}<l$ $\leqslant n$	$H(x,y)$ $=\dfrac{1}{4l^2}\left(1-\dfrac{n}{3l}\right)$	$x_0(t)=\dfrac{1}{2l}\left[1-\dfrac{b(2l-n)}{a\text{ch}\beta t-b}\right],y_0(t)=\dfrac{1}{2l}\left(\dfrac{a\beta\text{ch}\beta t}{a\text{ch}\beta t-b}\right)$ $a=[3(3l-n)(l+n)]^{1/2}$, $b=3(n-l),\beta=\left(\dfrac{2l-n}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$

续表

参数	Hamilton 量	轨道方程
5° $l>0$ $n=0$	$H(x,y)=\dfrac{1}{4l^2}$	$x_0(t)=\dfrac{1}{2l}\left(1-2\mathrm{sech}^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right),y_0(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2l}\mathrm{th}\dfrac{\sqrt{2}}{2}t$
6° $l>-n$ $n<0$	同4°	方程同4°, 但$a^2-b^2<0$
7° $l=-n$	$H(x,y)=\dfrac{1}{3l^2}$	$x_0(t)=\dfrac{1}{2l}\left[1-\dfrac{3}{2}\left(1-\mathrm{th}\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$ $y_0(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{4l}\left(\mathrm{th}\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+1\right)$
8° $0<l<n$	同2°	方程同2°, 但$a^2-b^2<0$

为确定系统 (5.3.3) 的闭轨道方程, 对于情形 $1°,3°$, 当 $h\in\left(0,\dfrac{1}{3n^2}\right)$ 时方程

$$\frac{2n}{3}x^3-x^2+h=0$$

恒有三个不同实根, 记

$$\theta=\theta(h)=\arccos(1-6n^2h),$$

这三个根可写为

$$x_1=\frac{1+\cos\theta/3}{2n},\quad x_2=\frac{1+\sqrt{3}\sin\dfrac{\theta}{3}-\cos\dfrac{\theta}{3}}{2n},\quad x_3=\frac{1-\sqrt{3}\sin\dfrac{\theta}{3}-\cos\dfrac{\theta}{3}}{2n}.$$

显然, 当 $n>0$ 时, $x_1>x_2>x_3$; 而当 $n<0$ 时, $x_1<x_2<x_3$. 与图 5.3.1 中八种情形对应, 利用标准的椭圆积分的计算, 可得表 5.3.2 所示的闭轨道方程及周期公式.

表 5.3.2

系数域	闭轨线方程	周期 T 及其范围	参数
1°)	$x(t)=x_3+(x_2-x_3)\mathrm{sn}^2\Omega t$	$\dfrac{2K(k)}{\Omega}$	$k=\sqrt{\dfrac{x_2-x_3}{x_1-x_3}},k\in(0,1)$
$l=0$	$y(t)=2(x_2-x_3)\Omega\mathrm{sn}\Omega t\mathrm{cn}\Omega t\mathrm{dn}\Omega t$	$(2\pi,\infty)$	$\Omega=\sqrt{\dfrac{n(x_1-x_3)}{6}}$
$n>0$	$x\in[x_3,x_2]$		$h\in\left(0,\dfrac{1}{3n^2}\right)$

续表

系数域	闭轨线方程	周期 T 及其范围	参数
2°) $0<l<\dfrac{n}{2}$	i) $x(t)=\dfrac{S+\alpha A^2\mathrm{sn}^2\Omega t}{1+A^2\mathrm{sn}^2\Omega t}, x\in[x_3,x_2]$ $y(t)$ $=\dfrac{2(\alpha-S)A^2\Omega\mathrm{sn}\Omega t\mathrm{cn}\Omega t\mathrm{dn}\Omega t}{1+A^2\mathrm{sn}^2\Omega t[(1-2l\delta)+(1-2l\alpha)A^2\mathrm{sn}^2\Omega t]}$	$\dfrac{2K(k)}{\Omega}$	$k=\sqrt{\dfrac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}}$ $\Omega=\sqrt{\dfrac{l(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{3}}$ $A=\sqrt{\dfrac{\gamma-\delta}{\alpha-\gamma}}$
	其中 $0<l\leqslant\dfrac{n}{3}$时, $h\in\left(0,\dfrac{1}{3n^2}\right)$	$(2\pi,\infty)$	$\alpha=\dfrac{1}{2l},\beta=x_1$ $\gamma=x_2,\delta=x_3$
	其中 $\dfrac{n}{3}<l<\dfrac{n}{2}$时 如 $h\in\left(0,\dfrac{3l-n}{12l^3}\right)$	$\left(2\pi,2\pi\sqrt{\dfrac{l}{n-2l}}\right)$	$\alpha=x_1,\beta=\dfrac{1}{2l}$ $\gamma=x_2,\delta=x_3$
	其中 $\dfrac{n}{3}<l<\dfrac{n}{2}$时 如 $h\in\left(\dfrac{3l-n}{12l^3},\dfrac{1}{3n^2}\right)$	$\left(2\pi\sqrt{\dfrac{l}{n-2l}},\infty\right)$	$\alpha=\dfrac{1}{2l},\beta=x_1$ $\gamma=x_2,\delta=x_3$
	ii) $x(t)=\dfrac{3(3l-n)-A\cos(\Omega t)}{2l[3(n-l)-A\cos\Omega t]}$ $y(t)=\dfrac{A\Omega\sin\Omega t}{2l[3(n-l)-A\cos\Omega t]}$ $x\in[x_3,x_2]$	$2\pi\sqrt{\dfrac{l}{n-2l}}$	$\dfrac{n}{3}<l<\dfrac{n}{2}$ 且$h=\dfrac{3l-n}{12l^3}$ $A=$ $\sqrt{(3l-n)(3l+3n)}$ $\Omega=\sqrt{\dfrac{n-2l}{l}}$
3°) $l=\dfrac{n}{2}>0$	同2°)i)	$\dfrac{2K(k)}{\Omega}$ $(2\pi,\infty)$	K,Ω,A 同2°)i) $h\in\left(0,\dfrac{1}{12l^2}\right)$ $\alpha=x_1,\beta=\dfrac{1}{2l}$ $\gamma=x_2,\delta=x_3$
4°) $0<\dfrac{n}{2}<l$	i)左族 $x\in[x_3,x_2]$ 方程同2°)i)	$\dfrac{2K(k)}{\Omega}$ $(2\pi,\infty)$	K,Ω,A 同2°) i) $h\in\left(0,\dfrac{3l-n}{12l^3}\right)$ $\alpha=x_1,\beta=\dfrac{1}{2l}$ $\gamma=x_2,\delta=x_3$
	ii) 右族 $x\in[x_2,x_1]$ $x(t)=\dfrac{\beta-\gamma A^2\mathrm{sn}^2\Omega t}{1-A^2\mathrm{sn}^2\Omega t}$ $y(t)$ $=\dfrac{2(\beta-\gamma)A^2\Omega\mathrm{sn}\Omega t\mathrm{cn}\Omega t\mathrm{dn}\Omega t}{(1-A^2\mathrm{sn}^2\Omega t)[(1-2l\beta)-(1-2l\gamma)A^2\mathrm{sn}^2\Omega t]}$	$\dfrac{2K(k)}{\Omega}$ $\left(2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2l-n}},\infty\right)$	K,Ω 同2°)i) $h\in\left(\dfrac{3l-n}{12l^3},\dfrac{1}{3n^2}\right)$ $A=\sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}$ $\alpha=x_1,\beta=x_2$ $\gamma=1/2l,\delta=x_3$

续表

系数域	闭轨线方程	周期 T 及其范围	参数
5°) $n=0$ $l>0$	$x(t)=\dfrac{k^2}{2l(2-k^2)}(2\mathrm{sn}^2\Omega t-1), x\in[-\sqrt{h},\sqrt{h}]$ $y(t)=\dfrac{k^2\Omega\mathrm{sn}\Omega t\mathrm{cn}\Omega t}{l\mathrm{dn}\Omega t}$	$\dfrac{2K(k)}{\Omega}$ $(2\pi,\infty)$	$K=\sqrt{\dfrac{4l\sqrt{h}}{1+2l\sqrt{h}}}$ $\Omega=\dfrac{1}{\sqrt{2(2-k^2)}}$ $h\in\left(0,\dfrac{1}{4l^2}\right), k\in(0,1)$
6°) $l>-n>0$	$x(t)=\dfrac{\gamma-\delta A^2\mathrm{sn}^2\Omega t}{1-A^2\mathrm{sn}^2\Omega t}\quad x\in[x_3,x_2]$ $y(t)=\dfrac{2(\gamma-\delta)A^2\Omega\mathrm{sn}\Omega t\mathrm{cn}\Omega t\mathrm{dn}\Omega t}{(1-A^2\mathrm{sn}^2\Omega t)[(1-2l\gamma)-(1-2l\delta)A^2\mathrm{sn}^2\Omega t]}$	$\dfrac{2K(k)}{\Omega}$ $(2\pi,\infty)$	$K=\sqrt{\dfrac{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}}$ $\Omega=\sqrt{\dfrac{-nl(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{3}}$ $A=\sqrt{\dfrac{\beta-\gamma}{\beta-\delta}}$ $h\in\left(0,\dfrac{3l-n}{12l^3}\right)$ $\alpha=\dfrac{1}{2l},\beta=x_1$ $\gamma=x_2,\delta=x_3$
7°) $l=-n>0$	同6°)	同6°)	同6°), $h\in\left(0,\dfrac{1}{3l^2}\right)$
8°) $0<l<-n$	同6°)	同6°)	同6°), $h\in\left(0,\dfrac{1}{3n^2}\right)$

注: 表 5.3.2 中, sn$u$, cn$u$, dn$u$ 是 Jacobi 椭圆函数, 而 $K(k)$ 与 $E(k)$ 为第一、二类完全椭圆积分, k 表示椭圆积分之模.

如果系统 (5.3.1) 至少有一个指标为 +1 的奇点, 且关于中心对称, 则 (5.3.1) 可化为方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-cy^2+\dfrac{1}{4c},\\ \dfrac{dy}{dt}=ax^2-\dfrac{1}{4a}.\end{cases}\tag{5.3.5}$$

其 Hamilton 量为

$$H(x,y)=\frac{1}{3}cy^3+\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{4c}y-\frac{1}{4a}x=h.\tag{5.3.6}$$

此时 (5.3.5) 的相图见图 5.3.2. 连结鞍点 D 的同宿轨道方程为

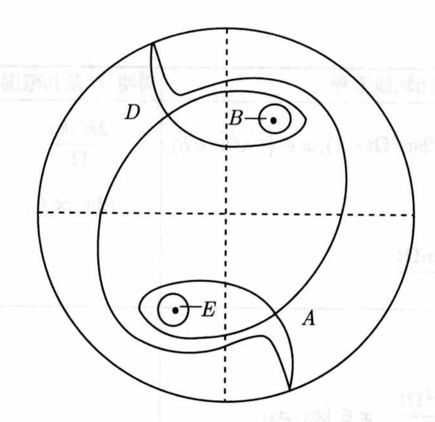


图 5.3.2　中心对称的二次系统

$$\left\{\begin{array}{l} x_D(t)=\dfrac{3\mathrm{ch}\dfrac{t}{2}}{2\left(a\mathrm{ch}^3\dfrac{t}{2}+c\mathrm{sh}^3\dfrac{t}{2}\right)}-\dfrac{1}{2a}, \\ y_D(t)=\dfrac{3\mathrm{sh}\dfrac{t}{2}}{2\left(a\mathrm{ch}^3\dfrac{t}{2}+c\mathrm{sh}^3\dfrac{t}{2}\right)}+\dfrac{1}{2c}. \end{array}\right. \tag{5.3.7}$$

引入变量

$$x=\frac{1}{2a_1}\zeta+\eta,\quad y=\frac{\zeta}{2c_1}-\frac{a_1}{c_1}\eta, \tag{5.3.8}$$

其中 $a_1=a^{\frac{1}{3}}$, $c_1=c^{\frac{1}{3}}$.

引入记号

$$p_1=\frac{3(a_1^4-c_1^4)}{16c_1^8a_1^4},\quad p_2=\frac{3(a_1^4+c_1^4)}{2a_1^4c_1^4},\quad p_3=\frac{a_1^4-c_1^4}{4a_1^4c_1^4},$$

$$F_1(\zeta)=(\alpha-\zeta)(\zeta-\beta)(\zeta-\gamma)(\zeta-\delta)=p_1+12h\zeta+p_2\zeta^2-\zeta^4,$$

对于 (5.3.5) 的周期轨道, 可求得方程

$$\zeta(t)=\delta+\frac{\alpha+\delta}{1+e^2\mathrm{sn}^2\Omega t},\eta(t)=\frac{1}{2a_1^2\zeta(t)}\left[\frac{d\zeta(t)}{dt}-\frac{a_1^4-c_1^4}{4c_1^4a_1^3}\right], \tag{5.3.9}$$

其中 $\Omega=\dfrac{2a_1c_1}{\sqrt{3}g},g=\dfrac{2}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}},k^2=\dfrac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)},e^2=\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\delta}.$

于是由 (5.3.8) 即得周期轨道 $x(t),y(t)$ 的表达式.

以下讨论对称三次 Hamilton 系统. 设平面三次 Hamilton 系统具有对称于相平面上 x 轴的首次积分:

$$H(x,y) = a_{40}x^4 + a_{22}x^2y^2 + a_{04}y^4 + a_{30}x^3 + a_{12}xy^2 + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 = h, \quad (5.3.10)$$

则系统的一般形式为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y} = 2y(a_{22}x^2 + 2a_{04}y^2 + a_{12}x + a_{02}), \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -a_{12}y^2 - 2x(2a_{40}x^2 + a_{22}y^2 + \frac{3}{2}a_{30}x + a_{20}). \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

如再 $a_{30} = a_{12} = 0$, 即 (5.3.10) 关于 x, y 轴都对称. 令 $a_{20}x \to x, \sqrt{|a_{20}a_{02}|}y \to y, 2\sqrt{|a_{20}a_{02}|}t \to t$, 则 (5.3.1) 可化为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(1 + bx^2 + cy^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x(\pm 1 + ax^2 + by^2). \end{cases} \quad (5.3.12)$$

若 $b \neq 0$, 再对 (5.3.12) 作变换 $\sqrt{|b|}x \to x, \sqrt{|b|}y \to y$, (5.3.12) 可以化简为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(1 \pm x^2 + cy^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x(\pm 1 + ax^2 \pm y^2). \end{cases} \quad (5.3.13)$$

由于 (5.3.13) 中 $\dot{x} = y(1 - x^2 + cy^2), \dot{y} = x(1 - ax^2 + y^2)$ 可经过 x 与 y 互换而化成为 $\dot{x} = y(1 + x^2 - ay^2), \dot{y} = x(1 + cx^2 - y^2)$, 因此对应于 (5.3.12) 只需研究下述五个系统:

$$\text{(A)} \begin{cases} \dot{x} = y(1 + x^2 + cy^2), \\ \dot{y} = -x(1 + ax^2 + y^2); \end{cases}$$

$$\text{(B)} \begin{cases} \dot{x} = y(1 - x^2 + cy^2), \\ \dot{y} = -x(1 + ax^2 - y^2); \end{cases}$$

$$\text{(C)} \begin{cases} \dot{x} = y(1 + x^2 + cy^2), \\ \dot{y} = x(1 - ax^2 - y^2); \end{cases}$$

$$\text{(D)} \begin{cases} \dot{x} = y(1 + cy^2), \\ \dot{y} = -x(1 + ax^2); \end{cases}$$

$$\text{(E)} \begin{cases} \dot{x} = y(1 + cy^2), \\ \dot{y} = x(1 - ax^2). \end{cases}$$

对两参数系统 (A)~(E) 在参数平面上作详细分析我们得到

定理 5.3.2 具有关于 x, y 轴对称的轨线的平面三次 Hamilton 系统, 如果至少有两个中心, 存在以下 12 类拓扑结构, 如图 5.3.3 所示.

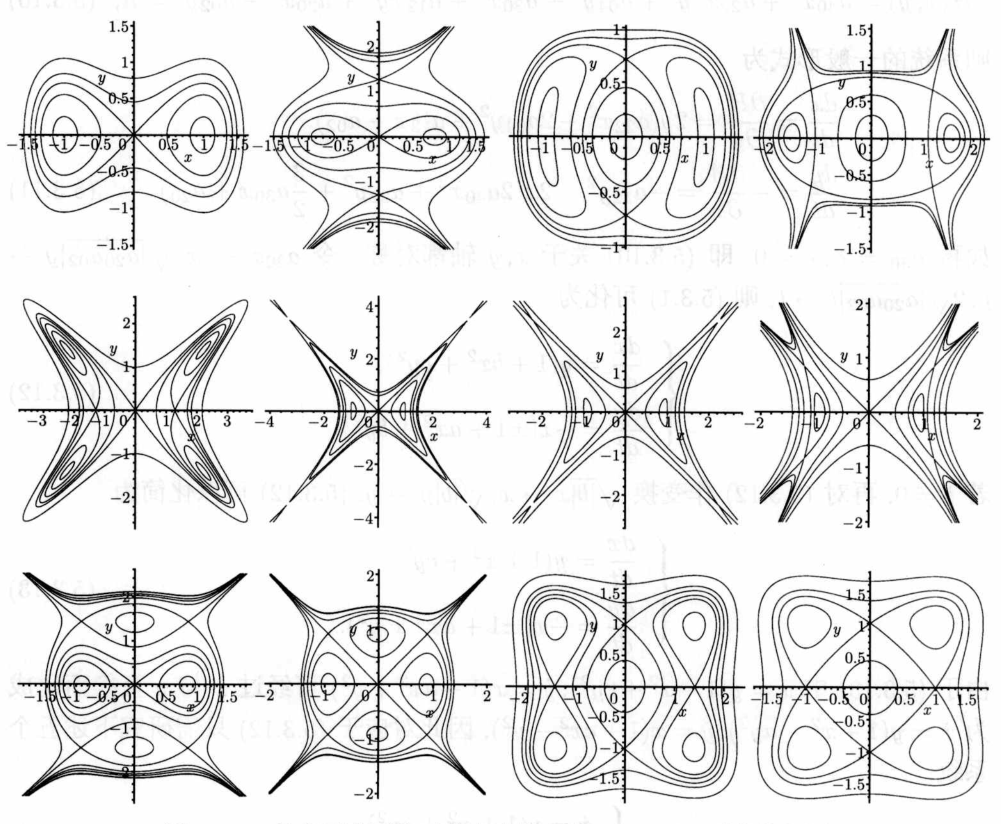


图 5.3.3 具有至少两个对称中心的三次 Hamilton 系统的相图

对于图中所列的大部分同宿与异宿轨线, 我们可计算它们的参数方程, 鉴于篇幅不再列出.

5.4 周期解族周期的单调性

近年来, 关于 Hamilton 系统周期轨道族的周期的单调性问题, 日愈引起人们的注意, 这时因为对于周期受迫的 Hamilton 扰动系统, 未扰动系统周期的单调性是产生次谐波分枝的重要非退化性条件 (见第 6 章). 另一方面, 周期的单调性还与非线性反应扩散方程的静态解分枝和某些边值问题的存在唯一性有关. 与具有单调变换周期的闭轨道族相对照, 若周期轨道族的周期恒不改变, 此时闭轨道族所围

的中心型奇点称等时中心, 涉及等时中心的讨论也已经有许多文章研究过, 本书主要关心的是周期的单调性, 对后一问题不准备详论.

首先, 考虑平面二次 Hamilton 系统的周期映射, 我们有

定理 5.4.1 平面二次 Hamilton 系统周期解的周期映射必是单调的.

证 根据平面二次系统的叶彦谦分类法, 具有周期解的平面二次 Hamilton 系统恒可化为形式

$$\dot{x} = y(1 + ay - 2lx), \quad \dot{y} = -x + ly^2 + nx^2. \tag{5.4.1}$$

(5.4.1) 有通积分

$$H(x, y) = 3(x^2 + y^2) - 2nx^3 - 6lxy^2 + ay^3 = h. \tag{5.4.2}$$

引入极坐标 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 容易证明, 通过相似变换与旋转变换 (5.4.2) 可化为

$$H(x, y) = L(r, \theta) = 3r^2 + r^3 M(\theta) = h \tag{5.4.3}$$

的形式, 其中 $M(\theta)$ 为含两参数的 $\cos\theta, \sin\theta$ 的三次多项式, 且可使 $M(\theta) = \min M(\theta) = -2$. 而 (5.4.1) 在极坐标下有方程

$$\frac{dr}{dt} = -r^2 \frac{dM(\theta)}{d\theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = 3(2 + rM(\theta)). \tag{5.4.4}$$

此时, (1,0) 是 (5.4.4) 的奇点. (5.4.3) 中 $h \in (0, 1)$. 对于 (5.4.4) 的周期轨道, 有

$$T(h) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3(2 + r(\theta, h)M(\theta))}, \quad h \in (0, 1), \tag{5.4.5}$$

$$\frac{dT(h)}{dt} = -\frac{1}{9}\int_0^{2\pi} \frac{M(\theta)d\theta}{r(\theta, h)(2 + r(\theta, h)M(\theta))^3}. \tag{5.4.6}$$

记 $I^+ = \{\theta \in (0, 2\pi) | M(\theta) > 0\}$, $I^- = \{\theta \in (0, 2\pi) | M(\theta) < 0\}$. 显然 $I^- = \{\theta \in (0, 2\pi) | (\theta + \pi) \bmod (2\pi) \in I^+\}$. 令 $r_1 = r(\theta, h), r_2 = r(\theta + \pi, h), M_1 = M(0) = -M(\theta + \pi) = -M_2, \theta \in I^+$, 则

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{1}{9}\left(\int_{I^+} \frac{M_1 d\theta}{r_1(2 + r_1 M_1)^3} - \int_{I^+} \frac{M_1 d\theta}{r_2(2 + r_2 M_2)}\right). \tag{5.4.7}$$

由于 $M_1 = -M_2 > 0, r_1^2(3 + r_1 + M_1) = r_2^2(3 + r_2 M_2)$ 故 $r_1 < r_2$ 及 $r_1^2(2 + r_1 M_1) > r^2(2 + r_2 M_2)$, 由此推出 (5.4.6) 中被积函数恒大于零, 从而 $T'(h) > 0$, 这就证明了 $T(h)$ 的单调性.

现在, 考虑系统 (5.1.8), 设 $g(x)$ 足够光滑. 由 5.1 节的讨论可知, 如果存在 $a < 0 < b$, 使得 $G(a) = G(b) = h$, 而当 $a < x < b$ 时, $G(x) < h$ 且 $g(a)g(b) \neq 0$, 则

存在 (5.1.8) 的周期轨道围绕原点 (0,0), 在相平面上有 Hamilton 能量 h, 且轨线交 x 轴于 $(a,0),(b,0)$. 用 $p(h)$ 记这条轨道的周期. 则当 h 改变时, 周期函数 $p(h)$ 有公式

$$p(h)=\sqrt{2}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{h-G(x)}}. \tag{5.4.8}$$

显然, 若 $g\in c^r, r\geqslant 1$, 则 $p(h)\in c^r$.

以下介绍 Chow 和 Wang(1986) 获得的有关结果. 设 $g(0)=0$, 并假设

(H_1) 存在 $-\infty\leqslant a^*<0<b^*\leqslant+\infty$, 整数 $N\geqslant 0$ 及正的光滑函数 $h(x)$, 使得

$$g(x)=x^{2n+1}h(x),\quad a^*<x<b^* \tag{5.4.9}$$

以及 $0<G(a^*)=G(b^*)=h^*\leqslant+\infty$.

在 (H_1) 假设下, 系统 (5.1.8) 的相图如图 5.1.2. $p(h)$ 对于每个 $0<h<h^*$ 有定义. 为简单起见, 令

$$r(x,h)=2(h-G(x)). \tag{5.4.10}$$

于是 $\dfrac{\partial r}{\partial x}=-2g(x), p(h)=2\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{r}}$, 其中 $a^*<a<0<b<b^*, r(a,h)=r(b,h)=0$, 若 $a<x<b, r(x,h)>0$. □

定理 5.4.2　设 (H_1) 成立, 则对每个 $0<h<h^*$,

$$hp'(h)=\int_a^b\frac{R(x)}{\sqrt{rg^2(x)}}dx, \tag{5.4.11}$$

其中 $a^*<a<0<b<b^*, G(a)=G(b)=h$, 且

$$R(x)=g^2(x)-2G(x)g'(x). \tag{5.4.12}$$

证　令 $I=\displaystyle\int_a^b\sqrt{r}dx,\quad J=\int_a^b(r-2h)\sqrt{r}dx$ 则有 $I'=\displaystyle\int_a^b\frac{1}{\sqrt{r}}dx,\quad J'=\int_a^b\frac{r-2h}{\sqrt{r}}dx=I-zhI'$. 从而 $J''=-I'-2CI''$. 另一方面, 对 J 右边分部积分得

$$J=\frac{2}{3}\int_a^b\frac{r-2h}{\left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)}dr^{3/2}=-\frac{2}{3}\int_a^b r^{3/2}d\frac{r-2h}{\left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)}$$

$$=-\frac{2}{3}\int_a^b\frac{r^{3/2}(g^2(x)-G(x)g'(x))}{g^2(x)}dx.$$

关于 h 微分上面等式两次, 得

$$J''=-2\int_a^b\frac{g^2(x)-G(x)g'(x)}{\sqrt{rg^2(x)}}dx.$$

于是我们有

$$2CI'' = 2\int_a^b \frac{g^2(x) - G(x)g'(x)}{\sqrt{rg^2(x)}}dx - I' = \int_a^b \frac{R(x)}{\sqrt{rg^2(x)}}dx. \tag{5.4.13}$$

注意到 $p(h) = 2I'$. 因此, 由 (5.4.13) 可推得 (5.4.11) 式. □

推论 5.4.1 若 (H_1) 成立, 且 $xg''(x) < 0$(或 >0), $x \neq 0, a^* < x < b^*$, 则 $p'(h) > 0$ (或 < 0),$0 < h < h^*$.

证 由于 $R'(x) = -2G(x)g''(x), R(0) = 0$, 故当 $x \neq 0$ 且 $a^* < x < b^*$ 时 $R(x) > 0(< 0)$. □

推论 5.4.2 若 (H_1) 成立且

$$\frac{R(x)}{g^3(x)} - \frac{R(A(x))}{g^3(A(x))} < 0(> 0), \quad a^* < x < 0,$$

其中, $R(x) = g^2(x) - 2G(x)g'(x), A(x)$ 由 $G(A(x)) = G(x)$ 定义, $a^* < x < 0, 0 < A(x) < b^*$, 则 $p'(h) > 0(< 0)$, $0 < h < h^*$.

证 根据隐函数定理, $A(x) \in C^1(a^*, 0)$, 并且

$$A'(x) = \frac{g(x)}{g(A(x))}, \quad a^* < x < 0.$$

对积分

$$\int_a^b \frac{R(x)}{\sqrt{rg^2(x)}}dx,$$

作变量替换 $x = A(y)$ 得

$$\int_0^b \frac{R(x)}{\sqrt{rg^2(x)}}dx = \int_0^a \frac{R(A(x))}{\sqrt{rg^2(A(x))}}A'(x)dx.$$

由定理 5.4.2 及上面的式子得

$$hp'(h) = \int_a^0 \frac{g(r)}{\sqrt{r}}\left[\frac{R(x)}{g^3(x)} - \frac{R(A(x))}{g^3(A(x))}\right]dx.$$

注意到当 $a^* < x < 0$ 时, $g(x) < 0$, 由上式及推论之条件即知, 推论 5.4.4 正确. □

推论 5.4.3 若 (H_1) 成立, 如果 $g'(0) > 0$ 且当 $x \neq 0, a^* < x < b^*$ 时有

$$H(x) = g^2(x) + \frac{g^n(0)}{3(g'(0))^2}g^3(x) - 2G(x)g'(x) > 0(< 0),$$

则当 $0 < h < h^*$ 时, $p'(h) > 0(< 0)$.

证　由 L'Hospital 法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{R(x)}{g^3(x)}=-\frac{1}{3}\frac{g''(0)}{(g'(0))^2}.$$

于是 $H(x)>0(<0)$ 意味着

$$\frac{R(x)}{g^3(x)}<-\frac{1}{3}\frac{g''(0)}{(g'(0))^2}<\frac{R(A(x))}{g^3(A(x))},\quad a^*<x<0$$

或

$$\frac{R(x)}{g^3(x)}>-\frac{1}{3}\frac{g''(0)}{(g'(0))^2}>\frac{R(A(x))}{g^3(A(x))},\quad a^*<x<0.$$

由于 $A(x)>0, x\in(a^*,0)$ 且当 $x\neq 0, x\in(a^*,b^*)$ 时, $xg(x)>0$, 根据推论 5.4.4 可知, $p'(h)>0\ (<0), 0<h<h^*$. □

推论 5.4.4　*若* (H_1) *成立且* $g'(0)>0$,

$$\nabla=5(g''(0))^2-3g'(0)g'''(0)>0\ (<0),$$

则存在 $\delta>0$, *使得*

$$p'(h)>0\ (<0),\quad 0<h<\delta.$$

证　由 Taylor 展开法, 当 $|x|\to 0$ 时,

$$H(x)=\frac{1}{12}x^4\nabla+O(|x|^5).$$

于是利用推论 5.4.3 可推出本推论的结论. □

命题 5.4.1　*设* (H_1) *成立, 又若* $g'(0)>0, g''(0)\geqslant 0$, *则对于* $x\neq 0, x\in(a_1,b_1)$, *由下面的每个条件都可推出* $H(x)>0$:

(i) $g''(x)>0$ *且* $\nabla(x)=x(g''(0)g'(x)-g'(0)g''(x))\geqslant 0,\ x\in(a,b)$, *其中* $a^*\leqslant a_1\leqslant b_1\leqslant b^*$;

(ii) $g''(x)>0, g'''(x)\leqslant 0, x\in(a_1,b_1), a^*\leqslant a_1\leqslant 0\leqslant b_1\leqslant b^*$;

(iii) $g''(x)<0, g'(x)\geqslant 0, 0\leqslant a_1<x<b_1\leqslant b^*$ *及* $H(a_1)\geqslant 0$;

(iv) $g'(x)\leqslant 0\quad 0<a_1<x<b_1\leqslant b^*$;

(v) $g''(x)<0, g'''(x)\geqslant 0, a^*\leqslant a_1<x<b_1<0$ *且* $H(a_1)\geqslant 0, H(b_1)\geqslant 0$.

利用命题 5.4.1 及上面的推论, 可以证明许多系统的周期解周期的单调性, 兹举例如下:

例 5.4.1　设 $g(x)=e^x-1, -\infty<x<+\infty$, 由于 $g'(x)=g''(x)=e^x>0, -\infty<x<+\infty, \nabla(x)=x(g''(0)g'(x)-g'(0)g''(x))\equiv 0$, 根据命题 5.4.1(i) 及推论 5.4.3, 有

$$p'(h)>0,\quad 0<h<+\infty.$$

例 5.4.2 设 $g(x)=x(x+1), -1<x<+\infty$, 则由于 $g''(x)=2, g'''(x)\equiv 0$, 根据命题 5.4.1(ii) 及推论 5.4.3, 有 $p'(h)>0, 0<h<h^*=\dfrac{1}{6}$. 因为 $h^*=\dfrac{1}{6}$ 对应于系统的同宿轨道, 故 $\lim\limits_{h\to h^*_-} p(h)=+\infty$.

例 5.4.3 设 $g(x)$ 为三次多项式. 考虑

(1) $g(x)=-(x+a)x(x-1), 0<a\leqslant 1, -a<x<1$;

(2) $g(x)=(x+a)x(x+1), 0<a\leqslant 1, -a<x<+\infty$;

(3) $g(x)=x(x^2+bx+1), 0\leqslant b<2, -\infty<x<+\infty$;

(4) $g(x)=x^3, -\infty<x<+\infty$.

情形 (1). $g(x)=-x^3+(1-a)x^2+ax$, 故

$$g''(x)=-6x+2(1-a),\quad g'''(x)=-6<0.$$

根据命题 5.4.1(ii),(iii),(iv) 及推论 5.4.3, $p'(h)>0, 0<h<h^*=G(-a)$.

情形 (2). $g(x)=x^3+(1+a)x^2+ax$.

$g''(x)=6x+2(1+a), g'''(x)=6>0$, 故当且仅当 $x>-\dfrac{1}{3}(1+a)$ 时, 有 $g''(x)>0$. 此外,

$$\begin{aligned}\Delta(x)&=x^2[6(1+a)x+4(1+a)^2-6a]\\&\geqslant x^2\left[6(1+a)\left(-\frac{1}{3}(1+a)\right)+4(1+a)^2-6a\right]\\&=x^2[2(1+a)^2-6a]\geqslant 0,\quad x>-\frac{1}{3}(1+a).\end{aligned}$$

根据命题 5.4.1(i)(v) 及推论 5.4.3, 有 $p'(h)>0, 0<h<h^*=G(-a)$.

情形 (3). 若 $b=0$, 则 $g(x)=x^3+x, g''(x)=6x$, 由推论 5.4.3 得 $p'(h)>0, 0<h<+\infty$. 如果 $b>\sqrt{\left(\dfrac{a}{10}\right)}$, 则 $\nabla=5(g''(0))^2-3g'(0)g'''(0)=20b^2-18>0$. 根据推论 5.4.3, 存在 $\delta>0$ 使得 $p'(h)>0, 0<h<\delta$. 另一方面, 可证 $\lim\limits_{h\to+\infty} p(h)\to 0$, 这说明 $p(h)$ 不单调.

情况 (4). $g''(x)=6x$. 根据推论 5.4.1, 有

$$p'(h)<0,\quad 0<h<+\infty.$$

对于周期不单调的系统, 一些论文研究了周期映射的临界点个数, 鉴于篇幅, 不再赘述.

第6章　Mel′nikov 方法: 扰动可积系统的混沌判据

Mel′nikov 方法实质上是一种测量技术. 它通过度量 Poincaré 映射的双曲不动点的稳定与不稳定流形之间的距离来确定系统是否存在横截同宿点, 从而导致 Smale 马蹄存在意义下的混沌. 在一定条件下, Mel′nikov 方法还可以研究系统的次谐波分枝等. 本章介绍与该方法有关的基本理论.

6.1　由更替法导出的 Mel′nikov 函数

本节和下面两节, 我们先介绍由 Chow, Hale 和 Mallet-Paret(1980) 发展的更替法所导出的 Mel′nikov 函数. 研究二阶方程

$$\ddot{x}+g(x)=\varepsilon(-\lambda\dot{x}+\mu f(t)), \tag{6.1.1}$$

其中 $0<\varepsilon\ll 1, f(t+1)=f(t), f, g$ 光滑, $g(0)=0, g'(0)=-r^2<0$. (6.1.1) 对应于微分方程组

$$\dot{x}=y,\qquad \dot{y}=-g(x)+\varepsilon(-\lambda\dot{x}+\mu f(t)). \tag{6.1.2}$$

设未扰动系统 $(6.1.1)_{\varepsilon=0}$ 存在同宿到双曲鞍点 $(0,0)$ 的同宿轨道 $\Gamma=\{(p(t),\dot{p}(t)), t\in(-\infty,+\infty)\}$. 记 $\overline{\Gamma}$ 为 Γ 的闭包. U 为 $\mathbf{R}^2$ 中包含 $\overline{\Gamma}$ 的开集. $\overline{\Gamma}\times\mathbf{R}$ 是 $(6.1.2)_{\varepsilon=0}$ 类似于“柱面”的不变集 (见图 6.4.1). 对于 $t_0\in\mathbf{R}, (x_0, y_0)\neq(0,0)$, $(x_0,y_0,t_0)\in\overline{\Gamma}\times\mathbf{R}$, 过点 (x_0,y_0,t_0) 的轨道盘旋于相“柱面”$\overline{\Gamma}\times\mathbf{R}$ 上, 当 $t\to\pm\infty$ 时, 趋于零. 设 $(p(\alpha),\dot{p}(\alpha))=(x_0,y_0)$, 则过 (x_0,y_0,t_0) 点的轨道方程为

$$(p(t-t_0+\alpha),\dot{p}(t-t_0+\alpha),t-t_0).$$

可以证明下面的结论成立:

命题 6.1.1　*存在 $\varepsilon_0>0,\eta>0$, 使得当 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 时, $(6.1.2)_\varepsilon$ 存在唯一的有界周期解 $\left(\phi(t,\lambda,\mu),\dfrac{\partial\phi}{\partial t}(t,\lambda,\mu)\right)$, 对于 $t\in\mathbf{R}, 0<\varepsilon<\varepsilon_0$, 有 $|\phi(t,\lambda,\mu)|<\eta, \phi(t,0,0)=0$, 并且 ϕ 关于参数 λ,μ 光滑.*

记 $\gamma(\lambda,\mu)=\left\{\left(\left(\phi(t,\lambda,\mu),\dfrac{\partial\phi}{\partial t}(t,\lambda,\mu),t\right),t\in\mathbf{R}\right)\right\}$, 由第 4 章所述的稳定流形定理所保证, 存在 $\gamma(\lambda)$ 唯一的稳定流形 $\gamma^s(\lambda,\mu)\subset\mathbf{R}^3$ 及唯一的不稳定流形 $\gamma^u(\lambda,\mu)\subset\mathbf{R}^3$.

问题: 对于已知的 $\bar{\Gamma}$ 的邻域 U 及参数 λ,μ, 在什么条件下有 $[\gamma^s(\lambda,\mu)\cap\gamma^u(\lambda,\mu)]\cap(U\times\mathbf{R})/\gamma(\lambda,\mu)\neq\varnothing$? 换言之, 在什么条件下有 (6.1.2) 的轨道 $\left\{\left(\left(\psi(t,\lambda,\mu),\dfrac{\partial\psi}{\partial t}(t,\lambda,\mu),t\right),t\in\mathbf{R}\right)\right\}\subset U\times\mathbf{R}$, 使得 $\psi(t,\lambda,\mu)\neq\phi(t,\lambda,u)$, 且当 $t\to\pm\infty$ 时, $\psi(t,\lambda,\mu)-\phi(t,\lambda,\mu)\to 0$.

记 $\mathbf{B}(\mathbf{R})=\{F:\mathbf{R}\to\mathbf{R},F$ 有界、连续$\}$. 对于 $F\in B(\mathbf{R})$, 定义范数 $|F|=\sup\limits_{t\in\mathbf{R}}|F(t)|$.

以下将 Fredholm 更替定理 (Chow, Hale(1982)) 推广为

引理 6.1.1 *若 $F\in\boldsymbol{B}(\mathbf{R})$, 则方程*

$$\ddot{z}+g'(p(t))z=F(t) \tag{6.1.3}$$

在 $\mathbf{B}(\mathbf{R})$ 上有解的充分必要条件为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{p}(t)F(t)dt=0. \tag{6.1.4}$$

若记 $\eta=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{p}^2dt$, 定义投影算子

$$\mathbf{P}F=\frac{1}{\eta}\dot{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{p}Fdt, \tag{6.1.5}$$

$\mathbf{P}:\mathbf{B}(\mathbf{R})\to\mathbf{B}(\mathbf{R})$. 于是引理 6.1.1 在算子记法下可述为: 当且仅当 $\mathbf{P}F=0$ 时, 存在初始值正交于 $(p(\dot{0}),\ddot{p}(0))$ 的唯一解 $\boldsymbol{K}F$. 算子

$$\mathbf{K}:(I-\mathbf{P})\mathbf{B}(\mathbf{R})\to\mathbf{B}(\mathbf{R})$$

是连续和线性的.

证 由于 $p(t)$ 满足方程组 $(6.1.2)_{\varepsilon=0}$, 因此变分方程

$$\ddot{z}+g'(p(t))z=0 \tag{6.1.6}$$

有解 $\dot{p}(t)$, 设 $q(t)$ 是 (6.1.6) 的另一个与 $\dot{p}(t)$ 线性无关的解, 它使 $(\dot{p},q)$ 的 Wronsky 行列式 $\mathrm{W}(\dot{p},q)=\dot{p}\dot{q}-\ddot{p}q=1$, 且 $q(0)=-\dfrac{1}{\ddot{p}(0)}$, $\dot{q}(0)=0$. 由常数变易公式可以得

到 (6.1.3) 的解为

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{p} & q \\ \ddot{p} & \dot{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \dot{p}(t) & q(t) \\ \ddot{p}(t) & \dot{q}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}(s) & -q(s) \\ -\ddot{p}(s) & \dot{p}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O \\ F(s) \end{pmatrix} ds,$$

即

$$z(t) = Aq(t) + B\dot{p}(t) + \int_0^t [\dot{p}(s)q(t) - \dot{p}(t)q(s)]F(s)ds. \tag{6.1.7}$$

由于 $(\dot{p}(t), \ddot{p}(t))$ 是 Γ 上的切向量, 当 $t \to \pm\infty$ 时, 它们趋于未扰动系统 $(6.1.2)_{\varepsilon=0}$ 的鞍点 (0,0) 的稳定与不稳定流形的切向量. 因此, 记 $\gamma = [-g'(0)]^{1/2}$, 则有

$$\lim_{t\to+\infty} (\dot{p}(t), \ddot{p}(t))e^{\gamma t} = \text{常向量},$$
$$\lim_{t\to-\infty} (\dot{p}(t), \ddot{p}(t))e^{-\gamma t} = \text{常向量}.$$

又由关系 $\dot{p}\dot{q} - \ddot{p}q = 1$ 及上面的极限关系得到

$$(q(t), \dot{q}(t))e^{-\gamma t} \to \text{常向量}, \quad \text{当 } t \to +\infty \text{时},$$
$$(q(t), \dot{q}(t))e^{\gamma t} \to \text{常向量}, \quad \text{当 } t \to -\infty \text{时}.$$

因此, 存在常数 K 使得

$$|\dot{p}(t)q(s)| \leqslant Ke^{-\gamma(t-s)}, \quad \text{当 } t, s \geqslant 0,$$
$$|\dot{p}(t)q(s)| \leqslant Ke^{\gamma(t-s)}, \quad \text{当 } t, s \leqslant 0.$$

由以上分析可见, 当且仅当满足条件

$$A = -\int_0^{+\infty} \dot{p}(s)F(s)ds \tag{6.1.8}$$

时, (6.1.7) 所确定的 $z(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界, 又当且仅当

$$A = \int_{-\infty}^0 \dot{p}(s)F(s)ds \tag{6.1.9}$$

时, $z(t)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有界. 因此, 若要求 $z(t)$ 在 $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ 上有界, 其充分必要条件为 (6.1.8) 与 (6.1.9) 同时成立, 即 (6.1.4) 成立. 从而

$$z(t) = B\dot{p}(t) - \dot{p}(t)\int_0^t q(s)F(s)ds + q(t)\int_{\pm\infty}^t \dot{p}(s)F(s)ds. \tag{6.1.10}$$

(6.1.10) 中最后一个积分下限 $+\infty$ 对应于 $t>0, -\infty$ 对应于 $t<0$. 注意到 (6.1.10) 中

$$z(0)=B\dot{p}(0)+Ag(0),\quad \dot{z}(0)=B\ddot{p}(0)+\dot{q}(0)\int_{\pm\infty}^{0}\dot{p}(s)F(s)ds. \tag{6.1.11}$$

若要求 $(z(0),\dot{z}(0))$ 与 $(\dot{p}(0),\ddot{p}(0))$ 正交, 只需

$$B[(\dot{p}(0))^2+(\ddot{p}(0))^2]=-\ddot{p}(0)\dot{q}(0)\int_{\infty}^{0}\dot{p}(s)F(s)ds. \tag{6.1.12}$$

对 $F\in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})$, (6.1.12) 式唯一地确定了常数 B. 显然 B 是 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})$ 上的连续线性泛函. (6.1.10) 式定义了算子 $\boldsymbol{K}, z=\boldsymbol{K}F$, 这个解连续, 在 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R})$ 上是线性的. □

以下考虑 $(6.1.2)_\varepsilon$ 的不同于 $\left(\phi(t,\lambda,\mu),\dfrac{\partial}{\partial t}\phi(t,\lambda,\mu)\right)$ 的解. 在 Γ 邻域内引入坐标变换

$$x=p(\alpha)+a\ddot{p}(\alpha),\quad y=\dot{p}(\alpha)-a\dot{p}(\alpha).$$

若 $(x(t),y(t))$ 是 $(6.1.2)_\varepsilon$ 的解, 存在唯一的 (α,a) 使得 $x(0)=p(\alpha)+a\ddot{p}(a), y(0)=\dot{x}(0)=\dot{p}(\alpha)-a\dot{p}(\alpha)$, 故可将解 $(x(t),y(t))$ 写为以下形式:

$$x(t)=p(t+\alpha)+z(t+\alpha),\quad \dot{x}(t)=y(t). \tag{6.1.13}$$

从而

$$x(t-\alpha)=p(t)+z(t). \tag{6.1.14}$$

将 (6.1.14) 代入 $(6.1.1)_\varepsilon$ 可得

$$\begin{aligned}\ddot{z}(t)+g'(p(t))z&=-\varepsilon\lambda\dot{z}(t)-\varepsilon\lambda\dot{p}(t)+\varepsilon\mu f(t-\alpha)+G(t,z)\\ &\stackrel{\text{def.}}{=\!=}F(t,z,\dot{z},\lambda,\mu,\alpha),\end{aligned} \tag{6.1.15}$$

其中

$$G(t,z)=-g(p(t)+z(t))+g'(p(t))z(t)+g(p(t))=O(|z|^2). \tag{6.1.16}$$

考虑 (6.1.15) 当 $t\to\pm\infty$ 时有界的解, 由 (6.1.10) 知, 在条件 $\boldsymbol{P}F=0$ 之下, 解 $z(t)$ 为

$$\begin{aligned}z(t)=&B\dot{p}(t)-\dot{p}(t)\int_0^t q(s)F(s,z(s),\dot{z}(s),\lambda,\mu,\alpha)ds\\ &+q(t)\int_{\pm\infty}^{t}\dot{p}(s)F(s,z(s),\dot{z}(s),\lambda,\mu,\alpha)ds.\end{aligned} \tag{6.1.17}$$

(6.1.17) 右边后一积分下限取 $-\infty$ 时, 表示当 $t \to -\infty$ 时 $(6.1.2)_\varepsilon$ 的一切有界解, 即初值在 $\gamma^u(\lambda,\mu)$ 上的一切解, 类似地, 积分下限为 $+\infty$ 时, 表示当 $t \to +\infty$ 时 $(6.1.2)_\varepsilon$ 的一切有界解, 即初值在 $\gamma^s(\lambda,\mu)$ 上的一切解.

综上所述, 若要 $(6.1.2)_\varepsilon$ 的过鞍形周期轨道的稳定流形与不稳定流形有交点, 即 $\gamma^s(\lambda,\mu)\cap\gamma^u(\lambda,\mu)/\gamma(\lambda,\mu)$ 不空, 其充分且必要条件为

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}F(\cdot,z,\dot{z},\lambda,\mu,\alpha)=0, \\ z=\boldsymbol{K}(I-\boldsymbol{P})F(\cdot,z,\dot{z},\lambda,\mu,\alpha). \end{cases} \tag{6.1.18}$$

应用隐函数定理可以证明, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<\varepsilon<\delta, |z|<\delta, |\dot{z}|<\delta, \alpha\in\mathbf{R}$ 时, 存在 (6.1.18) 中第二式的唯一解 $z^*(\lambda,\mu,\alpha), z^*$ 有关于 λ,μ 的足够光滑的导数, 且对于一切 $\alpha\in\mathbf{R}, z^*(0,0,\alpha)=0$. 再利用 $\boldsymbol{P}$ 的定义, 我们得到下面的定理:

定理 6.1.1 设 g, f 满足上述的条件, $z^*(\lambda,\mu,\alpha)$ 为 (6.1.18) 中第二式之解, 则存在 $\varepsilon_0>0, \delta>0$ 使得扰动系统 $(6.1.2)_\varepsilon$ 有唯一的解 $\phi(t,\lambda,\mu), t\in\mathbf{R}, 0<\varepsilon<\varepsilon_0$, 并满足 $|\phi(t,\lambda,\mu)|<\delta, \phi(t,0,0)=0$. 另一方面, 存在 $(6.1.2)_\varepsilon$ 的异于 $\phi(t,\lambda,\mu)$ 的解 $x(t,\lambda,\mu), t\in\mathbf{R}, 0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 使得

$$\begin{gathered} d(x(t,\lambda,\mu),\Gamma)<\delta, \\ |x(t,\lambda,\mu)-\phi(t,\lambda,\mu)|\to 0, \text{当 } t\to\pm\infty, \end{gathered}$$

其充分且必要的条件为 $x(t,\lambda,\mu)=p(t+\alpha)+z^*(\lambda,\mu,\alpha), x(t,0,0)=p(t+\alpha)$, 并且 λ,μ,α 满足关系式

$$\begin{aligned} G(\lambda,\mu,\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\eta}\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{p}(t)F(t,z^*(\lambda,\mu,\alpha)(t),\dot{z^*}(\lambda,\mu,\alpha)(t),\lambda,\mu,\alpha)dt \\ &= \varepsilon[-\lambda+\widetilde{h}(\alpha)\mu]+O(\varepsilon^2)=0, \end{aligned} \tag{6.1.19}$$

其中 $\eta=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}[\dot{p}(t)]^2dt, \quad \widetilde{h}(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{p}(t)f(t-\alpha)dt.$

注 (6.1.19) 所定义的积分 $G(\lambda,\mu,\alpha)$ 现在普遍称为 Mel′nikov 积分, 它确定了同宿分枝的参数值. 事实上, 定理 6.1.1 指出, 当且仅当 $G(\lambda_0,\mu_0,\alpha_0)=0$ 时, 点 $q=p(\alpha_0)+z^*(\lambda_0,\mu_0,\alpha_0)$ 是鞍点 $\phi(0,\lambda_0,\mu_0)$ 的同宿点. 如果还有条件 $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}G(\lambda_0,\mu_0,\alpha_0)\neq 0$, 则点 q 必为 $\phi(0,\lambda_0,\mu_0)$ 的横截点同宿点.

兹考虑 (6.1.19) 的解. 为此, 注意 $\widetilde{h}(\alpha)$ 是以 1 为周期的周期函数, 设在 $\alpha\in(0,1)$ 内, $\widetilde{h}(\alpha)$ 在 α_M 有最大值, 在 α_m 取最小值, 并满足

$$\widetilde{h}''(\alpha_M)<0, \quad \widetilde{h}''(\alpha_m)>0, \quad \widetilde{h}(\alpha_m)<\widetilde{h}(\alpha_M). \tag{6.1.20}$$

定理 6.1.2　存在 Γ 的邻域 U, 及由两直线 $C_M : \lambda = \widetilde{h}(\alpha_M)\mu$, $C_m : \lambda = \widetilde{h}(\alpha_m)\mu$, 它们将参数平面 (μ, λ) 划分为两对顶角域 S_1 与 S_2(图 6.1.1), 使得当 $(\mu, \lambda) \in S_1$ 时, $(6.1.1)_\varepsilon$ 的双曲周期解的稳定流形与不稳定流形在 $U \times \mathbf{R}$ 中不存在同宿点, 而当 $(\mu, \lambda) \in S_2$ 时, 至少存在一个横截同宿点.

证　令 $G(\lambda, \mu, \alpha) = -\varepsilon\lambda + \varepsilon\widetilde{h}(\alpha)\mu + O(\varepsilon^2) = 0$, 得到近似门槛曲线 $\dfrac{\lambda}{\mu} = \widetilde{h}(\alpha)$, 当且仅当 $\widetilde{h}(\alpha_m) < \dfrac{\lambda}{\mu} < \widetilde{h}(\alpha_M)$ 时, $G(\lambda, \mu, \alpha) = 0$ 才有简单零点, 由此即可推出定理 6.1.2 的结论. □

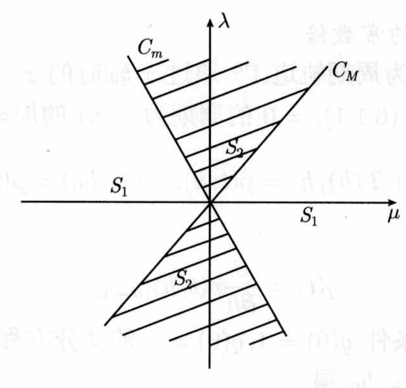


图 6.1.1　门槛曲线图

推论 6.1.1　由于 $f(t+1) = f(t)$, $\widetilde{h}(\alpha)$ 是周期 1 的函数, 因此, 当 $(\lambda, \mu) \in S_2$ 时, 稳定流形 $\gamma^s(\lambda, u)$ 与不稳定流形 $\gamma^u(\lambda, \mu)$ 在 $U \times \mathbf{R}$ 中有无穷多个横截同宿交点.

6.2　次谐波分枝的存在性及其与同宿分枝的关系

继续考虑 6.1 节中讨论的方程 (6.1.1). 对 f, g 的假设与 6.1 节相同, 设 $(6.1.1)_{\varepsilon=0}$ 的同宿轨道 Γ 内包含一系闭周期轨道 Γ^h, 其周期从某常数随参数单调地变化增加到无穷大. 因此对于 $k \in \mathbf{z}^+$, $(6.1.1)_{\varepsilon=0}$ 有非平凡的 k 周期轨道:

$$\Gamma_k^h = \{p^k(t), \dot{p}^k(t)\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant k.$$

为简单起见, 以下将忽略 Γ_k^h 的方程中的指标 k.

类似于 6.1 节的处理, 设 x 为 $(6.1.1)_\varepsilon$ 的在 Γ_k^h 近旁的 k 周期解, 可记为

$$x^k(t) = p^k(t+\alpha) + z^k(t+\alpha), \tag{6.2.1}$$

其中初值 $(z(\alpha), \dot{z}(\alpha))$ 正交于 $(\dot{p}(\alpha), \ddot{p}(\alpha))$.

用 t 代替 $t+\alpha$, 将 (6.2.1) 代入 $(6.1.1)_\varepsilon$ 后可得

$$\ddot{z}+g'(p(t))z=-\varepsilon\lambda\dot{z}-\varepsilon\lambda\dot{p}(t)+\varepsilon\mu f(t-\alpha)+G(t,z), \tag{6.2.2}$$

其中 $G(t,z)=-g(p(t)+z(t))+g'(p(t))z(t)+g(p(t))$.

命题 6.2.1 设周期轨道 Γ^h 的周期 T 依赖于参数 h, $T=T(h)$, 而周期 k 轨道 Γ^k 对应于参数 h_0, 则条件 $T'(h_0)\neq 0$ 等价于变分方程

$$\ddot{z}+g'(p(t))z=0 \tag{6.2.3}$$

的每个 k 周期解是 $\dot{p}(t)$ 的常数倍.

证 不妨设参数 h 为周期轨道 Γ^h 通过 x 轴时的 x 坐标. 从而 $p(0)=h_0$, 且设 $\dot{p}(0)=0$. 若 $p(t,h)$ 为 $(6.1.1)_\varepsilon=0$ 的周期为 $T(h)$ 的周期解, 则有

$$p(t+T(h),h)=p(t,h),\quad p(t,h_0)=p(t). \tag{6.2.4}$$

记

$$q(t)=\frac{\partial}{\partial h}p(t,h)|_{h=h_0}. \tag{6.2.5}$$

于是 $q(t)$ 满足具有初始条件 $q(0)=1,\dot{q}(0)=0$ 的变分方程 (6.2.3). 对参数 h 微分 (6.2.4) 中第一式, 并令 $h=h_0$ 得

$$\dot{p}(t)T'(h_0)+q(t+T(h_0))=q(t). \tag{6.2.6}$$

在 (6.2.6) 中令 $t=0$ 得 $q(T(h_0))=q(k)=q(0)=1$, 即 $q(k)=1$, 又对 (6.2.6) 两边关于 t 求导后令 $t=0$ 得 $\dot{q}(k)=-\ddot{p}(0)T'(h_0)$. 由于 $T'(h_0)\neq 0$, $\ddot{p}(0)=-g(p(0))\neq 0$, 故 $\dot{q}(k)\neq 0$, 即 $q(t)$ 不满足周期边界条件 $\dot{q}(k)=\dot{q}(0)=0$. 从而 $q(t)$ 不是 (6.1.5) 的 k 周期解. 由于我们已找到 $\dot{p}(t)$ 与 $q(t)$ 为 (6.1.5) 的两个线性无关解, 因此, (6.1.5) 如存在 k 周期解必为 $\dot{p}(t)$ 之常数倍. □

注 设 C_k^r 为具有周期 k 的 r 次连续可微函数在上确界范数下确定的 Banach 空间. 命题 6.2.1 说明, $T'(h_0)\neq 0$ 意味着线性微分算子 $\boldsymbol{A}:C_k^2\to C_k^0$:

$$\boldsymbol{A}y=\ddot{y}+g'(p(t))y \tag{6.2.7}$$

的零空间是一维的.

类似于 (6.1.8), 定义投影算子

$$\boldsymbol{P}y=\eta\dot{p}\int_0^k\dot{p}y\,dt,\quad \eta=\left(\int_0^k\dot{p}^2(t)dt\right)^{-1}. \tag{6.2.8}$$

以下命题给出在 $(I-\boldsymbol{P})C_k^0$ 上定义的算子 A 的右逆.

命题 6.2.2 设 $T'(h_0) \neq 0$, 则存在唯一的线性连续算子 $\boldsymbol{K} : (I-\boldsymbol{P})C_K^0 \to C_K^2$, 使得若 $\phi \in (I-\boldsymbol{P})C_K^0$, 则 $z(t) = \boldsymbol{K}\phi(t)$ 是方程

$$\ddot{z} + g'(p(t))z = \phi(t), \quad \dot{z}(0) = 0 \tag{6.2.9}$$

的唯一 k 周期解.

证 容易看出, $-\dot{p}(t)$ 是 $(6.1.1)_{\varepsilon=0}$ 的变分方程 (6.2.3) 的共轭方程的解. 因此, 根据 Fredholm 更替定理, 方程 (6.2.9) 存在一个 k 周期解的充分和必要条件为 $\boldsymbol{P}\phi = 0$. 若 $\boldsymbol{P}\phi = 0, \psi(t,\phi)$ 为方程 (6.2.9) 一个 k 周期解, 则由命题 6.2.1 知, (6.2.9) 的 k 周期解可表示为

$$z(t) = \beta\dot{p}(t) + \psi(t,\phi) \tag{6.2.10}$$

的形式. 由初值 $(z(0),\dot{z}(0))$ 与 $(\dot{p}(0),\ddot{p}(0))$ 的正交条件可选取

$$\beta|\dot{p}(0)|^2 = -\dot{p}(0)\psi(0,\phi).$$

这个式子唯一地确定了 $\beta = \beta(\phi)$. 因此, 若定义

$$(\boldsymbol{K}\phi)(t) = \beta(\phi)\dot{p}(t) + \psi(t,\phi), \quad \phi \in (I-\boldsymbol{P})C_k^0, \tag{6.2.11}$$

则 $\boldsymbol{K} : (I-P)C_K^0 \to C_K^2$ 是一个连续线性算子. 由上面定义的 K 可见, 在 $(I-\boldsymbol{P})C_k^0$ 上有 $\boldsymbol{AK} = I$. 从而 $z(t) = (\boldsymbol{K}\phi)(t)$ 是 (6.2.9) 的唯一 k 周期解. □

由命题 6.2.2 可见, 方程 $(6.1.1)_\varepsilon$ 存在 (6.2.1) 形式的解, 当且仅当以下两式成立:

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\quad z = \boldsymbol{K}(I-\boldsymbol{P})[-\lambda\varepsilon\dot{z} - \lambda\varepsilon\dot{p} + \varepsilon\mu f(t-\alpha) + G(\cdot,z)],\\&\text{(b)}\quad \boldsymbol{P}[-\lambda\varepsilon\dot{z} - \lambda\varepsilon\dot{p} + \varepsilon\mu f(t-\alpha) + G(\cdot,z)] = 0.\end{aligned} \tag{6.2.12}$$

应用隐函数定理于 (6.2.12) 中式 (a), 注意 $G(\cdot,z) = O(|z|^2)$, 可以证明, 存在零的邻域 $U \subset C_k^2$ 及 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 (6.2.12) 式 (a) 有解 $z(t,\alpha,\lambda,\mu) \in U, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, 0 \leqslant \alpha < k$. 因此, 研究 $(6.1.1)_\varepsilon$ 的 k 周期解的存在性更替地归结于寻求 α,λ,μ, 使得满足关系

$$\begin{aligned}M(\alpha,\lambda,\mu) &= \eta\int_0^k \dot{p}[-\varepsilon\lambda z(t,\alpha,\lambda,\mu) - \lambda\varepsilon\dot{p} + \mu f(t-\alpha) + G(\cdot,z(t,\alpha,\lambda,\mu))]dt\\&= -\varepsilon\lambda + \varepsilon\widetilde{h}(\alpha)\mu + O(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{6.2.13}$$

其中

$$\widetilde{h}(\alpha) = \eta\int_0^k \dot{p}(t)f(t-\alpha)dt. \tag{6.2.14}$$

$M(\alpha,\lambda,\mu)$ 称为 k 次谐波 Mel'nikov 函数. 于是, 有

定理 6.2.1　*方程* $(6.1.1)_\varepsilon$ *当* $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ *时存在* k *周期解的充分必要条件是次谐波* Mel′nikov *函数* $M(\alpha,\lambda,\mu)=0$.

以下讨论由 (6.1.19) 确定的研究同宿分枝的 Mel′nikov 积分与研究 k 次谐波分枝的积分 (6.2.13) 之间的关系.

设方程 $(6.1.1)_{\varepsilon=0}$ 的同宿轨道对应于参数 $h=0$, Γ^0 有参数方程 $\Gamma^0:(p(t),\dot p(t))$. 又设 $(p_h(t),\dot p_h(t))$ 为满足初始条件 $p_h(0)=(1-h)p(0),\dot p_h(0)=0,0\leqslant h<h^*$ 的 $(6.1.1)_{\varepsilon=0}$ 的周期解, $p_h(t)$ 具有周期 $T(h)$, $\lim\limits_{h\to0}T(h)=+\infty$. 记

$$\widetilde h(\alpha,h)=\int_{-\frac12T(h)}^{\frac12T(h)}\dot p_h(t)f(t-\alpha)dt,\tag{6.2.15}$$

$$\widetilde h(\alpha,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\dot p(t)f(t-\alpha)dt.\tag{6.2.16}$$

定理 6.2.2　*设* $f:\mathbf R\to\mathbf R$ *连续, 且对一切* t *有* $f(t+1)=f(t)$, *则对任给的* $\varepsilon>0$, *存在* $h_1>0$, *使得当* $0<h<h_1$ *时*

$$|\widetilde h(\alpha,h)-\widetilde h(\alpha,0)|\leqslant\varepsilon\sup_{0\leqslant t\leqslant1}|f(t)|,\tag{6.2.17}$$

$$\left|\frac{\partial\widetilde h(\alpha,h)}{\partial\alpha}-\frac{\partial\widetilde h(\alpha,0)}{\partial\alpha}\right|\leqslant\varepsilon\sup_{0\leqslant t\leqslant1}|f(t)|.\tag{6.2.18}$$

证　先证不等式 (6.2.17) 成立. 注意到 $(6.1.1)_{\varepsilon=0}$ 具有水平曲线

$$H(x,y)=\frac12y^2+G(x)=h,\quad G(x)=\int_0^x g(s)ds.\tag{6.2.19}$$

这曲线族关于 x 轴是对称的, 且有 $\dot p(0)=\dot p_h(0)=0$. 因此, 只需证

$$\left|\int_{-\infty}^0\dot p(t)f(t-\alpha)dt-\int_{-\frac12T(h)}^0\dot p_h(t)f(t-\alpha)dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}|f|,\tag{6.2.20}$$

其中 $|f|=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant1}|f(t)|$.

首先, 选取 h_1 足够小, 使

$$\left|\int_{-\infty}^{-\frac12T(h)}\dot p(t)f(t-\alpha)dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}|f|,\quad\forall0\leqslant h<h_1.\tag{6.2.21}$$

由 (6.2.19) 得

$$\frac{dx}{dt}=\pm[2h-G(x)]^{\frac12}.\tag{6.2.22}$$

利用 (6.2.22) 可以确定当 $x>0$ 时, 函数 $p(t)$ 与 $p_h(t)$ 的反函数 $t(x)$ 及 $t_h(x)$. 固定

$0<\eta<\dfrac{\varepsilon}{6}$, 并选取 h_1 使得 $0\leqslant h<h_1$ 时有 $\eta>p\left(-\dfrac{1}{2}T(h)\right), p_n\left(-\dfrac{1}{2}T(h)\right)$, 于是

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{-\frac{T(h)}{2}}^{0}\dot{p}(t)f(t-\alpha)dt-\int_{-\frac{T(h)}{2}}^{0}\dot{p}_h(t)f(t-\alpha)dt\right|\\
&=\left|\int_{p(-\frac{T}{2})}^{p(0)}f(t(x)-\alpha)dx-\int_{p_h(-\frac{T}{2})}^{p_h(0)}f(t_h(x)-\alpha)dx\right|\\
&\leqslant\left|\int_{p(-\frac{T}{2})}^{\eta}f(t(x)-\alpha)dx-\int_{p_h(-\frac{T}{2})}^{\eta}f(t_h(x)-\alpha)dx\right|\\
&\quad+\left|\int_{p_h(0)}^{p(0)}f(t_h(x)-\alpha)dx\right|+\left|\int_{\eta}^{p_h(0)}f(t(x)-\alpha)dx-\int_{\eta}^{p_h(0)}f(t_h(x)-\alpha)dx\right|\\
&\leqslant 2\eta|f|+h|f|+\left|\int_{\eta}^{(1-h)p(0)}f(t(x)-\alpha)dx-\int_{\eta}^{(1-h)p(0)}f(t_h(x)-\alpha)dx\right|.
\end{aligned}
$$

由于 η 固定, 当 $h\to 0$ 时, $t_h(x)\to t(x)$ 关于 $x\geqslant\eta$ 是一致的, 故可以使右边第三项小于 $\dfrac{\varepsilon}{3}|f|$. 这就证明了 (6.2.17). 因为 $p_h(t)$ 至少是 C^3 的, 且 $\dot{p}_h\left(\dfrac{T}{2}\right)=\dot{p}\left(-\dfrac{T}{2}\right)=0$, 又有

$$
\frac{\partial\widetilde{h}}{\partial\alpha}(\alpha,h)=\int_{-\frac{T}{2}-\alpha}^{\frac{T}{2}-\alpha}\ddot{p}_h(t+\alpha)f(t)dt,\quad 0\leqslant h<h^*.\tag{6.2.23}
$$

兹证不等式 (6.2.18) 成立.

由 (6.2.13) 可见, 设 G 为 C^1 类的 1 周期函数, 则用分部积分可证明

$$
\frac{\partial}{\partial\alpha}\widetilde{h}(\alpha,0,G)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\widetilde{h}(\alpha,h,G)=\widetilde{h}(\alpha,0,\dot{G})-\widetilde{h}(\alpha,h,\dot{G}).
$$

因此, 对任何上述的函数 G, 若 $|f-G|$ 与 h 充分地小, 则有

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\widetilde{h}(\alpha,0,f)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\widetilde{h}(\alpha,h,f)\right|\\
&=|\widetilde{h}(\alpha,0,\dot{f}-\dot{G})-\widetilde{h}(\alpha,h,\dot{f}-\dot{G})+\widetilde{h}(\alpha,0,\dot{G})-\widetilde{h}(\alpha,h,\dot{G})|\\
&\leqslant\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\widetilde{h}(\alpha,0,f-G)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\widetilde{h}(\alpha,h,f-G)\right|+|\widetilde{h}(\alpha,0,\dot{G})-\widetilde{h}(\alpha,h,\dot{G})|\\
&<\left(\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\right)|f|=\varepsilon|f|.
\end{aligned}\tag{6.2.24}
$$

(6.2.24) 成立用到了积分 $\widetilde{h}(\alpha,h,f)$ 关于 f 之线性及不等式 (6.2.17), 定理 6.2.2 证毕. □

下面假设 $\widetilde{h}(\alpha,h)$ 在 α_M^h 有最大值, 在 α_m^h 有最小值, 并满足

$$
\widetilde{h}''(\alpha_M^h)<0,\quad \widetilde{h}''(\alpha_m^h)>0,\quad \widetilde{h}(\alpha_m^h)<\widetilde{h}(\alpha_M^h).\tag{6.2.25}
$$

另一方面由于 $\lim\limits_{h\to 0}T(h)=+\infty$, 因此, 存在正整数 k_0, 使得当 $k>k_0$ 时, 有 $h_k\to 0, T(h_k)=k\ (k\to+\infty)$, 对每个 h_k 关系 (6.2.25) 也满足.

定理 6.2.3　设方程 $(6.1.1)_\varepsilon$ 中 $f(t+1)=f(t)$, $(6.1.1)_{\varepsilon=0}$ 的同宿轨道 Γ^0 内所围的闭轨道 Γ^h 的周期 $T(h)$ 单调改变, $T'(h)\neq 0$, 且 f 使得 (6.2.25) 成立. 则存在 Γ^0 的邻域 U, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 及整数 $k_0\geqslant 0$, 使得对于任何 $k\geqslant k_0$, 在参数 (μ,λ) 平面上有两直线 $C_M^k:\lambda=\widetilde{h}(\alpha_M,h)\mu$, $C_m^k:\lambda=\widetilde{h}(\alpha_m,h)\mu$, 将平面 (μ,λ) 分为两对顶角域 S_1^k,S_2^k, 使得当 $(\mu,k)\in S_1^k$ 时, $(6.1.1)_\varepsilon$ 没有最小周期为 k 的次谐波解, 而在 $(\mu,\lambda)\in S_2^k$, 系统 $(6.1.1)_\varepsilon$ 至少有两个 k 次谐波解. 此外, 当 $k\to+\infty$ 时, C_M^k, C_m^k 分别趋于定理 6.1.2 中所述直线 C_M, C_m 换言之, 次谐波分枝曲线趋向于同宿分枝曲线.

证明定理 6.2.3 的方法类似于定理 6.1.2, 而定理 6.2.3 的最后一个结论是定理 6.1.2 的推论.

推论 6.2.1　在 (μ,λ) 参数平面上, 当 (μ,λ) 沿适当途径改变时, $(6.1.1)_\varepsilon$ 将通过无穷多个次谐波分枝而过度到混沌状态.

6.3　次谐波解的稳定性

本节研究方程 $(6.1.1)_\varepsilon$ 的 k 周期次谐波解的稳定性. 为简化记号, 兹将 $\varepsilon\lambda,\varepsilon\mu$ 统一用 λ,μ 表示, 考虑 λ,μ 很小时的方程

$$\ddot{x}+g(x)=-\lambda\dot{x}+\mu f(t), \tag{6.3.1}$$

其中函数 f,g 的假设与 6.1 和 6.2 节相同.

引入算子

$$\boldsymbol{N}y=-\lambda\dot{y}-\lambda\dot{p}(t)+\mu f(t-\alpha)+G(t,y), \tag{6.3.2}$$

其中 $p(t),G(t,y)$ 由 6.2 节的定义确定. 注意 6.2 节中算子 $\boldsymbol{P}$ 是投影算子, 因此 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{PN})=0$ 从而对于 $0\leqslant\alpha<k$, 初值问题

$$\begin{cases}\ddot{w}+g'(p(t))w=-\lambda\dot{w}-\lambda\dot{p}+\mu f(t-\alpha)+G(t,w)-M(\alpha,\lambda,\mu)\dot{p},\\ \dot{w}(0)=0\end{cases} \tag{6.3.3}$$

存在唯一的 k 周期解 w,(6.3.3) 中 $M(\alpha,\lambda,\mu)$ 为次谐波 Mel′nikov 积分. (6.3.3) 的解 $w(t,\alpha,\lambda,\mu)$ 关于 α,λ,μ 光滑.

令 $\phi(t,\alpha,\lambda,\mu)=p(t)+w(t,\alpha,\lambda,\mu)$, 则 $\phi(t,\alpha,\lambda,\mu)$ 为

$$\ddot{x}+g(x)=-\lambda\dot{x}+\mu f(t-\alpha)-M(\alpha,\lambda,\mu)\dot{p} \tag{6.3.4}$$

的 k 周期次谐波解. $\phi(t,\alpha,0,0)=p(t)$, (6.3.4) 关于解 ϕ 的变分方程为

$$\ddot{x}+g'(\phi)x+\lambda\dot{x}=0. \tag{6.3.5}$$

其向量形式为

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(\phi) & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}=\widetilde{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}. \tag{6.3.6}$$

兹讨论 (6.3.6) 的特征乘子的性质, 从而得到 k 周期解 $\phi(t,\alpha,\lambda,\mu)$ 的稳定性信息. 设 (6.3.6) 有基本解矩阵

$$Y(t,\alpha,\lambda,\mu)=\begin{pmatrix} y_1(t,\alpha,\lambda,\mu) & y_2(t,\alpha,\lambda,\mu) \\ \dot{y}_1(t,\alpha,\lambda,\mu) & \dot{y}_2(t,\alpha,\lambda,\mu) \end{pmatrix},$$

$$Y(0,\alpha,\lambda,\mu)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.3.7}$$

注意到, 有

$$Y(t,\alpha,0,0)\begin{pmatrix} q(t) & r(t) \\ \dot{q}(t) & \dot{r}(t) \end{pmatrix},$$

其中 $q(t)$ 由 (6.2.5) 确定, $r(t)=\dot{p}(t)/\ddot{p}(t)$. 线性化系统 (6.3.6) 的特征乘子就是矩阵 $Y(k,\alpha,\lambda,\mu)$ 的特征值. 因此, 特征乘子满足方程

$$\sigma^2-T(\alpha,\lambda,\mu)\sigma+D(\alpha,\lambda,\mu)=0, \tag{6.3.8}$$

其中 $T(\alpha,\lambda,\mu)=\mathrm{trace}Y(k,\alpha,\lambda,\mu), D(\alpha,\lambda,\mu)=\mathrm{det}Y(k,\alpha,\lambda,\mu)$.

引理 6.3.1 $D(\alpha,\lambda,\mu)=\exp(-\lambda k)$.

证

$$\begin{aligned} D(\alpha,\lambda,\mu) &= \mathrm{det}Y(k,\alpha,\lambda,\mu) \\ &= \mathrm{det}Y(0,\alpha,\lambda,\mu)\cdot\exp\left(\int_0^k \mathrm{trace}\widetilde{\boldsymbol{A}}ds\right) \\ &= \exp(-\lambda k). \end{aligned}$$

□

引理 6.3.2 若 (6.3.1) 的闭轨线 Γ^h 的周期 $T(h)$ 满足条件 $T'(h)\neq 0$, 则

$$T(\alpha,\lambda,\mu)=a_1(\alpha)+a_2(\alpha)\lambda+a_3(\alpha)\mu+o(|\lambda|^2+|\mu|^2), \tag{6.3.9}$$

其中 $a_1(\alpha)=2, a_2(\alpha)=-k, a_3(\alpha)=-\zeta\widetilde{h}'(\alpha), \zeta=\dot{q}(k)/\ddot{p}(0)^2\eta$.

证 由于 y_1 与 y_2 是 (6.3.6) 的解, $\phi(t,\alpha,\lambda,\mu)$ 关于其变元光滑, 故可在 $(\mu,\lambda)=(0,0)$ 的邻域内关于 λ,μ 作 Taylor 级数展开, 问题化为展式系数的计算. 显然

$$\begin{aligned}a_1(\alpha)&=T(\alpha,0,0)=y_1(k,\alpha,0,0)+\dot{y}_2(k,\alpha,0,0)\\&=q(k)+\dot{r}(k)=1+1=2.\end{aligned}$$

记 $b_1(t)=\dfrac{\partial\phi}{\partial\lambda}(t,\alpha,0,0)$, 由解关于参数的依赖性, $b_1(t)$ 满足问题

$$\ddot{z}+g'(p)z=0,\quad \dot{z}(0)=0. \tag{I}$$

根据命题 6.2.1, $b_1(t)$ 是 $\dot{p}(t)$ 的常数倍, 因为 $b_1'(0)=0$, 故 $b_1(t)\equiv 0$.

记 $b_2(t)=\dfrac{\partial\phi}{\partial\mu}(t,\alpha,0,0), b_2(t)$ 满足问题

$$\ddot{z}+g'(p)z=f(t-\alpha)-\widetilde{h}(\alpha)\dot{p},\quad \dot{z}(0)=0. \tag{II}$$

由于 $P(f(t-\alpha)-\widetilde{h}(\alpha)\dot{p})=0$, 因此 $b_2(t)$ 为 (II) 的 k 周期解.

再设 $b_3(t)=\dfrac{\partial y_1}{\partial\lambda}(t,\alpha,0,0)$, 则 $b_3(t)$ 是问题

$$\ddot{z}+g'(p)z=-\dot{q},\quad z(0)=\dot{z}(0)=0 \tag{III}$$

的解. 对上述方程应用常数变易公式得

$$b_3(t)=q(t)\int_0^t r(s)\dot{q}(s)ds-r(t)\int_0^t q(s)\dot{q}(s)ds. \tag{6.3.10}$$

又令 $b_4(t)=\dfrac{\partial y_2}{\partial\lambda}(t,\alpha,0,0)$, $b_4(t)$ 满足初始问题

$$\ddot{z}+g'(p)z=-\dot{r},\quad z(0)=\dot{z}(0)=0. \tag{IV}$$

由于 $\displaystyle\int_0^k \dot{p}(-\dot{r})ds=0$, 因此, $b_4(t)$ 为 (IV) 的 k 周期解. 由常数变易公式得到

$$\dot{b}_4(t)=\dot{q}(t)\int_0^t r(s)\dot{r}(s)ds-\dot{r}(t)\int_0^t q(s)\dot{r}(s)ds. \tag{6.3.11}$$

有了上面的准备, 现在可以计算 $a_2(\alpha)$ 了, 由定义

$$\begin{aligned}a_2(\alpha)&=\frac{\partial T}{\partial\lambda}(\alpha,0,0)=\frac{\partial y_1}{\partial\lambda}(k,\alpha,0,0)+\frac{\partial\dot{y}_2}{\partial\lambda}(k,\alpha,0,0)=b_3(k)+b_4'(k)\\&=\int_0^k r\dot{q}ds-\int_0^k q\dot{r}ds=-\int_0^k(q\dot{r}-r\dot{q})ds=-k.\end{aligned}$$

令 $b_5(t) = \dfrac{\partial y_1}{\partial \mu}(t,\alpha,0,0)$. $b_5(t)$ 为初始问题

$$\ddot{z} + g'(p)z = -g''(p)b_2 q, \quad z(0) = \dot{z}(0) = 0 \tag{V}$$

的解. 由常数变易公式

$$b_5(t) = q(t)\int_0^t rg''(p)b_2 qds - r(t)\int_0^t qg''(p)b_2 qds. \tag{6.3.12}$$

又记 $b_6(t) = \dfrac{\partial y_2}{\partial \mu}(t,\alpha,0,0)$. $b_6(t)$ 满足

$$\ddot{z} + g'(p)z = -g''(p)b_2 r, \quad z(0) = \dot{z}(0) = 0. \tag{VI}$$

再用常数变易公式得

$$\dot{b}_6(t) = \dot{q}(t)\int_0^t rg''(p)b_2 rds - \dot{r}(t)\int_0^t qg''(p)b_2 rds. \tag{6.3.13}$$

由 (6.3.12) 与 (6.3.13) 可得

$$\begin{aligned}
a_3(\alpha) &= \frac{\partial T}{\partial \mu}(\alpha,0,0) = \frac{\partial y_1}{\partial \mu}(k,\alpha,0,0) + \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial \mu}(k,\alpha,0,0) = b_5(k) + \dot{b}_6(k)\\
&= \int_0^k rg''(p)b_2 qds + \dot{q}(k)\int_0^k rg''(p)b_2 rds - \int_0^k qg''(p)b_2 rds\\
&= \dot{q}(k)\int_0^k rg''(p)b_2 rds = \frac{\dot{q(k)}}{\ddot{p}(0)^2}\int_0^k g''(p)\dot{p}^2 b_2 ds\\
&= \zeta\cdot\eta\left[g'(p)\dot{p}b_2|_0^k - \int_0^k g'(p)\ddot{p}b_2 ds - \int_0^k g'(p)\dot{p}\dot{b}_2 ds\right]\\
&= -\zeta\cdot\eta\left[\int_0^k g'(p)\ddot{p}b_2 ds + \int_0^k g'(p)\dot{p}\dot{b}_2 ds\right]\\
&= -\zeta\cdot\eta\left[\int_0^k g'(p)\ddot{p}b_2 ds + g(p)\dot{b}_2|_0^k - \int_0^k g(p)\ddot{b}_2 ds\right]\\
&= -\zeta\cdot\eta\left[\int_0^k g'(p)\ddot{p}b_2 ds + \int_0^k g(p)[g'(p)b_2 - f(t-\alpha) + \widetilde{h}(\alpha)\dot{p}]ds\right]\\
&= -\zeta\cdot\eta\left[\int_0^k g'(p)b_2[\ddot{p} + g(p)]ds - \int_0^k g(p)f(t-\alpha)ds + \int_0^k \widetilde{h}(\alpha)g(p)\dot{p}ds\right]\\
&= -\zeta\cdot\eta\left[\int_0^k \ddot{p}f(t-\alpha)ds - \widetilde{h}(\alpha)\int_0^k p\dot{p}ds\right] = -\zeta\cdot\eta\left[\int_0^k \ddot{p}f(t-\alpha)ds\right]\\
&= -\zeta h'(\alpha).
\end{aligned}$$

后一等式成立是因为

$$\widetilde{h}(\alpha)=\eta\int_0^k \dot{p}(t)f(t-\alpha)dt=\eta\int_{-\alpha}^{k-\alpha}\dot{p}(s+\alpha)f(s)ds.$$

故

$$\begin{aligned}\widetilde{h}'(\alpha)&=-\eta\dot{p}(k)f(k-\alpha)+\eta\dot{p}(0)f(-\alpha)+\eta\int_{-\alpha}^{k-\alpha}\ddot{p}(s+\alpha)f(s)ds\\&=\eta\int_{-\alpha}^{k-\alpha}\ddot{p}(s+\alpha)f(s)ds=\eta\int_0^k\ddot{p}(t)f(t-\alpha)dt.\end{aligned}$$

□

引理 6.3.3 若 $\widetilde{h}'(\alpha_0)=0$, $\widetilde{h}''(\alpha_0)\neq 0$, 则对每个小的 λ_0,μ_0, 若次谐波 Mel′nikov 函数 $M(\alpha_0,\lambda_0,\mu_0)=0$, 则 1 是 $\psi(t,\alpha_0,\lambda_0,\mu_0)$ 的线性化系统 (6.3.5) 的特征乘子.

证 令 $\phi(t,\alpha,\lambda,\mu)=\phi(t,\alpha,\lambda,\mu,x,y)$, $0\leqslant\alpha<1$, 其中 (x,y) 为 $\phi(t,\alpha,\lambda,\mu)$ 的初始值.

记 $w_1(t)=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(t,\alpha_0,\lambda_0,\mu_0,x_0,y_0)$. 则 $w_1(t)$ 是 (6.3.5) 具有初条件 $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=0$ 的解. 记 $w_2(t)=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}(t,\alpha_0,\lambda_0,\mu_0,x_0,y_0)$, 则 $w_2(t)$ 是 (6.3.5) 具有初条件 $x(0)=0,\dot{x}(0)=1$ 的解. 换言之,

$$W(t)=\begin{pmatrix}w_1(t) & \omega_2(t)\\ \dot{w}_1(t) & \dot{w}_2(t)\end{pmatrix}\tag{6.3.14}$$

是 (6.3.5) 的基本解矩阵.

假设函数 ϕ 的特征乘子没有一个等于 1, 则矩阵 $W(k)-I$ 是可逆的. 记

$$H(x,y,\alpha,\lambda,\mu)=(\phi(k,\alpha,\lambda,\mu,x,y)-x,\phi(k,\alpha,\lambda,\mu,x,y)-y).$$

由于 $H(x_0,y_0,\alpha_0,\lambda_0,\mu_0)=(0,0)$ 并且

$$\det\left(\frac{\partial H}{\partial(x,y)}(x_0,y_0,\alpha_0,\lambda_0,\mu_0)\right)=\det(W(k)-I)\neq 0.$$

根据隐函数定理, 存在 $\delta>0$ 及唯一解 $x^*(\alpha,\lambda,\mu),y^*(\alpha,\lambda,\mu)$, 使得当 $|\alpha-\alpha_0|<\delta$, $|\lambda-\lambda_0|<\delta,|\mu-\mu_0|<\delta$ 时, 有 $H(x^*(\alpha,\lambda,\mu),y^*(\alpha,\lambda,\mu),\alpha,\lambda,\mu)=0$. 因此对于充分接近 $(\alpha_0,\lambda_0,\mu_0)$ 的 (α,λ,μ), 存在 (6.3.1) 的唯一的 k 周期解, 这个结论和定理 6.2.3 矛盾, 因为定理 6.2.3 指出, 在 $(\alpha_0,\lambda_0,\mu_0)$ 近旁, 或者存在至少两个 k 周期解, 或者无 k 周期解. 因此, 1 必是线性化方程的一个特征乘子. 引理证毕. □

定理 6.3.1 设 $\zeta>0$ $(\dot{q}(k)>0),\lambda,\mu$ 充分小. 若 $\phi(t,\alpha,\lambda,\mu)$ 为 (6.3.1) 的线性化系统的 k 周期解, 又 $|\sigma_1|\leqslant|\sigma_2|$ 为其特征乘子, 则

(I) 若 $\widetilde{h}'(\alpha)\mu > 0$, 那么

(i) 如果 $\lambda > 0$, 或者 $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ (稳定结点), 或者 σ_1, σ_2 是复数 $|\sigma_1| = |\sigma_2| < 1$ (稳定焦点).

(ii) 如果 $\lambda < 0$, 或者 $1 < \sigma_1 < \sigma_2$ (不稳定结点), 或者 σ_1, σ_2 是复数 $|\sigma_1| = |\sigma_2| > 1$ (不稳定焦点).

(iii) 如果 $\lambda = 0$, 两特征乘子是复共轭的, 其模等于 1.

(II) 若 $\widetilde{h}'(\alpha)\mu < 0$, 那么 $0 < \sigma_1 < 1 < \sigma_2$ (鞍点).

(III) 若 $\widetilde{h}'(\alpha) = 0, \widetilde{h}''(\alpha) \neq 0$, 特征乘子是 1 与 $e^{-\lambda k}$.

证 设 σ_1, σ_2 为线性化方程的特征乘子, 由上面的引理可知, σ_1, σ_2 是方程

$$\sigma^2 - T(\alpha, \lambda, \mu)\sigma + \exp(-\lambda k) = 0$$

的解:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{T(\alpha, \lambda, \mu) \pm \sqrt{(T(\alpha, \lambda, \mu))^2 - 4\exp(-\lambda k)}}{2}. \tag{6.3.15}$$

Ⅰ. 若 $\widetilde{h}'(\alpha_0)\mu > 0$, 则存在 $\delta(\alpha_0) > 0$, 使得若 $|\lambda|, |\mu| < \delta(\alpha_0)$, 有 $2\exp(-\lambda k/2) < T(\alpha, \lambda, \mu) < 1 + \exp(-\lambda k)$ 或 $T(\alpha, \lambda, \mu) < 2\exp(-\lambda k/2)$ 对 $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon(\alpha_0)$ 成立. 当前一不等式成立时, 若 $\lambda > 0$ 有 $\sigma_1 < \sigma_2 < 1$; 若 $\lambda < 0$ 有 $1 < \sigma_1 < \sigma_2$; 当后一不等式成立时, σ_1 与 σ_2 为共轭复数, 其模大于还是小于 1 由 $\lambda < 0$ 或 $\lambda > 0$ 确定.

Ⅱ. 若 $\widetilde{h}'(\alpha_0)\mu < 0$, 则存在某个 $\delta(\alpha_0) > 0$, 使得如果 $|\lambda|, |\mu| < \delta(\alpha_0)$, 有 $T(\alpha, \lambda, \mu) > 1 + \exp(-\lambda k)$ 对 $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon(\alpha_0)$ 成立. 从而由 (6.3.15) 可知 $\sigma_1 < 1 < \sigma_2$.

Ⅲ. 若 $\widetilde{h}'(\alpha) = 0, \widetilde{h}''(\alpha) \neq 0$, 由引理 6.3.3 即得所述结论.

注意, 在定理 6.2.3 的条件下, 应用定理 6.3.1 可知, 在参数 (μ, λ) 平面上, 由分枝曲线 C_M^k 与 C_m^k 将平面分为两个区域, 在一个对顶角形区域内存在两个 k 次谐波周期解, 与两个 k 周期解相对应的 $\widetilde{h}'(\alpha)$ 有不同的符号, 因此, 其中一个是鞍点, 另一个是稳定 (或不稳定) 结点或焦点. 在分枝曲线 C_M^k 与 C_m^k 上, 却只有一个周期解, 在另一个角域内则无 k 周期解. 这种经过分枝曲线合二为一又消失的分枝现象称为鞍结分枝. □

6.4 周期扰动系统的 Mel′nikov 积分

本节介绍由 Salam(1987) 所叙述的推导方法. 一般地考虑扰动的非自治微分方程组

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t), \tag{6.4.1}$$

其中 $x \in \mathbf{R}^2, g(x,t) = g(x,t+T), f = (f_1, f_2)^t, g = (g_1, g_2)^t$. 在 $\mathbf{R}^2 \times S^1$ 空间, (6.4.1) 可扭扩为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, \varphi), & (x, \varphi) \in \mathbf{R}^2 \times S^1, \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \tag{6.4.2}$$

$S^1 = \mathbf{R}/T$ 是周长为 T 的圆. 取横截面

$$\Sigma^{t_0} = \{(x, \varphi) \in \mathbf{R}^2 \times S^1 | \varphi = t_0 \in [0, T]\}.$$

定义如下的 Poincaré 映射 $P_\varepsilon^{t_0} : \Sigma^{t_0} \to \Sigma^{t_0}$:

$$P_\varepsilon^{t_0}(x_\varepsilon(t_0, t_0)) = \Pi(x_\varepsilon(T + t_0, t_0), \varphi(T)) = x_\varepsilon(T + t_0, t_0),$$

其中 $x_\varepsilon(t, t_0)$ 是 $(6.4.1)_\varepsilon$ 的解, Π 为投影到第一个因子的映射. 对于 $\varepsilon = 0$, 未扰动系统 $(6.4.1)_\varepsilon = 0$ 的 Poincaré 映射有类似的定义: $P_0^{t_0}(x_0(0)) = x_0(T)$. 由第 2 章可知, Poincaré 映射是微分同胚, 且 $P_\varepsilon^{t_0 + nT} = (P_\varepsilon^{t_0})^n$.

对系统 $(6.4.1)_\varepsilon$ 作如下假设:

(H_1) 未扰动系统 $(6.4.1)_{\varepsilon=0}$ 存在同宿到双曲鞍点 p_0 的同宿轨道,

$$\overline{\Gamma}_0 = \{\overline{x}_0(t)\} = W^u(p_0) \cap W^s(p_0).$$

(H_2) 向量函数 f, g 是 C^k 函数 $k \geqslant 1$, 并在有界集上有界, g 是 t 的 T 周期函数.

系统 $(6.4.1)_{\varepsilon=0}$ 在 $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ 中的同宿不变流形 $\Gamma_0 \times \mathbf{R}$ 如图 6.4.1. 过 Σ^{t_0} 上初始点 $x_0(0)$ 的轨道螺旋般地围绕图中的柱面形当 $t \to \pm\infty$ 时趋于 p_0.

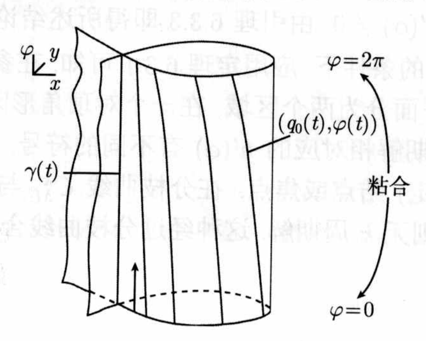


图 6.4.1　在同宿流形上的轨道

引理 6.4.1　*设条件 $(\mathrm{H}_1), (\mathrm{H}_2)$ 成立, 则对足够小的 ε, $(6.4.1)_\varepsilon$ 存在唯一的双曲周期解 $r_\varepsilon(t) = p_\varepsilon(t) = p_0 + O(\varepsilon)$, 换言之, $(6.4.1)_\varepsilon$ 诱导的 Poincaré 映射 $\mathbf{P}_\varepsilon^{t_0}$ 存在唯一的双曲鞍点 $p_\varepsilon = p_0 + O(\varepsilon)$*

引理 6.4.1 可以从一般性定理推出, 这里证略.

引理 6.4.2 系统 $(6.4.1)_\varepsilon$ 的双曲周期轨道 $r_\varepsilon(t)$ 的局部稳定与不稳定流形 $W^s_{\text{loc}}(r_\varepsilon(t))$ 与 $W^u_{\text{loc}}(r_\varepsilon(t))$ 是 C^k 接近于未扰动系统 $(6.4.1)_\varepsilon$ 的周期轨道 $p_0\times S^1$ 的不变流形的; 初始点在截面 Σ^{t_0} 上而位于 $W^s(r_\varepsilon(t))$ 及 $W^u(r_\varepsilon(t))$ 上的 $(6.4.1)_\varepsilon$ 的轨道 $x^s_\varepsilon(t,t_0)$ 与 $x^u_\varepsilon(t,t_0)$ 可分别表示为以下一致有效的渐近展开式:

$$x^u_\varepsilon(t,t_0)=\overline{x}_0(t-t_0)+\varepsilon x^{1u}(t,t_0)+O(\varepsilon^2),\quad t\in(-\infty,t_0], \tag{6.4.3}$$

$$x^s_\varepsilon(t,t_0)=\overline{x}_0(t-t_0)+\varepsilon x^{1s}(t,t_0)+O(\varepsilon^2),\quad t\in[t_0,+\infty). \tag{6.4.4}$$

这个引理证明的困难在于无穷时间区间上的一致有效性, 这需要较长篇幅, 可参考 Mel′nikov(1963).

下面考察 $W^s(p_\varepsilon(t_0))$ 与 $W^u(p_\varepsilon(t_0))$ 的分离程度的测量技术. 在三维空间 $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}$ 中截面 Σ^{t_0} 与未扰动的同宿流形 $\Gamma_0\times\mathbf{R}$ 的交线上取一点 $\overline{x}_0(0)$, 用 $f^\perp(\overline{x}_0(0))$ 表示 $\overline{x}_0(0)$ 点的向量场 $(6.4.2)_{\varepsilon=0}$ 的法向, 其分量形式为 $(-f_2(\overline{x}_0(0)),f_1(\overline{x}_0(0))^{\mathrm{T}}$, 取 $W^s(p_\varepsilon(t_0))$ 与 $W^u(p_\varepsilon(t_0))$ 在 $f^\perp(\overline{x}_0(0))$ 方向上最接近的两个点 $x^s_\varepsilon(t_0)=x^s_\varepsilon(t_0,t_0)$, $x^u_\varepsilon(t_0)=x^u_\varepsilon(t_0,t_0)$ 定义有方向的 Σ^{t_0} 上稳定流形与不稳定流形间的距离函数

$$d(t_0)=\frac{f(\overline{x}_0(0))\wedge[x^u_\varepsilon(t_0)-x^s_\varepsilon(t_0)]}{|f(\overline{x}_0(0))|}. \tag{6.4.5}$$

记号 $a\wedge b\overset{\text{def}}{=}a_1b_2-a_2b_1$. 因此, (6.4.5) 右边表示 $x^u_\varepsilon-x^s_\varepsilon$ 在 $f^\perp$ 方向上的投影 (见图 6.4.2).

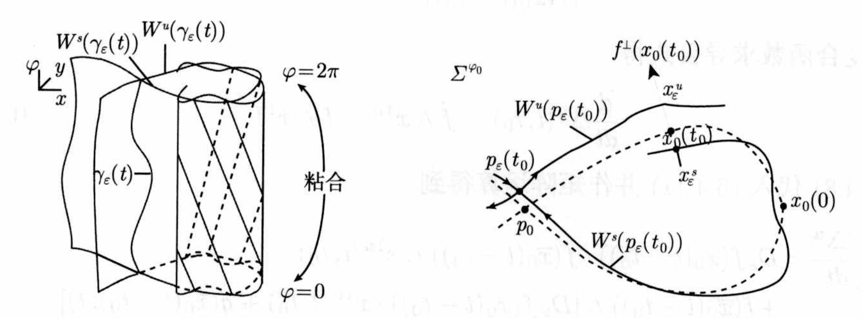


图 6.4.2 扭扩系统的不变流形

根据引理 6.4.2, (6.4.5) 式可简化为

$$d(t_0)=\frac{f(\overline{x}_0(0))\wedge(x^{1u}(t_0,t_0)-x^{1s}(t_0,t_0))}{|f(\overline{x}_0(0))|}\varepsilon+O(\varepsilon^2). \tag{6.4.6}$$

如果 f,g 关于其变元解析, 则 (6.4.3) 与 (6.4.4) 可展为一致收敛的级数, (6.4.6) 可精确化到

$$d(t_0)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{f(\overline{x}_0(0))\wedge(x^{ju}(t_0,t_0)-x^{js}(t_0,t_0))}{|f(\overline{x}_0(0))|}. \tag{6.4.7}$$

如果将式 (6.4.3) 代入方程 $(6.4.1)_\varepsilon$, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\overline{x}_0(t-t_0)+\varepsilon x^{1u}(t,t_0)+O(\varepsilon^2))\\&=f(\overline{x}_0(t-t_0)+\varepsilon x^{1u}(t,t_0)+O(\varepsilon^2))+\varepsilon g(\overline{x}_0(t-t_0)+\varepsilon x^{1u}(t,t_0)+O(\varepsilon^2),t)\\&=f(\overline{x}_0(t-t_0))+D_xf(\overline{x}_0(t-t_0))\cdot\varepsilon x^{1u}+\varepsilon g(\overline{x}_0(t-t_0),t)+O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

比较上式两边 ε 的一次项, 得到第一变分方程

$$\dot{x}^{1u}=D_xf(\overline{x}_0(t-t_0))x^{1u}+g(\overline{x}_0(t-t_0),t),\quad t\leqslant t_0. \tag{6.4.8}$$

类似地有

$$\dot{x}^{1s}=D_xf(\overline{x}_0(t-t_0))x^{1s}+g(\overline{x}_0(t-t_0),t),\quad t\geqslant t_0. \tag{6.4.9}$$

引入与时间有关的函数

$$\begin{aligned}\Delta^u(t,t_0)&=f(\overline{x}_0(t-t_0))\wedge x^{1u}(t,t_0),\\\Delta^s(t,t_0)&=f(\overline{x}_0(t-t_0))\wedge x^{1s}(t,t_0),\\\Delta(t,t_0)&=\Delta^u(t,t_0)-\Delta^s(t,t_0).\end{aligned}$$

用上面的记号, (6.4.6) 可记为

$$d(t_0)=\frac{\varepsilon}{|f(\overline{x}_0(t-t_0))|}[\Delta(t_0,t_0)+O(\varepsilon^2)]. \tag{6.4.10}$$

利用复合函数求导公式得

$$\frac{d}{dt}\Delta^u(t,t_0)=\dot{f}\wedge x^{1u}+f\wedge\dot{x}^{1u}. \tag{6.4.11}$$

将 (6.4.8) 代入 (6.4.11) 并作矩阵运算得到

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta^u}{dt}&=D_\varepsilon f(\overline{x}_0(t-t_0))\cdot f(\overline{x}_0(t-t_0))\wedge x^{1u}(t,t_0)\\&\quad+f(\overline{x}_0(t-t_0))\wedge[D_xf(\overline{x}_0(t-t_0))\cdot x^{1u}(t,t_0)+g(\overline{x}_0(t-t_0),t)]\\&=\mathrm{trace}D_xf(\overline{x}_0(t-t_0))\Delta^u(t,t_0)+f(\overline{x}_0(t-t_0))\wedge g(\overline{x}_0(t-t_0),t).\end{aligned} \tag{6.4.12}$$

同样对 Δ^s, 有

$$\frac{d\Delta^s}{dt}=\mathrm{trace}D_xf(\overline{x}_0(t-t_0))\Delta^s(t,t_0)+f(\overline{x}_0(t-t_0))\wedge g(\overline{x}_0(t-t_0),t). \tag{6.4.13}$$

为简单起见, 记

$$\begin{aligned}a(t-t_0)&=\mathrm{trace}D_xf(\overline{x}_0(t-t_0)),\\b(t-t_0)&=f(\overline{x}_0(t-t_0))\wedge g(\overline{x}_0(t-t_0),t).\end{aligned}$$

积分关于 Δ^u 的线性微分方程 (6.4.12) 得

$$\begin{aligned}\Delta^u(t_0,t_0)=&\left\{\exp\left[\int_t^{t_0}a(s-t_0)ds\right]\right\}\Delta^u(t,t_0)\\&+\int_t^{t_0}b(\tau-t_0)\exp\left[\int_\tau^{t_0}a(s-t_0)ds\right]d\tau,\quad t\in(-\infty,t_0];\end{aligned}\tag{6.4.14}$$

对应地

$$\begin{aligned}\Delta^s(t_0,t_0)=&\left\{\exp\left[-\int_{t_0}^{t}a(s-t_0)ds\right]\right\}\Delta^s(t,t_0)\\&-\int_{t_0}^{t}b(\tau-t_0)\exp\left[-\int_{t_0}^{\tau}a(s-t_0)ds\right]d\tau,\quad t\in[t_0,+\infty).\end{aligned}\tag{6.4.15}$$

为讨论 (6.4.14), (6.4.15) 的有效性, 兹设在未扰动系统的双曲鞍点 p_0, 其线性化系统的系数矩阵为 $A, A=\lim\limits_{t\to\pm\infty}D_xf(\overline{x}_0(t-t_0))=D_x(f(p_0))$. 设 λ_1,λ_2 为 A 的特征方程的两个根, 因为 $\det A<0$,

$$\lambda_1,\lambda_2=\frac{1}{2}(\mathrm{traceA})\pm\frac{1}{2}[(\mathrm{traceA})^2-4\det A]^{1/2}.\tag{6.4.16}$$

p_0 为双曲鞍点的性质说明

$$当\ \mathrm{traceA}>0\ 时,\quad \lambda_2<0<\mathrm{traceA}<\lambda_1,\tag{6.4.17}$$

$$当\ \mathrm{traceA}<0\ 时,\quad \lambda_2<\mathrm{traceA}<0<\lambda_1.\tag{6.4.18}$$

引理 6.4.3 $\Delta^u(t,t_0),t\in(-\infty,t_0]$ 及 $\Delta^s(t,t_0),t\in[t_0,+\infty)$ 有界, 且当 $t\to-\infty$ 与 $t\to+\infty$ 时, 二者分别按指数衰减率 $\exp\lambda_1t$ 与 $\exp\lambda_2t$ 趋于零.

证 兹对 $\Delta^s(t,t_0)$ 作证明. $\Delta^s(t,t_0)=f(\overline{x}_0(t-t_0))\wedge x^{1s}(t,t_0),\ t\in[t_0,+\infty)$.

首先, 因 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\overline{x}_0(t-t_0)=p_0$, 故 $t\to+\infty$ 时, $f(\overline{x}_0(t-t_0))\to f(p_0)=0$. 其趋于零之速度由 f 在 p_0 点的线性化矩阵的特征值控制, 即 $\exp(\lambda_2t)$. 为证本引理, 还需证 x^{1s} 对一切 $t\in[t_0,+\infty)$ 有界, 注意到 $x^{1s}(t,t_0)$ 满足微分方程 (6.4.9), 其解在有限时间区间上必有界, 应考虑的只是 $t\to+\infty$ 时的情况. 当 $t\to+\infty$ 时, $\|p_\varepsilon(t,t_0)-x_\varepsilon^s(t,t_0)\|\to0,\ \overline{x}_0(t-t_0)\to p_0$. 因此, 函数 $x^{1s}(t,t_0)$ 的极限函数是微分方程

$$\dot{x}^1=D_xf(p_0)\cdot x^1+g(p_0,t)\tag{6.4.19}$$

的周期解, 显然这是有界函数. 这就证明了对一切 $t\in[t_0,+\infty)$, $x^{1s}(t,t_0)$ 有界. 类似地, 可以证 x^{1u} 在 $t\in(-\infty,t_0]$ 上有界, 因此引理 6.4.3 的结论正确. □

兹假设 $(6.4.1)_\varepsilon = 0$ 中的函数 f 能保证 (6.4.14) 与 (6.4.15) 右边第一式中的函数 $\exp\left[\int_t^{t_0} a(s-t_0)ds\right]$ 存在有界, $t \in (-\infty, +\infty)$. 从而 (6.4.14) 与 (6.4.15) 右边第一项分别在 $t \to \pm\infty$ 时消失. 于是有

$$\Delta(t_0, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\overline{x}_0(t-t_0)) \wedge g(\overline{x}_0(t-t_0), t)] e^{-\int_0^{t-t_0} \mathrm{trace} D_x f(\overline{x}_0(s))ds} dt. \quad (6.4.20)$$

积分 (6.4.20) 称为系统 (6.4.1) 的 Mel′nikov 积分. 它给出了双曲周期轨道 $\gamma_\varepsilon(t)$ 的稳定流形与不稳定流形间距离的与 ε 同阶的近似.

综合以上的讨论, 我们得到

定理 6.4.1 对系统 $(6.4.1)_\varepsilon$ 定义如下的 Mel′nikov 函数

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\overline{x}_0(t)) \wedge g(\overline{x}_0(t), t+t_0) \exp\left[-\int_0^t \mathrm{trace} Df(\overline{x}_0(s))ds\right] dt. \quad (6.4.21)$$

则当 $M(t_0)$ 存在简单零点, 且其最大最小值有界时, 对于充分小的 ε, $(6.4.1)_\varepsilon$ 的 $W^s(p_\varepsilon^{t_0})$ 与 $W^u(p_\varepsilon^{t_0})$ 横截相交. 若 $M(t_0)$ 总是与零相差一个有界常数, 则 $W^s(p_\varepsilon^{t_0}) \cap W^u(p_\varepsilon^{t_0}) = \varnothing$.

注 (1) 如果未扰动的向量场 f 是 Hamilton 系统, 则向量场的散度 $\mathrm{trace} Df(\bar{x}_0(s)) \equiv 0$. 因此, Mel′nikov 函数简化为

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{x}_0(t)) \wedge g(\bar{x}_0(t), t+t_0)dt. \quad (6.4.22)$$

(2) 若 $(6.4.1)_\varepsilon$ 中 $f = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x}\right)^t, g = \left(\frac{\partial G}{\partial y}, -\frac{\partial G}{\partial x}\right)^t$, 其中 $H = H(x,y)$ 为未扰动系统的 Hamilton 量, $G(x,y)$ 是依赖于时间的 Hamilton 函数. 此时 Mel′nikov 函数化为

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{H(\overline{x}_0(t-t_0)), G(\overline{x}_0(t-t_0), t)\}dt, \quad (6.4.23)$$

其中 $\{H, G\}$ 为 Poisson 括号, 即

$$\{H, G\} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial G}{\partial x}. \quad (6.4.24)$$

(3) 若 $(6.4.1)_\varepsilon$ 中 f 仍为 Hamilton 向量场, 扰动函数 g 与 t 无关, 则 $(6.4.1)_\varepsilon$ 化为自治系统, 利用 Green 公式可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\overline{x}_0(t-t_0)) \wedge g(\overline{x}_0(t-t_0))dt = \int_{\mathrm{int}\Gamma^0} \mathrm{trace} Dg(x)dx. \quad (6.4.25)$$

定理 6.4.1 是在很一般的情况下证明的. 它对具有较强耗散情形也可以应用. 例如, 设 $(6.4.1)_{\varepsilon=0}$ 中函数 f 满足关系

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=a(t-t_0)=\text{常数}, \tag{6.4.26}$$

如假设 $f_1(x)=\alpha x_1+f_1(x_2), f_2(x)=f_2(x_1)+\beta x_2$, 且 $(6.4.1)_{\varepsilon=0}$ 满足条件 (H_1), 则易证

命题 6.4.1 *当 $t\to-\infty$ 时, $\left\{\exp\left[\int_{t_0}^t a(s-t_0)ds\right]\right\}\Delta^u(t,t_0)$ 至少以衰减率 $\exp[(\lambda_1-(\alpha+\beta)+\eta_1)t]$ 指数式地趋于零. 当 $t\to+\infty$ 时, $\left\{\exp\left[-\int_{t_0}^t a(s-t_0)ds\right]\right\}$ $\Delta^s(t,t_0)$ 至少以衰减率 $\exp[-((\alpha+\beta)-\lambda_2+\eta_2)t]$ 指数式地趋于零, 其中 η_1,η_2 任意地小.*

由命题 6.4.1 可知, 此时 Mel′nikov 函数 (6.4.21) 有效. 利用该公式可用分析方法或数值方法研究系统 $(6.4.1)_\varepsilon$ 的横截同宿点的存在性.

对系统 $(6.4.1)_\varepsilon$, Mel′nikov 积分还可以判定系统参数改变时, 是否存在非退化同宿相切的情况. 以下定理给出了应用 Newhouse 等的定理的条件.

定理 6.4.2 *设 f 为 Hamilton 向量场, 考虑单参数扰动系统族*

$$\dot{x}=f(x)+\varepsilon g(x,t,\mu),\quad x\in\mathbf{R}^2. \tag{6.4.27}$$

如果条件 $(\mathrm{H}_1),(\mathrm{H}_2)$ 成立, 且 Mel′nikov 函数 $M(t_0,\mu)$ 存在二阶零点, 即 $M(\tau,\mu_b)=\dfrac{\partial M(\tau,\mu_b)}{\partial t_0}=0$, 但 $\dfrac{\partial^2 M(\tau,\mu_b)}{\partial t_0^2}\neq 0$, $\dfrac{\partial M(\tau,\mu_b)}{\partial\mu}\neq 0$. 则 $\mu_B=\mu_b+O(\varepsilon)$ 是单参数系族 (6.4.27) 中出现二阶同宿相切的分枝参数值.

证 在定理假设下, $d(t_0,\mu)$ 可展为以下级数:

$$d(t_0,\mu)=\varepsilon\{\alpha(\mu-\mu_b)+\beta(t_0-\tau)^2\}+O(\varepsilon|\mu-\mu_b|^2)+O(\varepsilon^2). \tag{6.4.28}$$

由 (6.4.28) 可见, $d(t_0,\mu)$ 仅对 μ_b 附近的某个 μ_B 值关于 t_0 有二阶零点. 因此, 在 Σ^{t_0} 截面上当 $t_0=\tau$ 时, 在 $\overline{x}(0)$ 近旁, $W^u(p_\varepsilon^\tau)$ 与 $W^s(p_\varepsilon^\tau)$ 有二次相切性. □

定理 6.4.1 与 6.4.2 的结果可推广而用于未扰动系统 $(6.4.1)_{\varepsilon=0}$ 存在异宿轨道的情形, 用于判断是否存在横截异宿点和横截异宿环等, 将在后面一章结合应用实例作细致的讨论.

6.5 周期扰动系统的次谐波 Mel′nikov 函数

本节继续讨论 6.4 节中的系统 $(6.4.1)_\varepsilon$. 但为简单起见, 设 $(6.4.1)_{\varepsilon=0}$ 是 Hamilton 系统, 即

$$f_1(x_1,x_2)=\frac{\partial H}{\partial x_2},\quad f_2(x_1,x_2)=-\frac{\partial H}{\partial x_1}, \tag{6.5.1}$$

其中, $H\equiv H(x_1,x_2)=h$ 是 $(6.4.1)_{\varepsilon=0}$ 的首次积分.

除 6.4 节的假设 $(\mathrm{H}_1)(\mathrm{H}_2)$ 外, 本节增加假设

(H_3) 在 $(6.4.1)_{\varepsilon=0}$ 的同宿轨道 $\overline{\Gamma}_0=\{x_\alpha(t)\}$, $x_\alpha(t)$ 对应的 Hamilton 量为 $h=h_\alpha$. 用 T_α 表示 Γ_α 的周期, T_α 关于 h_α 可微, 并且在 $\overline{\Gamma}_0$ 内处处有

$$\frac{dT_\alpha}{dh_\alpha}>0. \tag{6.5.2}$$

不失一般性, 设 $\alpha\in(-1,0),\alpha=0$ 对应于同宿轨道 $\overline{\Gamma}_0$.

类似于引理 6.4.2, 有

引理 6.5.1　*设 $x_\alpha(t-t_0)$ 是未扰动系统 $(6.4.1)_{\varepsilon=0}$ 在 Σ^{t_0} 上的具有周期 T_a 的周期轨道, 则存在 $(6.4.1)_\varepsilon$ 的扰动轨道 $x_\varepsilon^\alpha(t,t_0)$, 未必是周期函数, 该轨道的方程可表示为在 $t\in[t_0,t_0+T_\alpha]$ 内一致有效的渐近展开式:*

$$x_\varepsilon^\alpha(t,t_0)=x_\alpha(t-t_0)+\varepsilon x_1^\alpha(t,t_0)+o(\varepsilon^2). \tag{6.5.3}$$

以下假设 Γ_α 是具有周期 $T_\alpha=\dfrac{mT}{n}$ 的周期轨道, 其中 m,n 是互素整数, T 为扰动函数的周期. 上述关系称为共振关系, 兹定义次谐波 Mel′nikov 函数如下:

$$M^{m/n}(t_0)=\int_0^{mT}f(x_\alpha(t))\wedge g(x_\alpha(t),t+t_0)dt. \tag{6.5.4}$$

于是, 类似于 6.2 节, 以下的定理成立:

定理 6.5.1　*如果 $M^{m/n}(t_0)$ 有不依赖于 ε 的简单零点, 且 $\dfrac{dT_\alpha}{dh_\alpha}\neq 0$, 则对于 $0<\varepsilon<\widetilde{\varepsilon}(n)$, 系统 $(6.4.1)_\varepsilon$ 存在周期为 mT 的次谐波轨道. 若 $n=1$, 则上述结果在 $0<\varepsilon\leqslant\widetilde{\varepsilon}(1)$ 内是一致有效的.*

对 $n>1$, 上述结果关于 ε 非一致有效, 因为引理 6.5.1 中的展式在此情形是非一致渐近有效的.

若 $(6.4.1)_{\varepsilon=0}$ 不是 Hamilton 系统, 而是一般的可积系统, 在同宿轨道 $\overline{\Gamma}_0$ 内同样存在一族周期轨道 $\Gamma_\alpha=\{x_\alpha(t)\}$, 则由第 5 章的结果可得以下形式的次谐波 Mel′nikov 函数:

$$M^{m/n}(t_0)=\int_0^{mT}f(x_\alpha(t))\wedge g(x_\alpha(t),t+t_0)\exp\left[-\int_0^t\mathrm{trace}Df(x_\alpha(s))ds\right]dt. \tag{6.5.5}$$

于是对于一般的可积系统 $(6.4.1)_\varepsilon$, 当 $M^{m/n}(t_0)$ 存在简单零点时, 定理 6.5.1 的结论成立.

类似于 6.4 节定理 6.4.2, 有

定理 6.5.2　*考虑单参数系统族 (6.4.27), 在 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$ 条件下, 若 $M^{m/n}(t_0,\mu)$ 当 $\mu=\mu_b$ 时有二阶零点, 即在 $\mu=\mu_b$, $M^{m/n}(t_0,\mu)=\dfrac{\partial M^{m/n}(t_0,\mu)}{\partial t_0}=$*

0; $\dfrac{\partial^2 M^{m/n}(t_0,\mu)}{\partial t_0^2} \neq 0$, $\dfrac{\partial M^{m/n}(t_0,\mu)}{\partial \mu} \neq 0$. 则参数值 $\mu_{m/n} = \mu_b + O(\varepsilon)$ 是周期轨道出现的鞍结分枝值.

下面的定理指出, 同宿分枝是可数多个次谐波鞍结分枝的极限, 其证明类似于 6.2 节.

定理 6.5.3 设 $M^{m/1}(t_0) = M^m(t_0)$, 则

$$\lim_{m\to\infty} M^m(t_0) = M(t_0). \tag{6.5.6}$$

以下用平均法讨论次谐波解的稳定性, 该方法与 6.3 节所述方法有所不同.

引进角度一作用变换, 即设 $(6.4.1)_\varepsilon$ 中 $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, 令

$$I = I(u,v), \quad \theta = \theta(u,v), \tag{6.5.7}$$

其逆为

$$u = U(I,\theta), \quad v = V(I,\theta). \tag{6.5.8}$$

根据第 5 章的结果, 方程 $(6.4.1)_\varepsilon$ 可化为

$$\begin{aligned} \dot I &= \varepsilon\left(\frac{\partial I}{\partial u}g_1 + \frac{\partial I}{\partial v}g_2\right) \overset{\text{def}}{=} \varepsilon F(I,\theta,t), \\ \dot\theta &= \Omega(I) + \varepsilon\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}g_1 + \frac{\partial \theta}{\partial v}g_2\right) \overset{\text{def}}{=} \Omega(I) + \varepsilon G(I,\theta,t). \end{aligned} \tag{6.5.9}$$

此时 Hamilton 量 H 化为 $H(I), H(I)$ 不依赖于 θ, 并设 $\Omega(I) = \dfrac{\partial H}{\partial I}$ 为具有作用 I 与能量 $H(I)$ 的角频率, $\Omega(I^\alpha) = \dfrac{\partial H}{\partial I} = \dfrac{2\Pi}{T_\alpha}$, $\quad I^\alpha = I(x_\alpha(t))$.

考虑具有共振周期 $\dfrac{mT}{n}$ 及作用 $I^{m,n}$ 的共振轨道的小扰动. 作变换

$$\begin{aligned} I &= I^{m,n} + \sqrt{\varepsilon}h, \\ \theta &= \Omega(I^{m,n})t + \phi = \left(\frac{2\pi n}{mT}\right)t + \phi \overset{\text{def}}{=} \Omega^{m,n}(t) + \phi, \end{aligned} \tag{6.5.10}$$

其中 h 与 ϕ 表示从解 $x_{\alpha(m,n)}(t)$ 的扰动. 将 (6.5.10) 代入 (6.5.9) 并展为 ε 的 Taylor 级数可得

$$\begin{aligned} \dot h &= \sqrt{\varepsilon}F(I^{m,n},\Omega^{m,n}t+\phi,t) + \varepsilon F'(I^{m,n},\Omega^{m,n}t+\phi,t)h + O(\varepsilon^{3/2}), \\ \dot\phi &= \sqrt{\varepsilon}\Omega'(I^{m,n})h + \varepsilon[G((I^{m,n},\Omega^{m,n}t+\phi,t) + \frac{1}{2}\Omega''(I^{m,n})h^2] + O(\varepsilon^{3/2}). \end{aligned} \tag{6.5.11}$$

上式中,

$$\Omega'(I^{m,n}) = \left.\frac{d\Omega}{dI}\right|_{I=I^{m,n}}, \quad \Omega''(I^{m,n}) = \left.\frac{d^2\Omega}{dI^2}\right|_{I=I^{m,n}}.$$

由 $\dfrac{\partial T}{\partial h} \neq 0$ 的假设, 可保证 $\Omega' \neq 0$. 由求导的链法则得

$$\frac{\partial I}{\partial u} = \frac{\partial I}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{1}{\Omega}\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{1}{\Omega}f_2, \quad \frac{\partial I}{\partial v} = \frac{1}{\Omega}f_1. \tag{6.5.12}$$

于是, (6.5.11) 中第一式右边的 F 为

$$F = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\Omega^{m,n}}(f_1 g_2 - f_2 g_1) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\Omega^{m,n}}(f \wedge g). \tag{6.5.13}$$

因此, (6.5.11) 可化为

$$\begin{aligned}
\dot{h} &= \sqrt{\varepsilon}\frac{1}{\Omega^{m,n}} f(x_\alpha(t)) \wedge g\left(x_\alpha(t), t + \frac{\phi}{\Omega^{m,n}}\right) \\
&\quad + \varepsilon[F'(I^{m,n}, \Omega^{m,n}t + \phi, t)h] + O(\varepsilon^{3/2}), \\
\dot{\phi} &= \sqrt{\varepsilon}\Omega'(I^{m,n}) + \varepsilon\left[\frac{\Omega''(I^{m,n})h^2}{2} + G(I^{m,n}, \Omega^{m,n}t + \phi, t)\right] + O(\varepsilon^{3/2}).
\end{aligned} \tag{6.5.14}$$

如果 $\Omega'(I^{m,n})$ 有界, $\sqrt{\varepsilon}$ 充分小, 则平均法中的结果可用于 (6.5.14), 因此可研究平均方程:

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{h}} &= \sqrt{\varepsilon}\frac{1}{2\pi n} M^{m/n}\left(\frac{\overline{\phi}}{\Omega^{m,n}}\right) + \varepsilon\overline{F'_m(\overline{\phi})\overline{h}} + O(\varepsilon^{3/2}), \\
\dot{\overline{\phi}} &= \sqrt{\varepsilon}\Omega'(I^{m,n})\overline{h} + \varepsilon\left(\frac{1}{2}\Omega''(I^{m,n})\overline{h^2} + \overline{G_m(\overline{\phi})}\right) + O(\varepsilon^{3/2}),
\end{aligned} \tag{6.5.15}$$

其中,

$$M^{m/n}\left(\frac{\overline{\phi}}{\Omega^{m,n}}\right) = \int_0^{mT} f(x_\alpha(t)) \wedge g(x_\alpha(t), t + (\overline{\phi}/\Omega^{m,n}))dt$$

是次谐波 Mel'nikov 函数的形式, 而

$$\overline{F'_m(\overline{\phi})} = \frac{1}{mT}\int_0^{mT} F'(I^{m,n}, \Omega^{m,n}t + \overline{\phi}, t)dt, \tag{6.5.16}$$

$$\overline{G_m(\overline{\phi})} = \frac{1}{mT}\int_0^{mT} G(I^{m,n}, \Omega^{m,n}t + \overline{\phi}, t)dt, \tag{6.5.17}$$

这里 $F'(I,\theta,t) = \dfrac{\partial}{\partial I}F(I,\theta,t)$.

如果在 (6.5.15) 中不考虑 ε 项, 精确到 $\sqrt{\varepsilon}$, (6.5.15) 可化简为

$$\dot{\overline{h}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\pi n} M^{m/n}\left(\frac{\overline{\phi}}{\Omega^{m,n}}\right), \quad \dot{\overline{\phi}} = \sqrt{\varepsilon}\Omega'(I^{m,n})\overline{h}. \tag{6.5.18}$$

显然, (6.5.18) 为 Hamilton 系统, 其首次积分为

$$\overline{H}(\overline{h}, \overline{\phi}) = \sqrt{\varepsilon}\left\{\frac{1}{2\pi n}\int M^{m/n}\left(\frac{\overline{\phi}}{\Omega^{m,n}}\right)d\overline{\phi} - \frac{1}{2}\Omega'(I^{m,n})h^2\right\}. \tag{6.5.19}$$

由 (6.5.18) 可直接看出, 当 $\overline{h}=0, M^{m/n}\left(\dfrac{\overline{\phi}}{\Omega^{m,n}}\right)=0$ 时, 系统有平衡点. 由假设 $\dfrac{\partial T}{\partial h}, \dfrac{\partial T}{\partial I}>0, \Omega'<0$, 若 $\dfrac{\partial}{\partial\phi}(M^{m/n})<0$, 平衡点是鞍点; 若 $\dfrac{\partial}{\partial\phi}(M^{m/n})>0$, 平衡点是中心.

根据平均定理, (6.5.18) 的双曲或椭圆的不动点对应于 (6.5.15) 的小周期运动, 即 m/n 阶次谐波, 且接近于 (6.5.18) 的鞍点, 存在原系统的鞍型轨道. 这里用平均法再次得到定理 6.5.1 给出的结论. 但随着闭轨逼近于同宿轨道, $\Omega'(I^\alpha)$ 无限增加, 平均定理的结果是非一致有效的. 由于 Hamilton 系统不是结构稳定系统, 因此, 为确定扰动系统接近 (6.5.18) 的中心型轨道的稳定性质, 必须考虑整个系统 (6.5.15), 对该系统进行二阶平均. 以确定次谐波的稳定性.

定理 6.5.4 *若 $\mathrm{trace}Dg<0(>0)$, 则系统 (6.5.15) 若存在周期轨道, 必为鞍型的及汇 (源), 且该系统的 Poincaré 映射 P_ε 为不可能存在任何不变曲线.*

证 由于未扰动系统 $(6.4.1)_{\varepsilon=0}$ 假设是 Hamilton 系统, 因此其 Poincaré 映射保面积, 从而 $\det|DP|=1$. 若扰动系统具有 “正阻尼”, 即 $\mathrm{trace}Dg<0$, 于是扰动的三维流收缩体积, 收缩率类似 $e^{(\mathrm{trace}Dg)t}$. 因此扰动的 Poincaré 映射收缩面积 ($\det(DP_\varepsilon)<1$ 几乎处处成立). 由于特征乘子之积 $\lambda_1\lambda_2=\det(DP_\varepsilon)<1$, 故映射 P 的周期点或为鞍型的或为汇. 由于 P_ε 处处收缩面积, 故不可能存在简单的闭不变曲线. 类似地, 可证 $\mathrm{trace}Dg>0$ 情形. □

6.6 慢变振子的周期轨道

本节和下一节讨论 Mel′nikov 方法向三维的推广, 以便提供对动力学和其他领域中某些系统的应用. 由于该方法比前几节的结果有明显的可计算性, 因此, 显示了这种推广的应用价值. 本节和下一节的结果取材于 Wiggins 和 Holmes(1987). 对于三维扰动广义的 Hamilton 系统, 经过简化, 可化为本节研究的形式 (李继彬等, 2007).

考虑以下形式的慢变振子:

$$\begin{cases}\dot{x}=f_1(x,y,z)+\varepsilon g_1(x,y,z,t;\mu),\\ \dot{y}=f_2(x,y,z)+\varepsilon g_2(x,y,z,t;\mu),\\ \dot{z}=\varepsilon g_3(x,y,z,t;\mu)\end{cases}\tag{6.6.1}$$

或

$$\dot{q}=f(q)+\varepsilon g_\mu(q,t),\tag{6.6.2}$$

其中 $g_i\ (i=1,2,3)$ 是 t 的 T 周期函数, 依赖于参数 $\mu\in\mathbf{R}^K$, $f=(f_1,f_2,0)^T$, $q=(x,y,z)^T, 0<\varepsilon\ll 1$.

设 f 与 g 充分光滑 (是 C^r 的, $r \geqslant 4$). 对未扰动系统 $(6.6.1)_{\varepsilon=0}$ 作如下假设:

(A_1) 当 $\varepsilon = 0$ 时, $(6.6.1)_{\varepsilon=0}$ 约化为具有 Hamilton 量 $H(x, y, z)$ 的平面 Hamilton 系统的单参数族:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z) = \dfrac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = f_2(x, y, z) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}, \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$$

(A_2) 对于某个开区间 $J \subset \mathbf{R}$ 内的 z 之值, "平面"系统 $(6.6.1)_{\varepsilon=0}$ 存在周期为 $T(\alpha, z)$ 的周期轨道族 $q^{\alpha,z}(t-\theta)$, 其中 $\alpha \in L(Z), L(Z)$ 为 $\mathbf{R}$ 中某开区间, θ 表示"相"或轨道的初始点. 设 $T(\alpha, z)$ 为 α 与 z 的可微函数, 在这里的假设下, 在三维相空间中, 系统 $(6.6.1)_{\varepsilon=0}$ 存在不变相柱面的光滑族 (见图 6.6.1).

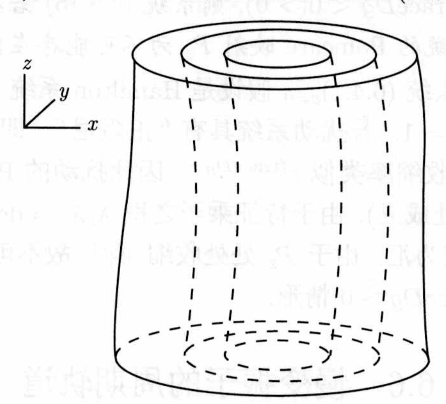


图 6.6.1　　未扰动系统 $(6.6.1)_{\varepsilon=0}$ 的相柱面图

有时将 $(6.6.1)_\varepsilon$ 看作自治系统是方便的, 为此定义 $\phi(t) = t \mod T$, 利用 g_i 之 T 周期性, 有扭扩系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z) + \varepsilon g_1(x, y, z, \phi), \\ \dot{y} = f_2(x, y, z) + \varepsilon g_2(x, y, z, \phi), \\ \dot{z} = \varepsilon g_3(x, y, z, \phi), \quad (x, y, z, \phi) \in \mathbf{R}^3 \times S^1, \\ \dot{\phi} = 1. \end{cases} \tag{6.6.3}$$

用 $\widetilde{L}(Z) \subset L(Z)$ 表示这样的 α 集合, 若 $\alpha \in \widetilde{L}(Z)$, 则在固定的 z 平面: $z = \text{Constant}$ 上, 周期轨道的周期 $T(\alpha, z)$ 一致有界, 其上界为 K, 类似于 6.5 节的结果, 有

命题 6.6.1　设 $q_0^{\alpha,z}(t-\theta_0)$ 是未扰动系统具有周期 $T(\alpha, z) < K$ 的周期轨道, 则存在扰动轨道 $q_\varepsilon^{\alpha,z}(t, \theta)$ 未必为周期函数, 对充分小的 ε 与 $\alpha \in \widetilde{L}(Z)$, 在 $t \in [t_0, t_0 + T(\alpha, z)]$ 内可表示为一致有效的渐近展式:

$$q_\varepsilon^{\alpha,z}(t, \theta) = q_0^{\alpha,z}(t-\theta) + \varepsilon q_1^{\alpha,z}(t, \theta) + O(\varepsilon^2). \tag{6.6.4}$$

注 对 $\widetilde{L}(Z)$ 的限制是为避免周期变为无界. 此外, $q_1^{\alpha,z}(t,\theta)$ 必满足第一变分方程

$$\dot{q}_1^{\alpha,z} = Df(q_0^{\alpha,z})q_1^{\alpha,z} + g(q_0^{\alpha,z},t). \tag{6.6.5}$$

问题在于, 对未扰动系统的任何周期轨道的两参数族, 扰动系统仍保持此性质吗? 为回答这个问题, 需要将四维问题 (6.6.3) 转化为三维的 Poincaré 映射. 定义横截于向量场 (6.6.3) 的大范围横截面

$$\Sigma^0 = \{(x,y,z,\phi)|\ \phi = 0\},$$

并在 Σ^0 上定义映射 P: 从 Σ^0 某点出发的轨道经时间 T 后再次返回 Σ^0, 于是映射 P 的不动点对应于向量场的周期轨道.

对系统 (6.6.3) 作辛变换

$$(x(I,\theta),y(I,\theta),z) \to (I(x,y,z),\theta(x,y,z),z),$$

(6.6.3) 化为

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon\left(\dfrac{\partial I}{\partial x}g_1 + \dfrac{\partial I}{\partial y}g_2 + \dfrac{\partial I}{\partial z}g_3\right) \equiv \varepsilon F(I,\theta,z,\phi), \\ \dot{\theta} = \Omega(I,z) + \varepsilon\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial x}g_1 + \dfrac{\partial \theta}{\partial y}g_2 + \dfrac{\partial \theta}{\partial z}g_3\right) \equiv \Omega(I,z) + \varepsilon G(I,\theta,z), \\ \dot{z} = \varepsilon g_3, \\ \dot{\phi} = 1, \end{cases} \tag{6.6.6}$$

其中, F,G,g_3 为 ϕ 的 T 周期函数, $\Omega(I,z) = \dfrac{\partial H}{\partial I}$ 是未扰动系统在 $z = \text{Constant}$ 平面上具有作用 I 及能量 $H(I<z)$ 的闭轨之角频率. 因此, 在作用 — 角度坐标系中, 作用 I 起着参数 α 的作用. 积分未扰动系统 $(6.6.6)_{\varepsilon=0}$ 可得

$$\begin{cases} I = I_0, \\ \theta = \Omega(I_0,z_0)(t-t_0) + \theta_0, \\ z = z_0. \end{cases} \tag{6.6.7}$$

对于系统 $(6.6.6)_\varepsilon$, 流的横截面是

$$\Sigma^0 = \{(I,\theta,z,\phi)|\ \phi = 0\}.$$

而 Poincaré 映射的 m 次迭代 P_ε^m 是

$$\begin{aligned} P_\varepsilon^m :& (I_\varepsilon(0,0,I_0,\theta_0,z_0),\theta_\varepsilon(0,0,I_0,\theta_0,z_0),z_\varepsilon(0,0,I_0,\theta_0,z_0)) \to \\ & (I_\varepsilon(mT,0,I_0,\theta_0,z_0),\theta_\varepsilon(mT,0,I_0,\theta_0,z_0),z_\varepsilon(mT,0,I_0,\theta_0,z_0)), \end{aligned}$$

其中初值的选择使得

$$\begin{cases} I_\varepsilon(0,0,I_0,\theta_0,z_0) = I_0, \\ \theta_\varepsilon(0,0,I_0,\theta_0,z_0) = \theta_0, \\ z_\varepsilon(0,0,I_0,\theta_0,z_0) = z_0. \end{cases} \tag{6.6.8}$$

兹应用命题 6.6.1 及由 (6.6.7) 确定的未扰动系统的解, 并用正则摄动法近似地确定 Poincaré 映射. $(6.6.6)_\varepsilon$ 的解可写为

$$\begin{aligned} P_\varepsilon^m : (I_0,\theta_0,z_0) &\to (I_0,\theta_0,z_0) + (0, mT\Omega(I_0,z_0), 0) \\ &+\varepsilon(I_1(mT,0,I_0,\theta_0,z_0), \theta_1(mT,0,I_0,\theta_0,z_0), Z_1(mT,0,I_0,z_0)) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{6.6.9}$$

上述近似表示对未扰动轨道的周期 $T(I,z) = mT$ 是一致渐近有效的. 但对于超次谐情形 $(T(I,z) = mT/n, n \geqslant 2, m, n$ 互素), 由于随着 n 增加, ε 必须收缩到 0, 故近似非一致渐近有效.

以下通过解第一变分方程以确定 I_1, θ_1, z_1. 由 (6.6.7) 得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot I_1 \\ \dot\theta_1 \\ \dot z_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \partial\Omega/\partial I_0|_{I_0,z_0} & 0 & \partial\Omega/\partial z_0|_{I_0,z_0} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \theta_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} F(I_0,\Omega(I_0,z_0)t+\theta_0,z_0,t) \\ G(I_0,\Omega(I_0,z_0)t+\theta_0,z_0,t) \\ g_3(I_0,\Omega(I_0,z_0)t+\theta_0,z_0,t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.6.10}$$

于是

$$\begin{cases} I_1(mT,0,I_0,\theta,z_0) = \displaystyle\int_0^{mT} F(I_0,\Omega(I_0,z_0)t,\theta_0,z_0,t)dt \stackrel{\text{def}}{=} \overline{M_1}^{m/n}(I_0,\theta_0,z_0), \\ \theta_1(mT,0,I_0,\theta,z_0) = \dfrac{\partial\Omega}{\partial I_0}\Big|_{I_0,z_0} \displaystyle\int_0^{mT}\int_0^t F(I_0,\Omega(I_0,z_0)\xi+\theta_0,z_0,\xi)d\xi dt \\ \qquad + \displaystyle\int_0^{mT} G(I_0,\Omega(I_0,z_0)t+\theta_0,z_0,t)dt \\ \qquad + \dfrac{\partial\Omega}{\partial z_0}\Big|_{I_0,z_0} \displaystyle\int_0^{mT}\int_0^t g_3(I_0,\Omega(I_0,z_0)\xi+\theta_0,z_0,\xi)d\xi dt \\ \qquad \stackrel{\text{def}}{=} \overline{M_2}^{m/n}(I_0,\theta_0,z_0), \\ z_1(mT,0,I_0,\theta,z_0) = \displaystyle\int_0^{mT} g_3(I_0,\Omega(I_0,z_0)t+\theta_0,t)dt \stackrel{\text{def}}{=} \overline{M_3}^{m/n}(I_0,\theta_0,z_0). \end{cases} \tag{6.6.11}$$

由 (6.6.11) 可知, Poincaré 映射 P_ε^m 具有形式

$$\begin{aligned}P_\varepsilon^m:(I_0,\theta_0,z_0)\to&(I_0,\theta_0,z_0)+(0,\Omega(I_0,z_0)mT,0)\\&+\varepsilon(\overline{M_1}^{m/n}(I_0,\theta_0,z_0),\overline{M_2}^{m/n}(I_0,\theta_0,z_0),\overline{M_3}^{m/n}(I_0,\theta_0,z_0))+O(\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{6.6.12}$$

兹定义向量 $\overline{M}^{m/n}$ 为

$$\overline{M}^{m/n}(I_0,\theta_0,z_0)=(\overline{M_1}^{m/n}(I_0,\theta_0,z_0),\overline{M_2}^{m/n}(I_0,\theta_0,z_0),\overline{M_3}^{m/n}(I_0,\theta_0,z_0)),$$

上标 m/n 表示研究满足共振条件 $T(I,z)=mT/n$ (m,n 互素) 的周期轨道.

定理 6.6.1 设 (I_0^*,θ_0^*,z_0^*) 是使 $T(I_0^*,z_0^*)=mT/n$ 且满足以下条件的点:

$$\left.\frac{\partial\Omega}{\partial I_0}\right|_{(I_0^*,z_0^*)}\neq 0 \text{ 或 } \left.\frac{\partial\Omega}{\partial z_0}\right|_{I_0^*,z_0^*}\neq 0,$$

$$\left.\left[\frac{\partial\Omega}{\partial I_0}\left(\frac{\partial\overline{M_1}}{\partial\theta_0}\frac{\partial\overline{M_3}}{\partial z_0}-\frac{\partial\overline{M_1}}{\partial z_0}\frac{\partial\overline{M_3}}{\partial\theta_0}\right)+\frac{\partial\Omega}{\partial z_0}\left(\frac{\partial\overline{M_1}}{\partial I_0}\frac{\partial\overline{M_3}}{\partial\theta_0}-\frac{\partial\overline{M_1}}{\partial\theta_0}\frac{\partial\overline{M_3}}{\partial I_0}\right)\right]\right|_{(I_0^*,\theta_0^*,z_0^*)}\neq 0.$$

又设

$$\overline{M}_1^{m/n}(I_0^*,\theta_0^*,z_0^*)=\overline{M}_3^{m/n}(I_0^*,\theta_0^*,z_0^*)=0.$$

则对 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon(n)$, Poincaré 映射 P_ε^m 存在周期 m 的不动点. 若 $n=1$, 这个结果在 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon(1)$ 上是一致有效的.

证 由共振条件 $T(I_0^*,z_0^*)=mT/n$ 可知, $mT\Omega(I_0^*,z_0^*)=2\pi n$, 因为 $mT\Omega$ 是角变量. 为确定起见, 设 $\left.\frac{\partial\Omega}{\partial z_0}\right|_{(I_0^*,z_0^*)}\neq 0$ (情况 $\left.\frac{\partial\Omega}{\partial z_0}\right|_{I_0^*,z_0^*}\neq 0$ 的证明是类似的). 兹扰动点 (I_0^*,θ_0^*,z_0^*) 到 $(I_0^*,\theta_0^*,z_0^*+\Delta z)$, 在后一个点, Poincaré 映射有以下形式:

$$\begin{aligned}&P_\varepsilon^m(I_0^*,\theta_0^*,z_0^*+\Delta z)-(I_0^*,\theta_0^*,z_0^*+\Delta z)\\&=\left(0,mT\left.\frac{\partial\Omega}{\partial z_0}\right|_{(I_0^*,z_0^*)}\Delta z+\varepsilon\overline{M}_2(I_0^*,\theta_0^*,z_0^*)+O(\Delta z^2)+O(\varepsilon\Delta z),0\right)+O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

若选择

$$\Delta z=-\varepsilon\frac{\overline{M}_2(I_0^*,\theta_0^*,z_0^*)}{mT\left.\frac{\partial\Omega}{\partial z_0}\right|_{(I_0^*,z_0^*)}},$$

则由定理之假设, 有

$$\begin{aligned}&P_\varepsilon^m(I_0^*,\theta_0^*,z_0^*+\Delta z)-(I_0^*,\theta_0^*,z_0^*+\Delta z)=O(\varepsilon^2),\\&\det|DP_\varepsilon^m-id|_{(I_0^*,\theta_0^*,z_0^*+\Delta z)}=\varepsilon^2\left[\frac{\partial\Omega}{\partial I_0}\left(\frac{\partial\overline{M}_1}{\partial\theta_0}\frac{\partial\overline{M}_3}{\partial z_0}-\frac{\partial\overline{M}_1}{\partial z_0}\frac{\partial\overline{M}_3}{\partial\theta_0}\right)\right.\\&\qquad\left.+\frac{\partial\Omega}{\partial z_0}\left(\frac{\partial\overline{M}_1}{\partial I_0}\frac{\partial\overline{M}_3}{\partial\theta_0}-\frac{\partial\overline{M}_1}{\partial\theta_0}\frac{\partial\overline{M}_3}{\partial I_0}\right)\right]+O(\varepsilon^3).\end{aligned}$$

于是由于

$$||DP_\varepsilon^m - id|| = O(1),$$

根据隐函数定理, Poincaré 映射在 $(I_0^*, \theta_0^*, z_0^* + \Delta z)$ 近旁存在不动点, 从而微分方程在上述点近旁存在周期 mT/n 的孤立周期轨道. □

注 (i) 由定理 6.6.1 可见, 不需要用到 $\overline{M}_2^{m/n}$ 的知识, 因此, 不必计算 (6.6.11) 中的二重积分.

(ii) 虽然 P_ε^m是 $\mathbf{R}^3$ 中的微分同胚, 为确定是否存在不动点, 我们只需检查映射的第一和第三个分量即可. 这是因为非零扭转条件 $\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial I_0}\text{或}\dfrac{\partial\Omega}{\partial z_0} \neq 0\right)$ 局部地保证了经过 mT 时间后, 轨道再次返回适当的截面.

定理 6.6.1 不能用于自治向量场情形, 在自治情形通过固定 $\theta = \theta_0$, 其研究可以简化到 $\mathbf{R}^2$ 中的微分同胚.

以下略去 I, θ 与 z 中的小标"0". 类似于定理 6.6.1 的证明, 在自治情形有

定理 6.6.2 *若存在点 (I^*, z^*) 使得*

(a) $\overline{M}_1(I^*, z^*) = \overline{M}_3(I^*, z^*) = 0$;

(b) $\left.\dfrac{\partial(\overline{M}_1, \overline{M}_3)}{\partial(I, z)}\right|_{(I^*, z^*)} \neq 0.$

则 $(I^*, z^*) + O(\varepsilon)$ 是 Poincaré 映射的孤立不动点, 它对应于三维流的孤立周期轨道.

在定理 6.6.2 中, $\overline{M}_i$ 中的 m/n 被略去了, 积分限为 0 到 $T(I, z)$.

上面的两定理是在作用－角度坐标下得出的, 为了回到轨道坐标, 先对定理中的 $M^{m/n}$ 的第一、三分量作某些直观的几何解释, 以便理解推广的 Mel′nikov 函数的意义.

由于未扰动系统是自治的, 在每个横截面 Σ^0 上, 有未扰动系统的相空间的相同的断面. 此外, 系统具有两种定常运动: $H(x, y, z)$ 与 z 本身. 这两个定常运动可以用于在 Σ^0上沿着未扰动系统的轨道构造运动的"轨道坐标系". 取定常运动的梯度, 可得两个向量 $\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}, \dfrac{\partial H}{\partial y}, 0\right)$ 与 $(0, 0, 1)$. 这两个向量张成平面 π, 而两向量是在横截面 Σ^0 中的未扰动轨道上点 $q_0^{\alpha,z}(-\theta)$ 取值的. 于是, 随着 θ 的改变, 平面 π 在 Σ^0 中沿未扰动轨道作平移 (见图 6.6.2).

引入两分量向量值函数

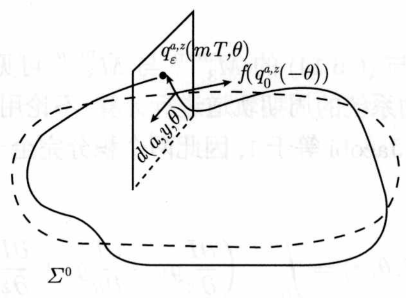


图 6.6.2 Σ^0 上的轨道坐标系

$$\begin{aligned}
&d(\alpha,\theta,z)\\
=&\frac{\left([q_\varepsilon^{\alpha,z}(mT,\theta)-q_\varepsilon^{\alpha,z}(0,\theta)]\cdot\left(\frac{\partial H}{\partial x},\frac{\partial H}{\partial y},0\right),\ [q_\varepsilon^{\alpha,z}(mT,\theta)-q_\varepsilon^{\alpha,z}(0,\theta)]\cdot(0,0,1)\right)}{||f(q_0^{\alpha,z}(-\theta))||}\\
=&\frac{\varepsilon\left([q_1^{\alpha,z}(mT,\theta)-q_1^{\alpha,z}(0,\theta)]\cdot\left(\frac{\partial H}{\partial x},\frac{\partial H}{\partial y},0\right),[q_1^{\alpha,z}(mT,\theta)-q_1^{\alpha,z}(0,\theta)]\cdot(0,0,1)\right)}{||f(q_0^{\alpha,z}(-\theta))||}\\
&+O(\varepsilon^2)\\
\stackrel{\text{def}}{=}&\varepsilon M^{m/n}(\alpha,\theta,z)+O(\varepsilon^2),
\end{aligned}\tag{6.6.13}$$

其中, $M^{m/n}(\alpha,\theta,z)=(M_1^{m/n}(\alpha,\theta,z),M_3^{m/n}(\alpha,\theta,z))$ 称为次谐波 Mel'nikov 函数. “$||\cdot||$”表示 Euclid 范数, “$\cdot$”表示向量的数量积, $mT=nT(\alpha,z)$ 为共振关系, 而 $T(\alpha,z)$ 为未扰动系统的周期轨道 $q_0^{\alpha,z}(t-\theta)$ 的周期.

从几何直观上可以看出, 在横截面 Σ^0 上, 有在点 $q_0^{\alpha,z}(-\theta)$ 正交于向量 $f(q_0^{\alpha,z})$ 的平面 π, 如果扰动系统的轨道之初值在平面 π 上, 并经过时间 mT 后以误差 $O(\varepsilon)$ 再次返回该平面, 则 $M^{m/n}$ 量度了在横截于未扰动轨道经 mT 时间的“错位”(shear). 如果这种“错位”之值为零, 我们就有希望得到扰动系统的 mT/n 周期轨道. $M^{m/n}$ 的明显的计算公式为

$$\begin{aligned}
&M^{m/n}(\alpha,\theta,z)\\
=&\frac{1}{||f(q_0^{\alpha,z}(-\theta))||}\left[\int_0^{mT}\left(\frac{\partial H}{\partial x}g_1+\frac{\partial H}{\partial y}g_2+\frac{\partial H}{\partial z}g_3\right)(q_0^{\alpha,z}(t),t+\theta)dt\right.\\
&\left.-\frac{\partial H}{\partial z}\left(q_0^{\alpha,z}\left(\frac{mT}{2}\right)\right)\int_0^{mT}g_3(q_0^{\alpha,z}(t),t+\theta)dt,\int_0^{mT}g_3(q_0^{\alpha,z}(t),t+\theta)dt\right],
\end{aligned}\tag{6.6.14}$$

其中 $q_0^{\alpha,z}(t-\theta)$ 为未扰动系统的周期为 $T(\alpha,z)=\dfrac{mT}{n}$ 的周期轨道.

以下我们指出, 定理 6.6.1 中通过作用—角度变量导出的 $\overline{M}^{m/n}$ 与 (6.6.14) 式

的结果是一致的.

首先, 比较 (6.6.11) 与 (6.6.14) 的 $M_3^{m/n}$ 与 $\overline{M}_3^{m/n}$ 可见, 积分号下的函数相图, 且两个积分都沿着未扰动系统的周期轨道进行计算. 不论用 (I,θ,z) 还是 (x,y,z) 坐标, 由于两坐标系之间的 Jacobi 等于 1, 因此两个积分完全一致, 即 $M_3^{m/n}\equiv\overline{M}_3^{m/n}$.

其次, 研究

$$\overline{M}_1^{m/n}(I,\theta,z)=\int_0^{mT}\left(\frac{\partial I}{\partial x}g_1+\frac{\partial I}{\partial y}g_2+\frac{\partial I}{\partial z}g_3\right)dt, \tag{6.6.15}$$

这里被积函数沿着表示为作用－角度变量形式的未扰动周期轨道进行计算 (注意, $\dfrac{\partial I}{\partial x}$ 指当 y,z 固定时, I 关于 x 的偏导数, 可记为 $\left.\dfrac{\partial I}{\partial x}\right|_{(y,z)}$, 偏导数 $\dfrac{\partial I}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial I}{\partial z}$ 有类似的记法).

在作用－角度变换下, Hamilton 量可以记为

$$H=H(I,z). \tag{6.6.16}$$

由于我们假设在所讨论区域内, $\left.\dfrac{\partial H}{\partial I}\right|_z$ 非零, 故由 (6.6.16) 可反解出

$$I=I(H,z). \tag{6.6.17}$$

对上式两边求导得

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial I}{\partial x}\right|_{(y,z)}=\left.\dfrac{\partial I}{\partial H}\right|_z\cdot\left.\dfrac{\partial H}{\partial x}\right|_{(y,z)},\\[2mm] \left.\dfrac{\partial I}{\partial y}\right|_{(x,z)}=\left.\dfrac{\partial I}{\partial H}\right|_z\cdot\left.\dfrac{\partial H}{\partial y}\right|_{(x,z)},\\[2mm] \left.\dfrac{\partial I}{\partial z}\right|_{(x,y)}=\left.\dfrac{\partial I}{\partial H}\right|_z\cdot\left.\dfrac{\partial H}{\partial z}\right|_{(x,y)}+\left.\dfrac{\partial I}{\partial z}\right|_H.\end{cases} \tag{6.6.18}$$

由于 $\left.\dfrac{\partial H}{\partial I}\right|_z=\Omega(I,z)$, 故将 (6.6.18) 代入 (6.6.15) 得

$$\overline{M}_1^{m/n}=\frac{1}{\Omega(I,z)}\int_0^{mT}\left(\frac{\partial H}{\partial x}g_1+\frac{\partial H}{\partial y}g_2+\frac{\partial H}{\partial z}g_3\right)dt+\left.\frac{\partial I}{\partial z}\right|_H\int_0^{mT}g_3dt. \tag{6.6.19}$$

(6.6.19) 右边第二项中 $\left.\dfrac{\partial I}{\partial z}\right|_H$ 可提到积分号外, 原因是在未扰动系统之轨道上, 它是常数. 又由于在未扰动轨道上, 恒有

$$I=I(H,z)=\text{Constant}.$$

沿着轨道微分上式得

$$0=\left.\frac{\partial I}{\partial H}\right|_z\cdot\left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_H+\left.\frac{\partial I}{\partial z}\right|_H. \tag{6.6.20}$$

由 (6.6.20), (6.6.19) 可化为

$$\overline{M}_1^{m/n}(I,\theta,z)=\frac{1}{\Omega(I,z)}\left[\int_0^{mT}\left(\frac{\partial H}{\partial x}g_1+\frac{\partial H}{\partial y}g_2+\frac{\partial H}{\partial z}g_3\right)dt-\left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_I\int_0^{mT}g_3dt\right], \tag{6.6.21}$$

其中被积函数沿着未扰动系统的周期轨道进行计算. 类似于对 $M_3^{m/n}$ 所述, 积分不论用 (I,θ,z) 还是 (x,y,z) 都是相同的, 又因 $\|f(q_0^{\alpha,z}(-\theta))\|=\Omega(I,z)$, 从而由 (6.6.21) 可见, $\overline{M}_1^{m/n}=M_1^{m/n}$. 因此, 今后可以略去 $\overline{M}^{m/n}$ 中的记号 "$-$".

现在讨论周期解的稳定性问题.

如前所述, 系统 $(6.6.1)_\varepsilon$ 可约化为三维 Poincaré 映射:

$$P_\varepsilon^m(q)=q+(0,mT\Omega(I,z),0)+\varepsilon(M_1^{m/n}(q),\overline{M}_2^{m/n}(q),\overline{M}_3^{m/n}(q))+O(\varepsilon^2),$$
$$q=(I,\theta,z). \tag{6.6.22}$$

特别, 对于自治情形, $(6.6.1)_\varepsilon$ 可化为二维映射

$$P_\varepsilon^m(q)=q+\varepsilon(M_1(q),M_3(q))+O(\varepsilon^2),\quad q=(I,z). \tag{6.6.23}$$

上述两映射的非退化的不动点, 对应于微分方程的孤立周期轨道, 通过 Poincaré 映射特征乘子的研究, 可以讨论周期解的稳定性. 记

$$\begin{cases}\Delta_1=\dfrac{\partial M_1}{\partial I}+\dfrac{\partial\overline{M}_2}{\partial\theta}+\dfrac{\partial M_3}{\partial z}\overset{\text{def}}{=}\text{trace[DM]},\\ \Delta_2=mT\dfrac{\partial\Omega}{\partial I}\dfrac{\partial M_1}{\partial\theta}+mT\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}\dfrac{\partial M_3}{\partial\theta},\\ \Delta_3=\dfrac{\partial(M_1,\overline{M}_2)}{\partial(I,\theta)}+\dfrac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(I,z)}+\dfrac{\partial(\overline{M}_2,M_3)}{\partial(\theta,z)},\\ \Delta_4=mT\dfrac{\partial\Omega}{\partial I}\dfrac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(\theta,z)}+mT\dfrac{\partial\Omega}{\partial I}\dfrac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(I,\theta)},\\ \Delta_5=\dfrac{\partial\overline{M}_2}{\partial I}\dfrac{\partial\Omega}{\partial I}\dfrac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(\theta,z)}+\dfrac{\partial\overline{M}_2}{\partial\theta}\dfrac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(z,I)}+\dfrac{\partial\overline{M}_2}{\partial z}\dfrac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(I,\theta)}\overset{\text{def}}{=}-\det[DM].\end{cases} \tag{6.6.24}$$

上述式子中, 所有偏导数均在 M_1,M_3 的零点进行计算, 且$\dfrac{\partial(M_1,\overline{M}_2)}{\partial(I,\theta)}=\dfrac{\partial M_1}{\partial I}\dfrac{\partial\overline{M}_2}{\partial\theta}-\dfrac{\partial M_1}{\partial\theta}\dfrac{\partial\overline{M}_2}{\partial I}$, 等等, 是 Jacobi 行列式.

经过详细计算, 在非自治情形可求得 (6.6.22) 的特征值如下:

情况 1. $\Delta_2 \neq 0, \Delta_4 \neq 0.$

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = 1 \pm \varepsilon^{1/2}\sqrt{\Delta_2} + \varepsilon/2\left(\Delta_1 - \dfrac{\Delta_4}{\Delta_2}\right) + O(\varepsilon^{3/2}), \\ \lambda_3 = 1 + \varepsilon\dfrac{\Delta_4}{\Delta_2} + O(\varepsilon^2). \end{cases} \tag{6.6.25}$$

情况 2. $\Delta_2 = 0, \Delta_4 \neq 0.$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 + \varepsilon^{2/3}(-\Delta_4)^{1/3} + \varepsilon\dfrac{\Delta_1}{3} + \dfrac{\varepsilon^{4/3}}{(-\Delta_4)^{1/3}}\left(\dfrac{5}{9}\Delta_1^2 - \Delta_3\right) + O(\varepsilon^{5/3}), \\ \lambda_2 = 1 + \varepsilon^{2/3}e^{\frac{4\pi i}{3}}(-\Delta_4)^{1/3} + \varepsilon\dfrac{\Delta_1}{3} + \dfrac{\varepsilon^{4/3}e^{\frac{4\pi i}{3}}}{(-\Delta_4)^{1/3}}\left(\dfrac{5}{9}\Delta_1^2 - \Delta_3\right) + O(\varepsilon^{5/3}), \\ \lambda_3 = 1 + \varepsilon^{2/3}e^{\frac{8\pi i}{3}}(-\Delta_4)^{1/3} + \varepsilon\dfrac{\Delta_1}{3} + \dfrac{\varepsilon^{4/3}e^{\frac{8\pi i}{3}}}{(-\Delta_4)^{1/3}}\left(\dfrac{5}{9}\Delta_1^2 - \Delta_3\right) + O(\varepsilon^{5/3}). \end{cases} \tag{6.6.26}$$

上述两种情形已经给出了在条件 $\dfrac{\partial\Omega}{\partial I} \neq 0$ 或 $\dfrac{\partial\Omega}{\partial z} \neq 0$ 之下, Poincaré 映射的特征值的所有可能的形式. 如果 $\Delta_1 = 0$, 特征值仍有上述形式. 但若 $\Delta_4 = 0$, 存在定理 6.6.1 已不能应用.

由 (6.6.25) 与 (6.6.26) 可见, 对于 ε 的低阶项, 特征值完全由 M_1 与 M_3 所确定 (这是非零扭转条件的推论).

在自治情形, (6.6.23) 的特征值为

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}\text{trace}DM \pm \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{(\text{traceDM})^2 - 4\det DM} + o(\varepsilon^2), \tag{6.6.27}$$

其中 $\text{trace}DM = \dfrac{\partial M_1}{\partial I} + \dfrac{\partial M_2}{\partial z}, \det DM = \dfrac{\partial M_1}{\partial I}\dfrac{\partial M_3}{\partial z} - \dfrac{\partial M_1}{\partial z}\dfrac{\partial M_3}{\partial I}$, 各偏导数沿着 (M_1, M_3) 的零点进行计算.

利用标准的线性化理论, 由特征值的大小即可确定周期轨道的稳定性.

下面考虑余维一的分枝问题.

定理 6.6.3 *考虑含参数 $\mu \in \mathbf{R}$ 的 Poincaré 映射. 若存在点 $(I^*, \theta^*, z^*, \mu^*) = q^*$, 使得 $mT\Omega(I^*, z^*) = 2\pi n$, 且*

$$M_1^{m/n}(q^*) = M_3^{m/n}(q^*) = 0, \quad \left[\frac{\partial\Omega}{\partial I}\frac{\partial(M_1, M_3)}{\partial(\theta, I)} + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{\partial(M_1, M_3)}{\partial(\theta, I)}\right]\Bigg|_{q^*} = 0$$

以及下述条件之一成立:

(a) $\left.\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}\dfrac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(\theta,\mu)}\right|_{q^*}\neq 0,\quad \dfrac{d}{dI}\left[\dfrac{\partial\Omega}{\partial I}\dfrac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(z,\theta)}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}\dfrac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(\theta,I)}\right]\Bigg|_{q^*}\neq 0;$

(b) $\left[\dfrac{\partial\Omega}{\partial I}\dfrac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(\mu,z)}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}\dfrac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(I,\mu)}\right]\Bigg|_{q^*}\neq 0;$

$\dfrac{d}{d\theta}\left[\dfrac{\partial\Omega}{\partial I}\dfrac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(z,\theta)}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}\dfrac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(\theta,I)}\right]\Bigg|_{q^*}\neq 0,$

(c) $\left.\frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(\mu,\theta)}\right|_{q^*}\neq 0,\quad \dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{\partial\Omega}{\partial I}\dfrac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(z,\theta)}+\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}\dfrac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(\theta,I)}\right]\Bigg|_{q^*}\neq 0.$

则在 q^* 近旁, 存在周期轨道出现的鞍结分枝点.

证 方程组

$$\begin{cases} M_1(I,\theta,z,\mu)+O(\varepsilon)=0,\\ mT\Omega(I,z)-2\pi n+\varepsilon\overline{M}_2(I,\theta,z,\mu)+O(\varepsilon^2)=0,\\ M_3(I,\theta,z\mu)+O(\varepsilon)=0\end{cases}\tag{6.6.28}$$

在 (I,θ,z,μ) 空间内, 表示对应于 Poincaré 映射 P_ε^m 的不动点的某曲线, 该曲线的切向量为

$$T=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial I}\frac{\partial(M_1,M_2)}{\partial(\theta,\mu)}+O(\varepsilon),\frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(I,\mu)}+\frac{\partial\Omega}{\partial I}\frac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(\mu,z)}+O(\varepsilon),\right.$$
$$\left.\frac{\partial\Omega}{\partial I}\frac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(\mu,\theta)}+O(\varepsilon),\frac{\partial\Omega}{\partial I}\frac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(z,\theta)}+\frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(\theta,I)}+O(\varepsilon)\right)^{\mathrm{T}}$$

需证, 在 $q^*=(I^*,\theta^*,z^*,\mu^*)$ 近旁, 存在这样的点, 使得在该点

$$\frac{\partial\Omega}{\partial I}\frac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(z,\theta)}+\frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(\theta,I)}+O(\varepsilon)=0\tag{6.6.29}$$

并且在该点曲线的切向量的 μ 分量的变化率不等于零, 这意味着不动点的曲线在 μ 方向上在该点附近是局部的抛物线, 且必为图 6.6.3 所示的非退化鞍结分枝的两种可能形式之一.

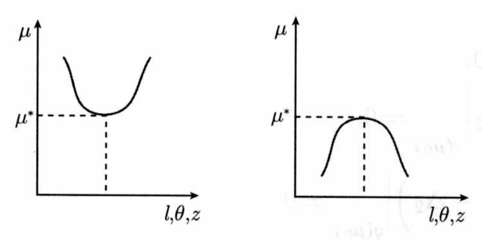


图 6.6.3 局部类似抛物线的分枝曲线

设定理 6.6.3 中的假设 (a) 成立. 于是由 (a) 中第一式在点 q^* 不等于零可知, 曲线的切向量的 I 分量在该点不为零. 根据隐函数定理, 可将曲线关于 I 在平衡点局部参数化, 为证在 q^* 近旁存在点使得 (6.6.29) 成立, 只需证明

$$\frac{d}{dI}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial I}\frac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(z,\theta)}+\frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(\theta,I)}\right)\bigg|_{q^*}\neq 0.$$

这正是假设 (a) 中的第二个条件, 同时这个条件也蕴含着在这个点, 不动点的曲线的切向量之 μ 分量的变化率不为零, 这就在条件 (a) 下证明了定理. 在条件 (b),(c) 下证明类似. □

在自治系统情形, 相应于定理 6.6.3, 有以下结果:

定理 6.6.4　考虑 (6.6.3) 含参数 $\mu\in\mathbf{R}$ 的 Poincaré 映射. 若存在点 $(I^*,z^*,\mu^*)=q^*$, 使得

$$M(q^*)=0,\quad \det DM|_{q^*}=\frac{\partial(M_1,M_2)}{\partial(I,z)}\bigg|_{q^*}=0,\quad \mathrm{trace}DM|_{q^*}\neq 0,$$

并且至少满足下述条件之一:

(1) $\left.\dfrac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(I,\mu)}\right|_{q^*}\neq 0;\left.\dfrac{d}{dz}(\det DM)\right|_{q^*}\neq 0,$

(2) $\left.\dfrac{\partial(M_1,M_3)}{\partial(z,\mu)}\right|_{q^*}\neq 0,\quad \left.\dfrac{d}{dI}(\det DM)\right|_{q^*}\neq 0.$

则 $q=q^*+O(\varepsilon)$ 是周期轨道出现的鞍结分枝点.

上述定理的证明类似于定理 6.6.3. 下面叙述两个 Poincaré 映射的 Hopf 分枝定理. 定理中记号见 (6.6.24) 式.

定理 6.6.5　设 $q(\mu)$ 为 Poincaré 映射的不动点的光滑曲线, $\mu\in K$, 其中 K 为 $\mathbf{R}$ 内某开区间. 若存在 $\mu_0\in K$, 使得

$$\frac{\partial\Omega}{\partial I}\bigg|_{q(\mu_0)}\neq 0\text{或}\ \frac{\partial\Omega}{\partial z}\bigg|_{q(\mu_0)}\neq 0$$

且

(1) $\Delta_2(q(\mu_0))<0;$

(2) $\left.\Delta-\dfrac{\Delta_4}{\Delta_2}-\Delta_2\right|_{q(\mu_0)}=0;$

(3) $\left.\dfrac{d}{d\mu}\left(\Delta-\dfrac{\Delta_4}{\Delta_2}-\Delta_2\right)\right|_{q(\mu_0)}\neq 0;$

(4) $\Delta_4(q(\mu_0))\neq 0.$

则在 μ_0 近旁存在 Poincaré 映射 (6.6.23) 出现不变圆的分枝值.

证 定理 6.6.5 的条件满足时, 蕴含着微分同胚 Hopf 分枝存在的条件, 故定理 6.6.5 成立. □

定理 6.6.6 *设 $q(\mu)$ 为 M 的零点的光滑曲线, $\mu\in I, I$ 为 $\mathbf{R}$ 中某开区间. 若存在 $\mu_0\in I$, 使得*

(1) $\mathrm{trace}DM|_{q(\mu_0)}=0$;

(2) $\dfrac{d}{d\mu}(\mathrm{trace}DM|_{q(\mu_0)})\neq 0$;

(3) $\det DM|_{q(\mu_0)}>0$

(设上述三个量是 $O(1)$ 的). 则对于足够小的 ε(不等于 0), $\widetilde{\mu}=\mu_0+O(\varepsilon)$ 是 Poincaré 映射 (6.6.23) 出现不变圆的 Hopf 分枝值.

证 利用公式 (6.6.27) 验证二维映射的 Hopf 分枝定理条件满足, 即证得本定理. □

不变圆的稳定性 (及分枝方向) 通过计算下面的量可以确定:

$$a=-\frac{\varepsilon}{32\sqrt{\det DM}}\{(\overline{f}_{uv}+\overline{f}_{uv}(g_{uu}-g_{vv}+2\overline{f}_{uv})+g_{uu}-g_{vv})\cdot(\overline{f}_{uu}-\overline{f}_{vv}-2g_{vu})\}+\frac{\varepsilon}{16}\{g_{uuu}+g_{uvv}+\overline{f}_{uuv}+\overline{f}_{vvv}\},$$

其中 $\overline{f}=\dfrac{1}{\sqrt{\det DM}}\left[\dfrac{\partial M_1}{\partial I}g-\dfrac{\partial M_3}{\partial I}f\right]$, 而 f,g 为

$$f(h,k)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 M_1}{\partial I^2}h^2+2\frac{\partial^2}{\partial I\partial z}hk+\frac{\partial^2 M_1}{\partial z^2}k^2\right]+\frac{1}{6}\left[\frac{\partial^3 M_1}{\partial I^3}h^3+3\frac{\partial^3 M_1}{\partial I^2\partial z}h^2k+3\frac{\partial^3 M}{\partial I\partial z^2}hk^2+\frac{\partial^3 M_1}{\partial z^3}k^3\right]+O((\sqrt{k^2+h^2})^4), \tag{6.6.30}$$

$g(h,k)$ 与 $f(h,k)$ 有类似公式, 只是将 M_1 换为 M_3. 所有的偏导数均在 $q(\mu_0)$ 取值, h,k 与 u,v 有如下关系:

$$\begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial M_1/\partial I}{\partial M_3/\partial I} & \dfrac{-\sqrt{\det DM}}{\partial M_3/\partial I}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}.$$

如果 $a>0$ $(a<0)$ 分枝出的不变圆不稳定 (稳定).

6.7 慢变振子的同宿轨道

本节继续研究方程组 $(6.6.1)_\varepsilon$, 考虑该系统的同宿轨道的存在性, 以及它们与周期轨道的关系.

除 6.6 节的假设 $(A_1)(A_2)$ 外, 对 $(6.6.1)_\varepsilon$ 增加如下假设:

(A_3) 对某个开区间 $J\subset \mathbf{R}$ 中的每个 z 值,"平面"系统 $(6.6.1)_{\varepsilon=0}$ 存在连结双曲鞍点的同宿轨道. 从而, 当观察整个三维相空间时, 系统 $(6.6.1)_{\varepsilon=0}$ 存在由平面系统的单参数族的鞍点之并集构成的法向的双曲不变一维流形 N, N 有两维稳定流形与不稳定流形 (记为 $W^s(N)$ 与 $W^u(N)$), 使得其交集 $W^s(N)\cap W^s(N)\stackrel{\text{def}}{=}\Gamma$, 由平面系统的单参数族的同宿轨道之并集所组成. 假设 N 是连通的, 否则以下的理论可用于 N 的每个连通分量.

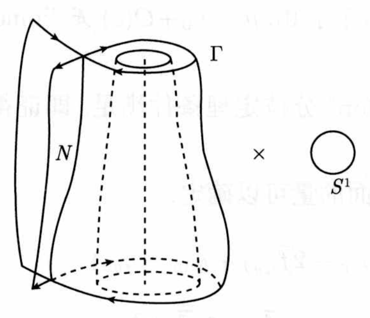


图 6.7.1　未扰动系统 $(6.6.1)_{\varepsilon=0}$ 的相空间

(A_4) $(6.6.1)_{\varepsilon=0}$ 的周期为 $T(\alpha,z)$ 的周期轨道族 $q_0^{\alpha,z}(t-\theta)$ 位于 Γ 内, 用 $(\alpha(z),\alpha_0(z))$ 表示区间 $L(z)$. 设 $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}T(\alpha,z)=\infty$, 周期 $T(\alpha,z)$ 可微, 且当 $(\alpha,z)\in(L(z),J)$ 时, $\dfrac{dT(\alpha,z)}{d\alpha}\neq 0$.

类似于 6.6 节, 可将 $(6.6.1)_\varepsilon$ 扭扩为系统 $(6.6.3)_\varepsilon$ 这种扭扩即便 g_i 不依赖于 ϕ 也是有意义的. 当 $\varepsilon=0$ 时, 对于 $(6.6.3)_{\varepsilon=0}$, 用 $\Xi\equiv(N,\phi)=N\times S^1$ 表示法向的双曲不变集 (见图 6.7.1).

在 (A_3) 假设下, 由于 N 上的每个点是 $z=\text{Constant}$ 平面上的鞍点, 因此, 必有 $\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}<0$. 根据隐函数定理, Ξ 可表示为 z 变量的图:

$$\begin{aligned}\Xi=\{(r(z),\phi)|r(z)=(x(z),y(z),z),f_1(x,y,z)=f_2(x,y,z)=0,\\ \left.\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\right|_{r(z)}<0,\phi\in S^1,z\in J\}.\end{aligned}\tag{6.7.1}$$

下面的结果给出了扰动之相空间的信息.

命题 6.7.1　*存在 $\varepsilon_0>0$, 使得当 $0<\varepsilon<\varepsilon_0\ll 1$ 时,$(6.6.3)_\varepsilon$ 存在法向的双曲不变一维流形*

$$\Xi_\varepsilon=\{(r(z,\phi,\varepsilon)=r(z)+O(\varepsilon)|\ \phi\in S^1,z\in J\},\tag{6.7.2}$$

其中 $r(z,\phi,\varepsilon)$ 是 z 与 ε 的 C^r 函数, 是 ϕ 的周期为 T 的周期函数. Ξ_ε 具有局部稳定的和不稳定的 $W^s_{\text{loc}}(\Xi_\varepsilon)$ 及 $W^u_{\text{loc}}(\Xi_\varepsilon)$, 它们是分别地 C^r 接近 Ξ 的局部稳定与不稳定流形 $W^s_{\text{loc}}(\Xi)$ 与 $W^u_{\text{loc}}(\Xi)$ 的.

注意, 在 Ξ 上的一切点都是 $(6.6.3)_{\varepsilon=0}$ 的不动点, 但在 Ξ_ε 上的点未必具有如下性质, 以下结果说明 Ξ_ε 上流的信息.

命题 6.7.2 设 $\overline{g_3(r(z))} = 1/T \int_0^T g_3(r(z),\phi)d\phi$, 并设存在 $z_0 \in J$, 使得 $\overline{g_3(r(z_0))} = 0, \dfrac{d}{dz}(\overline{g_3(r(z_0))}) \neq 0$. 则 $\gamma(z_0,\phi,\varepsilon) = r(z_0) + O(\varepsilon)$ 是 Ξ_ε 上的具有周期 T 的双曲周期轨道.

证 这是平均定理的直接推论.

以下对 $(6.6.3)_\varepsilon$ 所诱导的流, 取如下的横截面

$$\Sigma^{t_0} = \{(x,y,z,\phi) \in \mathbf{R}^3 \times S^1 | \phi = t_0 \in [0,T)\}. \tag{6.7.3}$$

如果在 Ξ_ε 上存在双曲周期轨道, 具有图 6.7.2 所示两种情况.

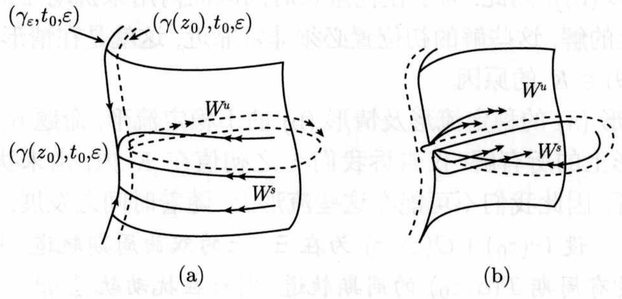


图 6.7.2 扰动系统 $(6.6.3)_\varepsilon$ 的不变流形

在图 6.7.2 中, 实线可看作是扰动方程的解的初始条件, 而虚线是未扰动系统的实际的解. 在情形 (a), $r(z_0) + O(\varepsilon)$ 有一维不稳定流形、两维稳定流形, 在情况 (b) 正好相反.

下面的结果说明, 在任意长时间内, 在 $(r(z_0) + O(\varepsilon), \phi)$ 的稳定与不稳定流形上的解, 与未扰动解的近似程度. □

命题 6.7.3 如果存在 $z_0 \in J$ 使得 $(r(z_0,\phi;\varepsilon),\phi) = (r(z_0) + O(\varepsilon),\phi)$ 是 Ξ_ε 上的双曲周期轨道, 则对每个足够小的 ε, 存在 $C > 0, K = \{z : z_0 - C\varepsilon < z < z_0 + C\varepsilon\}$ 及位于 $(r(z_0,\phi,\varepsilon),\phi)$ 的稳定与不稳定流形上的解 $q_\varepsilon^s(t,\theta)$, 该解具有在所指出的时间区间上有效的表达式:

情况 (a). $\dim W^s[(r(z_0,\phi;\varepsilon),\phi)] = 3, \quad \dim W^u[(r(z_0,\phi;\varepsilon),\phi)] = 2,$

$$q_\varepsilon^s(t,\theta) = q_0(t-\theta) + \varepsilon q_1^s(t,\theta) + O(\varepsilon^2),\ z_\varepsilon^s(t_0,\theta) \in K,\ t \in [t_0,\infty),$$

$$q_\varepsilon^u(t,\theta) = q_0(t-\theta) + \varepsilon q_1^u(t,\theta) + O(\varepsilon^2),\ t \in (-\infty,t_0];$$

情况 (b). $\dim W^s[(r(z_0,\phi;\varepsilon),\phi)] = 2, \quad \dim W^u[(r(z_0,\phi;\varepsilon),\phi)] = 3,$

$$q_\varepsilon^s(t,\theta) = q_0(t-\theta) + \varepsilon q_1^s(t,\theta) + O(\varepsilon^2), t \in [t_0,\infty),$$

$$q_\varepsilon^u(t,\theta) = q_0(t-\theta) + \varepsilon q_1^u(t,\theta) + O(\varepsilon^2),\ z_\varepsilon^u(t_0,\theta) \in K,\ t \in (-\infty,t_0],$$

其中 $q_0(t-\theta)$ 是未扰动系统的在 Ξ 上与 $r(z_0)$ 相连的解, 即在 $z=z_0$ 平面上的同宿轨道.

注 (1) $q_1^s(t,\theta)$ 与 $q_1^u(t,\theta)$ 通过解第一变分方程

$$\dot{q}_1^s = Df(q_0)q_1^s + g(\dot{q}_0,t), t\in[t_0,+\infty),$$
$$\dot{q}_1^u = Df(q_0)q_1^u + g(q_0,t), t\in(-\infty,t_0],$$

可以求得其解.

(2) 在扭扩的未扰动系统中, $\dim W^s[(r(z_0),\phi)] = \dim W^u[(r(z_0),\phi)] = 2$. 但是, 在扰动系统中, $W^s[(r(z_0)+O(\varepsilon),\phi)]$ 或 $W^u[(r(z_0)+O(\varepsilon),\phi)]$ 的维数可能增加一维 (情形 (a) 和情形 (b)), 因此, 为了在任意长时间区间内用未扰动流形上的解一致地逼近扰动流形上的解, 这些解的初位置必须非常靠近, 这就是在情形 (a) 和情形 (b) 中要求 $z_\varepsilon^{s,u}(t_0,\theta)\in K$ 的原因.

(3) 对于情形 (a) 的稳定流形及情形 (b) 的不稳定流形, 命题 6.7.3 并未明显地告诉我们在流形上的所有解, 仅告诉我们 z 之初值在 K 内, 由未扰动系统之轨道所一致逼近的解. 因此我们不可能在这些流形上, 随着时间之发展, 跟踪个别的解.

命题 6.7.4 设 $(r(z_0)+O(\varepsilon),\phi)$ 为在 Ξ_ε 上的双曲周期轨道, 并设 $q^{\alpha,z_0}(t-\theta)$ 是未扰动系统具有周期 $T(\alpha,z_0)$ 的周期轨道, 则存在扰动轨道 $q_\varepsilon^{\alpha,z_0}(t,\theta)$, 未必是周期的, 该轨道有在 $t\in[t_0,t_0+T(\alpha,z_0)]$ 上一致成立的渐近公式:

$$q_\varepsilon^{\alpha,z_0}(t,\theta) = q_0^{\alpha,z_0}(t,\theta) + \varepsilon q_1^{\alpha,z_0}(t,\theta) + O(\varepsilon^2),$$

其中 ε 足够小, $\alpha\in L(z_0)$.

注意, 命题 6.7.4 所述未扰动轨道逼近扰动系统轨道, 仅仅在 Ξ_ε 邻域的有限的时间区间内.

现在考虑同宿流形 Γ. 由命题 6.7.3, 为要用未扰动系统在 Ξ 的稳定与不稳定流形上的轨道以 $O(\varepsilon)$ 误差逼近扰动系统在 Ξ_ε 的稳定与不稳定流形上的轨道, 有必要存在点 $z_0\in J$, 使得 $(r(z_0,\phi;\varepsilon),\phi)$ 是 Ξ_ε 上的双曲周期轨道. 在 Ξ_ε 上的双曲周期轨道或有三维稳定流形、两维不稳定流形, 或者情况相反. 因此, 在四维相空间中, 一般地, 这些流形如有交必是一维的. 在相空间中为量度解流形间的距离, 只需考虑横截于流形的方向. 因此, 为确定流形是否相交, 所需量度的个数必等于流形的最小余维数. 在本节讨论的情况, 余维数为 1. 因此, 我们找到一个纯量的测量数就足够了.

在横截面 Σ^0 上, 流的双曲周期轨道 $(r(z_0,\phi;\varepsilon),\phi)$ 对应于 Poincaré 映射的双曲不动点 $r(z_0)+O(\varepsilon)$, 它或者有两维稳定流形及一维不稳定流形 (情况 (a)), 或者有一维稳定流形、两维不稳定流形 (情况 (b)). 为确定起见, 以下假设情况 (a) 成立, 而情况 (b) 可类似地讨论.

现在, 考虑如何在横截面 Σ^0 上测量稳定流形 $W^s(r(z_0)+O(\varepsilon))$ 与不稳定流形 $W^u(r(z_0)+O(\varepsilon))$ 之间的距离. 设 $\alpha_0=\alpha(z_0)$ 表示在 $z=z_0$ 水平上与未扰动系统的同宿轨道 $q_0^{\alpha,z_0}(t-\theta)$ 相对应的 α 值. 下面, 省略 $q_0^{\alpha,z}(t-\theta)$ 的上标 α,z.

在 Σ_0 上的点 $q_0(-\theta)$ 考虑正交于向量 $f(q_0(-\theta))$ 的平面 π. 在 $W^u(r(z_0)+O(\varepsilon))\cap\pi$ 上存在唯一的最靠近 $r(z_0)+O(\varepsilon)$ 的点 $q_\varepsilon^u(0,\theta)$. 类似地, 在 π 上存在最靠近 $r(z_0)+O(\varepsilon)$ 的由 $W^s(r(z_0)+O(\varepsilon))\cap\pi$ 的交集组成的曲线. 在该曲线上选取唯一的点 $q_\varepsilon^s(0,\theta)$, 使得 $q_\varepsilon^u(0,\theta)-q_\varepsilon^s(0,\theta)$ 平行于向量 $(-f_2(q_0(-\theta)),f_1(q_0(-\theta)),0)$. 同时我们要求 $z_1^s(0,\theta)=z_1^u(0,\theta)$. 根据命题 6.7.3, 对每个 θ, 这种条件是可保证实现的, 因为命题 6.7.3 断言在 $(r(z_0)+O(\varepsilon),\phi)$ 的邻域内, 局部扰动流形是 $C^r\varepsilon$ 接近于局部的未扰动流形的. 因而其切空间是 ε- 接近的. 在上述邻域之外, 有限时间段内, 解仍保持 ε- 接近于未扰动的解, 其最大位移在 z-方向是 $O(\varepsilon)$ (见图 6.7.3).

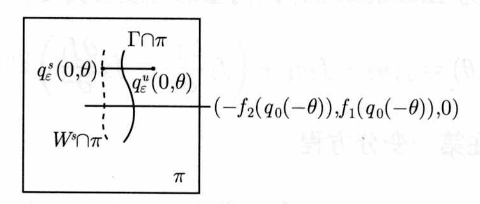


图 6.7.3 稳定和不稳定流形与 π 的交

显然, $|q_\varepsilon^u(0,\theta)-q_\varepsilon^s(0,\theta)|$ 是 $W^s(r(z_0)+O(\varepsilon))$ 与 $W^u(r(z_0)+O(\varepsilon))$ 之间距离的量度, 但为方便计算, 并考虑到 $W^s(r(z_0)+O(\varepsilon))$ 与 $W^u(r(z_0)+O(\varepsilon))$ 之间的定向关系, 我们宁愿用以下的距离测度:

$$\begin{aligned}
&d(\alpha_0,\theta,z_0)\\
&=\frac{(\partial H/\partial x(q_0(-\theta)),(\partial H/\partial y(q_0(-\theta)),\theta)\cdot(q_\varepsilon^u(0,\theta)-q_\varepsilon^s(0,\theta))}{||f(q_0(-\theta))||}\\
&=\frac{\varepsilon[(\partial H/\partial x(q_0(-\theta)),(\partial H/\partial y(q_0(-\theta)),\theta)\cdot(q_1^u(0,\theta)-q_1^s(0,\theta))]}{||f(q_0(-\theta))||}+O(\varepsilon^2)\\
&\overset{\text{def}}{=}\varepsilon\frac{M(\theta)}{||f(q_0(-\theta))||}+O(\varepsilon^2),
\end{aligned}\tag{6.7.4}$$

其中 “$\cdot$” 表示向量之数量积, $||\cdot||$ 表示 Euclid 范数, 而 $M(\theta)$ 表示同宿 Mel′nikov 函数.

下面讨论 $M(\theta)$ 的计算方法. 在几何上, $M(\theta)$ 是 Poincaré 映射的双曲不动点的稳定与不稳定流形之间距离的渐近展式中的最低阶项. 我们将通过解微分方程来导出 (6.7.4) 的一般表达式.

记

$$\Delta(t,\theta) = f_1(q_0(-\theta))(y_1^u(t,\theta) - y_1^s(t,\theta)) - f_2(q_0(-\theta))(x_1^u(t,\theta) - x_1^s(t,\theta))$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \Delta^u(t,\theta) - \Delta^s(t,\theta). \tag{6.7.5}$$

对于 $\Delta^u(t,\theta)$, 有

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}^u(t,\theta) =& \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(q_0(t-\theta)) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(q_0(t-\theta)\right)\Delta^u(t,\theta)\\ &+ f_1(q_0(t-\theta))g_2(q_0(t-\theta),t) - f_2(q_0(t-\theta))\cdot g_1(q_0(t-\theta),t)\\ &+\left[f_1(q_0(t-\theta))\frac{\partial f_2}{\partial z}(q_0(t-\theta)) - f_2(q_0(t-\theta))\frac{\partial f_1}{\partial z}(q_0(t-\theta))\right]\\ &\cdot z_1^u(t-\theta).\end{aligned}$$

由于假设未扰动系统为 Hamilton 的, 故向量的散度恒为零, 从而

$$\dot{\Delta}^u(t,\theta) = f_1g_2 - f_2g_1 + \left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial z} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)z_1^u(t,\theta), \tag{6.7.6}$$

其中 $z_1^u(t,\theta)$ 可通过在第一变分方程

$$\dot{z}_1^u(t,\theta) = g_3(q_0(t-\theta),t), \quad t\in(-\infty,0] \tag{6.7.7}$$

中解 z 分量而得到. 对 (6.7.6) 积分得

$$\Delta^u(0,\theta) - \Delta^u(-\infty,\theta) = \int_{-\infty}^0\left[(f_1g_2 - f_2g_1) + \left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial z} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)z_1^u(t,\theta)\right]dt. \tag{6.7.8}$$

类似地有

$$\Delta^s(\infty,\theta) - \Delta^u(0,\theta) = \int_0^{+\infty}\left[(f_1g_2 - f_2g_1) + \left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial z} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)z_1^s(t,\theta)\right]dt. \tag{6.7.9}$$

根据命题 6.7.3, 由于 $q_1^{u,s}(t,\theta)$ 对一切 t 有界, 又当逼近 $r(z_0)$ 时, 其未扰动向量场指数地趋于零, 故 $\Delta^s(\infty,\theta)$ 与 $\Delta^u(-\infty,\theta)$ 等于零. 类似地可证广义积分收敛, 从而

$$\begin{aligned}M(\theta) =& \int_{-\infty}^{+\infty}(f_1g_2 - f_2g_1)dt + \int_{-\infty}^0\left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial z} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)z_1^u(t,\theta)dt\\ &+\int_0^{+\infty}\left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial z} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)z_1^s(t,\theta)dt.\end{aligned} \tag{6.7.10}$$

由未扰动系统的 Hamilton 性质易证

$$f_1\frac{\partial f_2}{\partial z} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial z} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial^2 H}{\partial y\partial z} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\dot{z}.$$

又因在未扰动轨道上 $z = \text{Constant}$, 故

$$\left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial z} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)(q_0(t-\theta)) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial z}(q_0(t-\theta))\right). \tag{6.7.11}$$

利用上述结果, 并经过分部积分得到

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{0}\left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial z} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)(q_0(t-\theta))z_1^u(t,\theta)dt \\
&= \frac{\partial H}{\partial z}(q_0(-\infty))z_1^u(-\infty,\theta) - \frac{\partial H}{\partial z}(q_0(-\theta))z_1^u(0,\theta) \\
&\quad + \int_{-\infty}^{0}\frac{\partial H}{\partial z}(q_0(t-\theta))g_3(q_0(t-\theta),t)dt.
\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{+\infty}\left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial z} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)(q_0(t-\theta))z_1^s(t,\theta)dt \\
&= \frac{\partial H}{\partial z}(q_0(-\theta))z_1^s(0,\theta) - \frac{\partial H}{\partial z}(q_0(+\theta))z_1^s(+\infty,\theta) \\
&\quad + \int_{0}^{+\infty}\frac{\partial H}{\partial z}(q_0(t-\theta))g_3(q_0(t-\theta),t)dt.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
M(\theta) = &\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f_1g_2 - f_2g_1 + \frac{\partial H}{\partial z}g_3\right)dt \\
&+ \frac{\partial H}{\partial z}(q_0(-\infty))z_1^u(-\infty,\theta) - \frac{\partial H}{\partial z}(q_0(+\infty))z_1^s(+\infty,\theta) \\
&+ \frac{\partial H}{\partial z}(q_0(-\theta))(z_1^s(0,\theta) - z_1^u(0,\theta)).
\end{aligned}$$

注意到 $\dfrac{\partial H}{\partial z}(q_0(-\infty)) = \dfrac{\partial H}{\partial z}(q_0(+\infty))$, 因为当 $t \to \pm\infty$ 时, 未扰动轨道趋于 $r(z_0)$ 而 $z_1^u(-\infty,\theta)$ 与 $z_1^s(+\infty,\theta)$ 在 Σ^0 上收敛到鞍点. 于是可证

$$\frac{\partial H}{\partial z}(q(-\infty))z_1^u(-\infty,\theta) - \frac{\partial H}{\partial z}(q(+\infty))z_1^s(+\infty,\theta) = 0.$$

并由原来的选择: $z_1^s(0,\theta) - z_1^u(0,\theta) = 0$, 这样最终得到 Mel'nikov 函数:

$$\begin{aligned}
M(\theta) = &\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1g_2 - f_2g_1 + \frac{\partial H}{\partial z}g_3\right](q_0(t-\theta),t)dt \\
&-\frac{\partial H}{\partial z}(\gamma(z_0))\int_{-\infty}^{\infty}g_3(q_0(t-\theta),t)dt.
\end{aligned} \tag{6.7.12}$$

最后, 利用 $\dfrac{\partial H}{\partial y}=f_1,-\dfrac{\partial H}{\partial x}=f_2$ 及变换 $t\to t+\theta$, (6.7.12) 可记为简单的形式:

$$M(\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\nabla H\cdot g)(q_0(t),t+\theta)dt-\frac{\partial H}{\partial z}(\gamma(z_0))\int_{-\infty}^{\infty}g_3(q_0(t),t+\theta)dt. \quad (6.7.13)$$

于是, 在 Σ^0 上,$r(z_0)+O(\varepsilon)$ 的稳定与不稳定流形之间的距离用 $d(\theta)=\varepsilon(M(\theta))/\|f(q_0(-\theta))\|+O(\varepsilon^2)$ 来量度. 因此, 若 $M(\theta)$ 在 $\theta=\widetilde{\theta}$ 有简单零点 $(M(\widetilde{\theta}))=0,\dfrac{dM(\widetilde{\theta})}{d\theta}\neq 0$, 根据隐函数定理, 在 $\widetilde{\theta}$ 近旁, $d(\theta)$ 亦有简单零点. 从而有以下与混沌研究有关的重要结果:

定理 6.7.1 设 $M(\theta)$ 至少存在一个简单零点, 则对于足够小的 ε, 在该点近旁, $W^s(r(z_0))+O(\varepsilon)$ 与 $W^u(r(z_0))+O(\varepsilon)$ 横截相交. 另一方面, 若 $M(\theta)$ 有界且关于一切 θ 都不等于零, 则上述两流形无交点.

注 在公式 (6.7.12) 中, 积分号下函数 $f_1g_2-f_2g_1\overset{\text{def}}{=}(f\wedge g)$ 是通常平面 Mel′nikov 函数的被积式, 而 $\dfrac{\partial H}{\partial z}g_3$ 才是由慢变的 z 导致的加项. 如果 g 不依赖于时间, 由公式 (6.7.13) 可见, $M=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(\nabla H\cdot g)(q_0(t))dt$ 与 θ 无关. 因此, 不存在 $M(\theta)$ 的简单零点, 横截同宿点不可能被发现. 这并不奇怪, 因为此时, 我们的系统是三维自治向量场, 且 $r(z_0)+O(\varepsilon)$ 是具有一维不稳定流形和二维稳定流形的不动点. 若这些流形相交, 它们必沿着解曲线相交, 故不可能横截. 但是, 若 g 依赖于参数, 则这种“自治”的同宿轨道将随参数的改变而自然地出现.

为讨论系统随参数 $\mu\in\mathbf{R}$ 变化的分枝性质, 有

定理 6.7.2(非自治情形) 研究依赖与纯量参数 $\mu\in K$ 的系统 $(6.6.1)_\varepsilon$, 其中 K 为 $\mathbf{R}$ 中某开区间. 若存在点 (θ_0,μ_0) 使得

(a) $M(\theta_0,\mu_0)=0$;

(b) $\left.\dfrac{\partial M}{\partial\theta}\right|_{\theta_0,\mu_0}=0$;

(c) $\left.\dfrac{\partial^2 M}{\partial\theta^2}\right|_{\theta_0,\mu_0}\neq 0,\quad \left.\dfrac{\partial M}{\partial\mu}\right|_{\theta_0,\mu_0}\neq 0.$

则对 $\varepsilon\neq 0$ 足够小, 在 μ 近旁, 存在分枝值 $\widetilde{\mu}_0$, 使得系统出现二次同宿相切.

定理 6.7.3(自治情形) 设系统 $(6.6.1)_\varepsilon$ 中 $g(q,\mu)$ 不依赖于时间 t, 但依赖于纯量参数 $\mu\in K\subset\mathbf{R}$. 如果存在点 $\mu_0\in K$, 使得

(a) $M(\mu_0)=0$;

(b) $\left.\dfrac{\partial M}{\partial\mu}\right|_{\mu=\mu_0}\neq 0$,

则对足够小的 $\varepsilon \neq 0$, 在 μ_0 近旁, 存在分枝参数值 μ, 使得 $(6.6.1)_\varepsilon$ 存在 (非横截的) 同宿轨道.

对于自治情形, 不能从同宿轨道存在立即推出系统的 Poincaré 映射存在 Smale 马蹄. 但若增加对鞍点的特征值的某些假设, 可以得到 Mil′nikov 等导出的某些结论.

现在, 我们讨论 $(6.6.1)_\varepsilon$ 的周期解与同宿轨道之间的关系. 注意到 6.5 节中确定的次谐波 Mel′nikov 函数有公式:

$$M^{m/n}(I,\theta,z) = \left(\frac{1}{\Omega(I,z)}\left[\int_0^{mT}(\nabla H\cdot g)dt - \left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_I \int_0^{mT} g_3 dt\right], \int_0^{mT} g_3 dt\right)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} (M_1^{m/n}, M_3^{m/n}). \tag{6.7.14}$$

我们将指出, 在同宿流形上,$M^{m/1}$ 的极限存在. 一般而言, 由于在任意长的时间区间内, 并非扰动流形上的一切解都能被未扰动流形上的解所一致逼近. 根据命题 6.7.3 与命题 6.7.4, 仅当扰动解的初始值 z 在点 $z_0 \in J$ 的 $O(\varepsilon)$ 内, 使得 $(r(z_0)+O(\varepsilon),\phi)$ 是 μ_ε 上的双曲周期轨道. (在自治情形是不动点) 时, 上述逼近才有可能. 因此, 同宿流形不可能以任意方式逼近. 不过, 我们有以下的命题:

命题 6.7.5 **如果存在点 $z_0 \in J$, 使得 $(r(z_0)+O(\varepsilon),\phi)$ 是 μ_ε 上的双曲周期解, 则**

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ z\to z_0}} M_1^{m/1} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(\nabla H\cdot g)(q_0(t),t+\theta)dt - \frac{\partial H}{\partial z}(\gamma(z_0))\int_{-\infty}^{\infty} g_3(q_0(t),t+\theta)dt}{||f(q_0(-\theta))||}$$

$$= M(\theta).$$

这里, 被积函数沿着在 $z = z_0$ 平面的未扰动的同宿轨道进行计算.

命题 6.7.5 说明, 在同宿流形上, 周期的 Mel′nikov 函数具有意义, 虽然其动力学解释与平面情形大不相同. 在同宿流形内部, $(M_1^{m/1}, M_3^{m/1})$ 的简单零点意味着存在周期为 mT 的孤立周期轨道, 而在同宿流形上, M_3 的简单零点意味着在 μ_ε 上存在双曲周期轨道 $(r(z_0)+O(\varepsilon),\phi)$. 而 M_1 的简单零点蕴含着 $(r(z_0)+O(\varepsilon),\phi)$ 的稳定与不稳定流形横截相交. 命题 6.7.5 使得我们可将 M_1 与 M_3 看作 (α,z,θ) 的函数, 其中 $\theta \in \mathbf{R}, z \in J, \alpha \in L(z) = [\alpha(z), \alpha_0(z)], \alpha_0(z)$ 是对每个特定的 z 值, 确定同宿流形的 α 值.

以下用 $M^{m/1}(I,z,\mu)$ 与 $M^{m/1}(I,\theta,z,\mu)$ 分别表示自治与非自治的次谐波 Mel′nikov 向量. 有时还略去上标 $m/1$. 下面的定理说明同宿分枝定理 6.7.2 与 6.7.3 的假设还蕴含着当 $\mu \to \tilde{\mu}$ 时收敛于同宿轨道的近旁周期轨道族的存在性.

定理 6.7.4(自治情形) 考虑含参数 $\mu \in \mathbf{R}$ 的 Mel′nikov 函数 $M(I, z, \mu)$, 若存在 $z_0 = z_0(\mu) \in J$, 使得 $r(z_0(\mu), \mu) + O(\varepsilon)$ 是 μ_ε 上的双曲不动点, 其中 μ 属于包含 μ_0 值的某个开区间 K, 又设 $I = I_0$ 为在 $z = z_0(\mu)$ 水平对应于同宿轨道的作用变量值, 且满足

(a) $M_1(I_0, z_0, \mu_0) = 0$;

(b) $\dfrac{\partial M_1}{\partial \mu}(I_0, z_0, \mu_0) \neq 0$;

(c) $\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(r(z_0, \mu_0)) + \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(r(z_0, \mu_0)) \neq 0$;

(d) $\dfrac{\partial g_3}{\partial z}(r(z_0, \mu_0)) \neq 0$.

则对于 $\varepsilon \neq 0$ 充分小, (6.6.1)$_\varepsilon$ 的解包含一周期轨道族 $\Lambda(\mu), (\mu \in K)$, 当 $\mu \to \tilde{\mu} = \mu_0 + O(\varepsilon)$ 时, $\Lambda(\mu)$ 的周期趋于无穷大而收敛到同宿轨道, $\tilde{\mu}$ 是同宿分枝参数值.

定理 6.7.5(非自治情形) 考虑含参数 $\mu \in \mathbf{R}$ 的 Mel′nikov 函数 $M(I, \theta, z, \mu)$, 若存在 $z_0 = z_0(\mu) \in J$, 使得 $(r(z_0(\mu), \mu) + O(\varepsilon) + \phi)$ 是 μ_ε 上的双曲周期轨道, 其中 μ 位于包含 μ_0 值的开区间 K 内, 又若 $I = I_0$ 为在 $z = z_0(\mu)$ 水平上, 对应于同宿轨道的作用变量值, 使得在点 $(I_0, \theta_0, z_0(\mu_0), \mu_0)$ 满足

(a) $M_1(I_0, \theta_0, z_0(\mu_0), \mu_0) = 0$;

(b) $\dfrac{\partial M_1}{\partial \theta}(I_0, \theta_0, z_0(\mu_0), \mu_0) = 0$;

(c) $\dfrac{\partial^2 M_1}{\partial \theta^2}(I_0, \theta_0, z_0(\mu_0), \mu_0) \neq 0$;

(d) $\dfrac{\partial M_1}{\partial \mu}(I_0, \theta_0, z_0(\mu_0), \mu_0) \neq 0$;

(e) $\dfrac{\partial \overline{g_3}}{\partial z}(r(z_0, \mu_0)) \neq 0$.

则对于 $\varepsilon \neq 0$ 充分小, 同宿分枝是周期日愈增大的次谐波鞍结分枝可数列的极限.

第 7 章　Mel′nikov 方法: 应用

经典的微分方程定性理论和分枝理论主要涉及平面动力系统分枝出周期解 (极限环) 或同宿、异宿轨道的问题. 自从 Smale 的马蹄映射发现之后, 分枝理论中提出的又一个基本问题是: 如何理解马蹄的产生? 换言之, 系统是通过什么样的途径而通向混沌的? 上一章所介绍的 Mel′nikov 方法, 对于自治可积系统的弱受迫周期激励及弱参数激励系统, 研究如何通过次谐波分枝通向混沌, 判定是否有 Poincaré 映射的横截同宿点 (横截异宿环), 确定 Smale 马蹄存在的参数区域, 是一个很精确的数学分析方法.

本章将通过一系列具体的非线性振动系统及二维流形 (柱面和环面上) 的系统等, 来具体地介绍 Mel′nikov 方法的应用.

7.1　软弹簧 Duffing 系统的次谐与马蹄

本节和下两节由刘曾荣教授协助完成初稿的撰写.

如所周知, 质点在软弹簧作用下运动方程为

$$M\frac{d^2X}{dT^2}+D\frac{dX}{dT}+CX-NX^3=0, \tag{7.1.1}$$

其中 M, D,C, $N>0$, M 为质点的质量, D 为阻尼系数, C 与 N 分别表示弹簧线性与非线性刚性系数.

(7.1.1) 的线性化系统具有固有频率 $\Omega_0=\sqrt{M/C}$.

引入如下无量纲参数

$$X=x\sqrt{C/N},\qquad T=\Omega_0 t. \tag{7.1.2}$$

可以把 (7.1.1) 改写为

$$\ddot{x}+x-x^3=-\varepsilon\delta\dot{x}, \tag{7.1.3}$$

其中 $\varepsilon\delta=D/\sqrt{MC}, 0<\varepsilon\ll 1$.

如果系统 (7.1.3) 还受弱周期强迫力作用, 则 (7.1.3) 化为

$$\ddot{x}+x-x^3=-\varepsilon\delta\dot{x}+\varepsilon f\cos(\omega t). \tag{7.1.4}$$

又若引进弱周期参数激励作用, (7.1.3) 化为

$$\ddot{x}+(1+\varepsilon f\cos\omega t)x-x^3=-\varepsilon\delta\dot{x}. \tag{7.1.5}$$

(7.1.5) 是加了非线性项和弱阻尼的 Mathieu 方程. (7.1.4) 和 (7.1.3) 中参数 f 和 ω 可以通过原变换回到 (X,T) 坐标下激励的振幅和频率.

模型方程 (7.1.3), (7.1.4), (7.1.5) 在力学、电学以及物理学中都有着广泛的应用, 因此长期以来科学工作者们对这些系统进行过许多研究. 当 N 为小量时摄动理论的分析可参见 Mook 和 Nafeh (1979). 本节将利用第 6 章所述的 Mel′nikov 方法, 在 N 为 $O(1)$ 条件下, 详细讨论 (7.1.4) 和 (7.1.5) 的次谐波分枝和马蹄的产生, 揭示这些系统的各种有趣的性质.

7.1.1　次谐分枝到马蹄的途径

考虑软弹簧 Duffing 振子

$$\ddot{x}+x-x^3=-\varepsilon\delta\dot{x}+\varepsilon f\cos\omega t. \tag{7.1.6}$$

(7.1.6) 的等价系统为

$$\begin{cases}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-x+x^3-\varepsilon(\delta y-f\cos\omega t).\end{cases} \tag{7.1.7}$$

$(7.1.6)_{\varepsilon=0}$ 的未扰动系统

$$\ddot{x}+x-x^3=0 \tag{7.1.8}$$

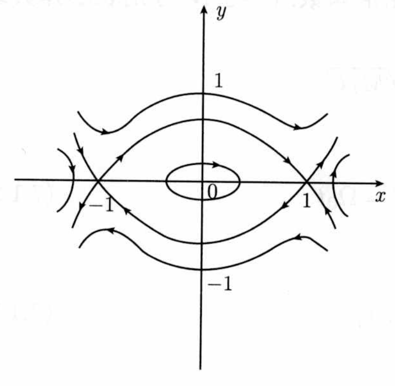


图 7.1.1　系统 (7.1.8) 的相图

是 Hamilton 系统, 其 Hamilton 量为

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4=h. \tag{7.1.9}$$

通过简单的定性分析可知, (0,0) 为 (7.1.8) 的中心, (1,0) 和 (−1,0) 为 (7.1.8) 的鞍点; 当 $h=\frac{1}{4}$ 时, 存在两条连结 (±1,0) 的异宿轨道, 形成一个异宿环. 当 $0<h<\frac{1}{4}$ 时, 系统 (7.1.8) 在异宿圈内存在一族包围 (0,0) 的闭轨 (见图 7.1.1).

(7.1.8) 的两条异宿轨道的参数方程为

$$\begin{cases} x_{\pm}^0(t) = \pm\tanh\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right), \\ y_{\pm}^0(t) = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{sech}^2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right), \end{cases} \tag{7.1.10}$$

以 $h = h(k)$ 为参数的周期轨道为

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{\sqrt{2}k}{\sqrt{1+k^2}}\text{sn}\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+k^2}}, k\right), \\ y_k = \dfrac{\sqrt{2}k}{1+k^2}\text{cn}\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+k^2}}, k\right)\text{dn}\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+k^2}}, k\right). \end{cases} \tag{7.1.11}$$

其中 $\text{sn}(u,k), \text{cn}(u,k), \text{dn}(u,k)$ 为 Jacobi 椭圆函数, k 为椭圆函数的模, $0 < k < 1$. 参数 $h = h(k) = \dfrac{k^2}{(1+k^2)^2}$ 定义的轨道的周期为 $T_k = 4\sqrt{1+k^2}K(k), K(k)$ 是第一类完全椭圆积分. 容易验证, $dT_k/dk > 0$.

计算 $(7.1.7)_\varepsilon$ 沿异宿轨道的 Mel′nikov 函数, 得到

$$M_{\pm}(t_0, \delta, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [-\delta y_{\pm}^0(t) + f\cos\omega(t+t_0)]y_{\pm}^0(t)dt = -\delta I_1 + fI_2\cos\omega t_0, \tag{7.1.12}$$

其中, $I_1 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}, I_2 = \sqrt{2}\pi\omega\text{csch}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega\right)$.

由 (7.1.12) 可知, 当参数 f, δ 满足

$$\frac{f}{\delta} > \frac{I_1}{I_2} = \frac{2}{3\pi\omega}\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega\right) \stackrel{\text{def}}{=} R_\infty^{(1)} \tag{7.1.13}$$

时, $(7.1.7)_\varepsilon$ 的 Poincaré 映射存在横截 2 环, 换言之, $R_\infty^{(1)}$ 为系统出现马蹄的门槛值.

对于任给一对互素的正整数 (m,n), 存在唯一的 k, 满足 $T_k = 4\sqrt{1+k^2}K(k) = \dfrac{2\pi m}{\omega n}$, 沿周期为这个 T_k 的轨道计算次谐波 Mel′nikov 函数得

$$\begin{aligned} M^{m/n}(t_0, \delta, f) &= \int_0^{mT} [-\delta y_k(t) + f\cos\omega(t+t_0)]y_k(t)dt \\ &= -\delta J_1(m,n) + fJ_2(m,n)\cos\omega t_0, \end{aligned} \tag{7.1.14}$$

其中

$$J_1(m,n) = \frac{8n}{3(1+k^2)^{3/2}}[(k^2-1)K(k) + (1+k^2)E(k)].$$

$$J_2(m,n)=\begin{cases}0, & n\neq 1 \text{ 或 } m \text{ 为偶数;}\\ 2\sqrt{2}\pi\omega\operatorname{csch}\dfrac{\pi mK'(k)}{2K(k)}, & n=1 \text{ 且 } m \text{ 为奇数;}\end{cases}$$

$K'(k)=K(k')=K(\sqrt{1-k^2}), E(k)$ 为第二类完全椭圆积分. 因此, 当参数 f/δ 满足

$$\frac{f}{\delta}>\frac{J_1(m,1)}{J_2(m,1)}=\frac{2\sqrt{2}[(1+k^2)E(k)-(1-k^2)K(k)]}{3\pi\omega(1+k^2)^{3/2}}\sinh\frac{\pi mK'(k)}{2K(k)}\overset{\text{def}}{=}R_m^{(1)}(\omega) \tag{7.1.15}$$

时, 系统 $(7.1.7)_\varepsilon$ 将存在奇数阶次谐周期解.

如果考虑系统为参数激励形式

$$\ddot{x}+(1+\varepsilon f\cos\omega t)x-x^3=-\varepsilon\delta\dot{x}, \tag{7.1.16}$$

它的等价系统为

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-x+x^3-\varepsilon(\delta y+fx\cos\omega t).\end{cases} \tag{7.1.17}$$

此时沿异宿轨道计算的 Mel′nikov 函数为

$$M_\pm(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}[-\delta y_\pm^0(t)+f\cos(t+t_0)x_\pm^0(t)]y_\pm^0(t)dt=-\delta I_1+fI_3\sin\omega t_0, \tag{7.1.18}$$

其中 $I_3=\pi\omega^2\operatorname{csch}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega\right)$.

故存在横截 2 环的门槛值为

$$R_\infty^{(2)}(\omega)=\frac{I_1}{I_3}=\frac{2\sqrt{2}}{3\pi\omega^2}\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega\right). \tag{7.1.19}$$

同样, 对于满足共振条件 $T_k=4\sqrt{1+k^2}K(k)=\dfrac{2\pi m}{\omega n}$ 的无扰动系统的轨道, 计算次谐波 Mel′nikov 函数, 得到

$$\begin{aligned}M^{m/n}(t_0)&=\int_0^{mT}[-\delta y_k(t)+f\cos\omega(t+t_0)x_k(t)]y_k(t)dt\\ &=-\delta J_1(m,n)+fJ_3(m,n)\sin\omega t_0,\end{aligned} \tag{7.1.20}$$

其中

$$J_3(m,n)=\begin{cases}0, & n\neq 1 \text{ 或 } m \text{ 为奇数;}\\ \dfrac{\pi^3m^2}{2(1+k^2)K^2(k)}\operatorname{csch}\dfrac{\pi mK'(k)}{2K(k)}, & n=1 \text{ 且 } m \text{ 为偶数.}\end{cases}$$

故存在偶数阶次谐的门槛值为

$$R_m^{(2)}(\omega)=\frac{J_1(m,1)}{J_3(m,1)}=\frac{16[1+k^2E(k)-(1-k^2)K(k)]}{3\pi^3m^2(1+k^2)^{1/2}}\sinh\frac{\pi mK'(K)}{2K(k)}. \tag{7.1.21}$$

利用关系 $4\sqrt{1+k^2}K(k)=\dfrac{2\pi m}{\omega}$, (7.1.15) 和 (7.1.21) 可改写为

$$R_m^{(1)}(\omega)=\frac{2\sqrt{2}[(1+k^2)E(k)-(1-k^2)K(k)]}{3\pi\omega(1+k^2)^{3/2}}\sinh(\omega\sqrt{1+k^2}K'(k)) \tag{7.1.22}$$

和

$$R_m^{(2)}(\omega)=\frac{4[(1+k^2)E(k)-(1-k^2)K(k)]}{3\pi\omega(1+k^2)^{3/2}}\sinh(\omega\sqrt{1+k^2}K'(k)). \tag{7.1.23}$$

利用上述结果, 可作如下讨论:

(1) 对于任意固定的 $\omega, m\to\infty$, 即 $k\to 1$, (7.1.22) 和 (7.1.23) 有极限

$$\lim_{m\to\infty}R_m^{(1)}(\omega)=\frac{2}{3\pi\omega}\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega\right)=R_\infty^{(1)}(\omega), \tag{7.1.24}$$

$$\lim_{m\to\infty}R_m^{(2)}(\omega)=\frac{2\sqrt{2}}{3\pi\omega^2}\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega\right)=R_\infty^{(2)}(\omega). \tag{7.1.25}$$

同时利用 $E(k)$ 和 $K(k)$ 在 $k\to 1$ 的级数展开式

$$\begin{cases} K(k)=\ln\dfrac{4}{k'}+\dfrac{1}{2}\left(\ln\dfrac{4}{k'}-\dfrac{2}{1\cdot 2}\right)k'^2+\left(\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left(\ln\dfrac{4}{k'}-\dfrac{2}{1\cdot 2}-\dfrac{2}{3\cdot 4}\right)k'^4+\cdots, \\ E(k)=1+\dfrac{1}{2}\left(\ln\dfrac{4}{k'}-\dfrac{2}{1\cdot 2}\right)k'^2+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(\ln\dfrac{4}{k'}-\dfrac{2}{1\cdot 2}-\dfrac{2}{3\cdot 4})k'^4+\cdots. \end{cases} \tag{7.1.26}$$

可以证明, 对任意给定 ω 与足够接近 1 的 k(即充分大的 m), 有

$$R_m^{(1)}(\omega)<R_\infty^{(1)}(\omega);\quad R_m^{(2)}(\omega)<R_\infty^{(2)}(\omega). \tag{7.1.27}$$

这样对任意固定的 ω, 参数 f/δ 逐渐增大时, 受迫激励及参数激励两种情况, 系统的可列个次谐分枝的门槛值将凝聚于产生马蹄的门槛值.

(2) 显然, 对于具有弱线性阻尼和受迫周期激励的情况, 当 f/δ 增加时, 系统经历无限次奇阶次谐分枝而进入马蹄; 但对于具有弱线性阻尼和周期参数激励的情况, 随着参数 f/δ 的增加, 系统经过无限次偶阶次谐分枝而进入马蹄.

(3) 固定 ω, 逐渐增大 f/δ, 为了讨论进入马蹄前系统会出现哪些次谐波以及排列情况, 就得比较 $R_m^{(i)}(\omega)$ 和 $R_\infty^{(i)}(\omega)(i=1,2;m$ 为所允许的正整数) 的相对大小.

作 $R_m^{(1)}$-$R_\infty^{(1)}\sim\omega$ 的关系图 (见图 7.1.2).

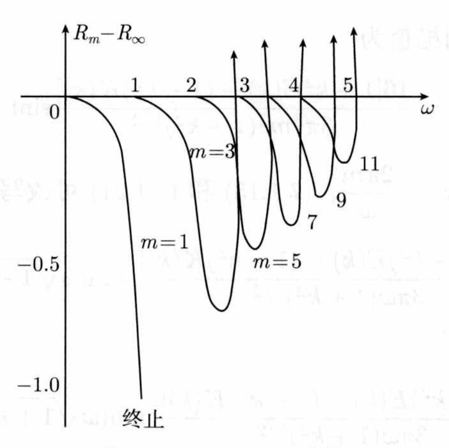


图 7.1.2　$R(\omega)$-ω 曲线

由图 7.1.2 可见, $R_m^{(1)}(\omega)$-$R_\infty^{(1)}(\omega)$ 曲线终止于 $\omega = 1$, $R_m^{(1)}(\omega)$ $(m = 3, 5, \cdots)$ 在 $\omega \to m$ 时趋于 ∞, 而 $R_\infty^{(1)}(\omega)$ 却为有限. 设 $R_3^{(1)}, R_5^{(1)}, \cdots$ 与 $R_\infty^{(1)}$ 交点的 ω 值为 $\omega_3, \omega_5, \cdots$. 又设 $R_3^{(1)}$ 与 $R_5^{(1)}$ 交于 $\omega_{3,5}$. $R_3^{(1)}$ 与 $R_7^{(1)}$ 交于 $\omega_{3,7}$. $R_5^{(1)}$ 与 $R_7^{(1)}$ 交于 $\omega_{5,7}$, 等等. 于是, 当 f/δ 逐渐增大时, 系统 $(7.1.7)_\varepsilon$ 进入马蹄的途径如下 (1,3,5, $\cdots$ 分别表示主振及 $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \cdots$ 的次谐波振动, ∞ 表示马蹄):

$$\begin{aligned}
0 < \omega < 1, &\quad 1 \to 3 \to 5 \to \cdots \to \infty,\\
1 < \omega < \omega_{3,5} (\approx 2.682), &\quad 3 \to 5 \to 7 \to \cdots \to \infty,\\
\omega_{3,5} < \omega < \omega_{3,7}, &\quad 5 \to 3 \to 7 \to 9 \to \cdots \to \infty,\\
\omega_{3,7} < \omega < \omega_{3,9}, &\quad 5 \to 7 \to 3 \to 9 \to \cdots \to \infty,\\
&\quad \cdots\cdots\\
\omega_3 (\approx 2.698) < \omega < \omega_{5,7}, &\quad 5 \to 7 \to 9 \to 11 \to \cdots \to \infty,\\
\omega_{5,7} < \omega < \omega_{5,9}, &\quad 7 \to 5 \to 9 \to 11 \to \cdots \to \infty,\\
&\quad \cdots\cdots\\
\omega_5 (\approx 3.4) < \omega < \omega_{7,9}, &\quad 7 \to 9 \to 11 \to \cdots \to \infty,\\
\omega_{7,9} < \omega < \omega_{7,11}, &\quad 9 \to 7 \to 11 \to \cdots \to \infty,\\
&\quad \cdots\cdots
\end{aligned}$$

对于系统 $(7.1.17)_\varepsilon$ 可作类似讨论. 设 $R_4^{(2)}, R_6^{(2)}, \cdots$ 与 $R_\infty^{(2)}$ 交点的 ω 值为 $\omega_4, \omega_6, \cdots$, 又设 $R_4^{(2)}$ 与 $R_6^{(2)}$ 交于 $\omega_{4,6}$, $R_4^{(2)}$ 与 $R_8^{(2)}$ 交于 $\omega_{4,8}$, $R_6^{(2)}$ 与 $R_8^{(2)}$ 交于 $\omega_{6,8}$ 等等. 于是, 当 f/δ 逐渐增大时, 系统 $(7.1.17)_\varepsilon$ 进入马蹄途径如下 (2,4,6,$\cdots$ 代表 $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \cdots$ 次谐波振动, ∞ 代表马蹄):

$$0 < \omega < 2, \quad 2 \to 4 \to 6 \to \cdots \to \infty,$$

$$
\begin{aligned}
2 < \omega < \omega_{4,6}, &\quad 4 \to 6 \to 8 \to \cdots \to \infty, \\
\omega_{4,6} < \omega < \omega_{4,8}, &\quad 6 \to 4 \to 8 \to 10 \to \cdots \to \infty, \\
\omega_{4,8} < \omega < \omega_{4,10}, &\quad 6 \to 8 \to 4 \to 10 \to \cdots \to \infty, \\
&\quad \cdots\cdots \\
\omega_4 < \omega < \omega_{6,8}, &\quad 6 \to 8 \to 10 \to \cdots \to \infty, \\
\omega_{6,8} < \omega < \omega_{6,10}, &\quad 8 \to 6 \to 10 \to \cdots \to \infty, \\
&\quad \cdots\cdots \\
\omega_6 < \omega < \omega_{8,10}, &\quad 8 \to 10 \to 12 \to \cdots \to \infty, \\
&\quad \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

可见对于不同 ω, 当参数 f/δ 逐渐增加时, 系统 $(7.1.7)_\varepsilon$ 和 $(7.1.17)_\varepsilon$ 可以经过不同次谐波分枝序列而进入马蹄.

7.1.2 混沌带的存在

考虑具有弱非线性阻尼与受迫周期激励的 Duffing 振子

$$
\ddot{x} + x - x^3 = \varepsilon(-\delta \dot{x}^2 + f(a + \cos\omega t)), \tag{7.1.28}
$$

其等价系统为

$$
\begin{cases}
\dot{x} = y, \\
\dot{y} = -x + x^3 + \varepsilon(-\delta y^2 + f(a + \cos\omega t)).
\end{cases} \tag{7.1.29}
$$

注意到 $(7.1.29)_{\varepsilon=0}$ 与 $(7.1.7)_{\varepsilon=0}$ 是同一系统, 故也可用 Mel′nikov 方法研究该扰动系统. 在扰动项作用下, 异宿轨道的 Mel′nikov 函数为

$$
\begin{aligned}
M_\pm(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(a + \cos\omega(t + t_0)) - \delta y_\pm^{0^2}(t)] y_\pm^0(t) dt \\
&= -\delta I_4 \pm af \pm f I_2 \cos\omega t_0,
\end{aligned} \tag{7.1.30}
$$

其中 $I_4 = \pm\dfrac{8}{15}$ 满足共振条件的次谐 Mel′nikov 函数为

$$
\begin{aligned}
M^{m/n}(t_0) &= \int_0^{mT} [f(a + \cos\omega(t + t_0)) - \delta y_k^2(t)] y_k(t) dt \\
&= -\delta J_4(m, n) + f J_2(m, n) \cos\omega t_0,
\end{aligned} \tag{7.1.31}
$$

其中 $J_4(m, n) = \dfrac{16\sqrt{2} n k^2 (5 - k^2)}{15(1 + k^2)^{5/2}}$.

引理 7.1.1　设 γ, μ 分别是给定的正常数, 则对于函数

$$g(x) = \gamma \frac{\sinh(x)}{x} - \mu, \tag{7.1.32}$$

有

1° 如果 $\gamma \geqslant \mu$, 则 $g(x) \geqslant 0$;

2° 如果 $\gamma \geqslant \mu + 1$, 则 $g(x) \geqslant 1$;

3° 如果 $\gamma < \mu$, 则存在 $\xi < \eta$, 满足 $g(\xi) = 0, g(\eta) = 1$ 使得

$$g(x) \leqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \xi,$$

$$0 < g(x) < 1, \quad \xi \leqslant x \leqslant \eta,$$

$$g(x) > 1, \quad x > \eta.$$

利用上面的计算结果及引理, 可以对混沌带作出讨论.

1° 当 $a > 1$ 时, 由引理 7.1.1 的 1° 可知, $a - I_2 > 0$, 于是由 (7.1.30), 得到系统 $(7.1.29)_\varepsilon$ 产生马蹄的门槛值为

$$\begin{cases} R'_\infty(\omega) = \dfrac{4}{15\left(a + \dfrac{1}{2} I_2\right)}, \\ R''_\infty(\omega) = \dfrac{4}{15\left(a - \dfrac{1}{2} I_2\right)}. \end{cases} \tag{7.1.33}$$

当参数 f/δ 满足不等式

$$R'_\infty \leqslant f/\delta \leqslant R''_\infty(\omega)$$

时, 系统 $(7.1.29)_\varepsilon$ 存在马蹄.

2° 当 $0 < a \leqslant 1$ 时, 由引理 7.1.1 的 3° 知, 存在唯一的 ω_0, 满足: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 \pi \operatorname{csch}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega_0\right) = 0$, 使得

$$a - I_2 < 0, \quad 0 \leqslant \omega < \omega_0,$$

$$a - I_2 > 0, \quad \omega > \omega_0.$$

因而, 当 $0 \leqslant \omega < \omega_0$ 时, 产生马蹄的门槛值为

$$R'_\infty = \frac{4}{15\left(a + \dfrac{1}{2} I_2\right)}. \tag{7.1.34}$$

当 f/δ 满足不等式

$$f/\delta > R'_\infty(\omega), \tag{7.1.35}$$

$(7.1.29)_\varepsilon$ 存在马蹄. 当 $\omega > \omega_0$ 时, 同时存在上、下门槛值, 即当参数 f/δ 满足

$$R'_\infty < f/\delta < R''_\infty \tag{7.1.36}$$

时, 系统 $(7.1.29)_\varepsilon$ 存在马蹄.

对于 $(7.1.28)_\varepsilon$ 的推广系统:

$$\ddot{x} + x - x^3 = -\delta h(x, \dot{x}) + \varepsilon g(\omega t), \tag{7.1.37}$$

其中 $h(x, \dot{x}) = h(-x, -\dot{x})$, 并且 $g(\omega t)$ 的 Fourier 展式中含有常数项, 同样可以证明存在上述的混沌带现象.

从以上分析可见, 在一定条件下, 参数 (δ, f) 平面存在一有界带状区域, 当 (δ, f) 在该区域内取值时, 系统的解出现马蹄. 称这种带域为混沌带.

混沌带的存在是具有异宿轨道的自治系统经周期扰动后所特有现象, 对于含有同宿轨道的系统经周期扰动后未发现这种现象.

7.1.3 有限次次谐分枝导致混沌的可能性

继续讨论 $(7.1.29)_\varepsilon$, 由 (7.1.31) 知产生 m(m 为奇数) 阶次谐的门槛值为

$$R'_\infty(\omega) = \frac{8k^3(5-k^2)}{15\pi\omega(1+k^2)^{5/2}}\sinh\left(\frac{m\pi K'(k)}{2K(k)}\right). \tag{7.1.38}$$

1°. $a > 2$, 对任意固定 ω, 有

$$\lim_{m\to\infty} R'_\infty(\omega) = R^0(\omega) = \frac{4\sqrt{2}}{15\pi\omega}\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega\right). \tag{7.1.39}$$

利用引理 7.1.1 的 2°, 仔细比较 (7.1.33) 和 (7.1.39), 有

$$R^0(\omega) > R'_\infty(\omega). \tag{7.1.40}$$

又对固定 m, 有

$$\begin{cases} \lim\limits_{\omega\to 0} R^0(\omega) = \lim\limits_{\omega\to 0} R'_m(\omega) = \dfrac{4}{15}, \\ \lim\limits_{\omega\to\infty} R'_\infty(\omega) = \dfrac{4}{15(a+1)}, \\ \lim\limits_{\omega\to\infty} R''_\infty(\omega) = \dfrac{4}{15(a-1)}. \end{cases} \tag{7.1.41}$$

由 (7.1.41) 可以看出, 所有次谐分枝曲线 $R'_m(\omega)$, 当 ω 从零增加时, 都从高于 $R'_\infty(\omega)$ 和 $R''(\omega)$ 的某值出发.

此外对于任意固定的 m, 令 $k \to 0$, 即 $\omega \to m$, 利用展开式 (7.1.26), 可以证明

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to 0} R'_m(\omega) = 0, & m = 1, \\ \lim\limits_{k\to 0} R'_m(\omega) = \dfrac{4^{m+1}}{3\pi m}, & m = 3, \\ \lim\limits_{k\to 0} R'_m(\omega) = +\infty, & m = 5, 7, 9, \cdots. \end{cases} \tag{7.1.42}$$

综合以上讨论可以看出, 至少有一条次谐分枝曲线, 由 $R'_m(0) = \dfrac{4}{15}$ 出发, 随 ω 增加, 将落到 $R'_\infty(\omega)$ 曲线下面. 因而对于固定 ω (如 $0 < \omega \leqslant 1$), 逐渐增加参数 f/δ, 系统 $(7.1.29)_\varepsilon$ 至多有限次次谐分枝而进入马蹄.

2°. $1 < a \leqslant 2$, 此时仍有

$$R^0(\omega) > R'_\infty(\omega). \tag{7.1.43}$$

利用引理 7.1.1 中 3°, 可以找到一个 ω_1 满足

$$\sqrt{2}\pi\omega_1 \mathrm{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega_1\right) = a, \tag{7.1.44}$$

使得

$$\begin{cases} R^0(\omega) > R''_\infty(\omega), & \omega > \omega_1, \\ R^0(\omega) < R''_\infty(\omega), & 0 < \omega < \omega_1. \end{cases} \tag{7.1.45}$$

显然, 在 $\omega > \omega_1$ 时, 情况同 1°, 在 $0 < \omega < \omega_1$ 时, 逐渐增加 f/δ, $(7.1.29)_\varepsilon$ 经过有限次次谐分枝, 进入产生马蹄的下门槛值 $R'_\infty(\omega)$, 然后在混沌带内完成无限次次谐分叉, 最后通过上门槛值, 马蹄消失.

3°. $0 < a \leqslant 1$, 在 $0 < \omega \leqslant \omega_0$ 时, 混沌带消失, 此时仍有

$$R^0(\omega) > R'_\infty(\omega). \tag{7.1.46}$$

因而逐渐增加 f/δ, 至多经过有限次次谐分叉而导致马蹄.

当 $\omega > \omega_0$ 时, 由引理 7.1.1 中 3° 可以找到一个 ω_2, 满足

$$\sqrt{2}\omega_2\pi \mathrm{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega_2\right) = a, \tag{7.1.47}$$

使得

$$\begin{cases} R^0(\omega) < R''_\infty(\omega), & \omega_0 < \omega < \omega_2, \\ R^0(\omega) > R''_\infty(\omega), & \omega > \omega_2. \end{cases} \tag{7.1.48}$$

而 $\omega > \omega_0$, 仍满足:

$$R^0(\omega) > R''_\infty(\omega). \tag{7.1.49}$$

结果完全类似 2° 中讨论.

关于 7.1.2 和 7.1.3 小节中讨论的一些结果见图 7.1.3.

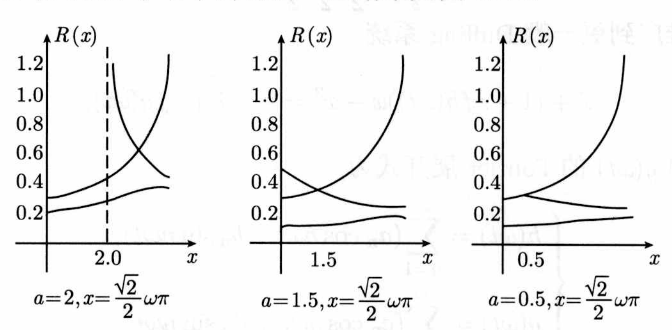


图 7.1.3 不同 a 值时的 $R(\omega)$-ω 曲线

7.1.4 超次谐分枝的存在性

讨论如下的 Duffing 振子

$$\ddot{x} + x - x^3 = -\varepsilon\delta\dot{x} + \varepsilon f(\sin\omega t + \sin 2\omega t), \tag{7.1.50}$$

其等价方程组为

$$\begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + x^3 + \varepsilon(-\delta y + f(\sin\omega t + \sin 2\omega t)). \end{cases} \tag{7.1.51}$$

$(7.1.51)_\varepsilon$ 为 (7.1.8), 计算沿其异宿轨道的 Mel′nikov 函数得到

$$\begin{aligned} M_\pm(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\sin\omega(t+t_0) + \sin 2\omega(t+t_0)) - \delta y_\pm^0(t)]y_\pm^0(t)dt \\ &= -\delta I_1 \pm f(I_2 \sin\omega t_0 + I_5 \sin 2\omega t_0), \end{aligned} \tag{7.1.52}$$

其中 $I_5 = 2\sqrt{2}\pi\omega\operatorname{csch}(\sqrt{2}\pi\omega)$.

对于满足共振条件的周期轨道, 计算其次谐 Mel′nikov 函数可得

$$\begin{aligned} M^{m/n}(t_0) &= \int_0^{mT} [f\sin\omega(t+t_0) + \sin 2\omega(t+t_0) - \delta y_k(t)]y_k(t)dt \\ &= -\delta J_1(m,n) + f(J_2(m,n)\sin\omega t_0 + J_4(m,n)\sin 2\omega t_0), \end{aligned} \tag{7.1.53}$$

其中,

$$J_4(m,n) = \begin{cases} 0, & n \neq 2\text{且}m\text{为奇数}, \\ 8\sqrt{2}\pi\omega\operatorname{csch}\left(\dfrac{m\pi K'(k)}{2K(k)}\right), & n = 2\text{且}m\text{为奇数}. \end{cases}$$

由 $J_2(m,n)$ 和 $J_4(m,n)$ 表达式可见在参数 f/δ 增大过程中, 会遇到如下的两列次谐和超次谐分枝序列:

$$\begin{cases} \dfrac{m}{1} = 1, 3, 5, \cdots, \\ \dfrac{m}{2} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}, \cdots. \end{cases} \tag{7.1.54}$$

把上述分析推广到更一般 Duffing 系统

$$\ddot{x} + (1 + \varepsilon f h(\omega t))x - x^3 = -\varepsilon\delta\dot{x} + \varepsilon f g(\omega t), \tag{7.1.55}$$

其中 $h(\omega t)$ 和 $g(\omega t)$ 的 Fourier 展开式为

$$\begin{cases} h(\omega t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \\ g(\omega t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n \cos n\omega t + d_n \sin n\omega t). \end{cases} \tag{7.1.56}$$

如果 $h(\omega t)$ 展开式中 $a_n^2 + b_n^2 \neq 0$, 系统 $(7.1.55)_\varepsilon$ 将出现下列次谐分枝序列

$$\frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \frac{6}{n}, \cdots.$$

如果 $g(\omega t)$ 展开式中 $c_n^2 + d_n^2 \neq 0$, 系统 $(7.1.55)_\varepsilon$ 将出现下列次谐分枝序列

$$\frac{1}{n}, \frac{3}{n}, \frac{5}{n}, \cdots.$$

由此可见, 各类次谐和超次谐分枝序列的出现取决于参数激励和外激励的存在以及它们的 Fourier 频谱.

7.2　具有对称异宿环系统的次谐与马蹄

本节推广 7.1 节的结果到较一般情形. 我们发现对于具有轴对称异宿轨道的一般二阶系统, 在适当的弱周期扰动下, 都具有类似 7.1 节所揭示的性质.

考虑二阶系统

$$\ddot{x} + g(x) = 0, \tag{7.2.1}$$

其中 $g(x)$ 满足条件

(i) $g(x) \in C^2,\ g(-x) = g(x)$;

(ii) $g'(0) > 0,\ g(1) = 0,\ g'(1) < 0;\ g(x) \neq 0,\ x \in [0, 1)$.

(7.2.1) 的等价系统为

$$\begin{cases} \dot{x} \ = y, \\ \dot{y} \ = -g(x). \end{cases} \tag{7.2.2}$$

(7.2.2) 为一 Hamilton 系统, 其 Hamilton 量为

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(x)dx=h. \tag{7.2.3}$$

在给出主要结果前, 先引入几个引理.

引理 7.2.1 (1) 系统 (7.2.2) 的相轨线关于 x 轴和 y 轴对称;

(2) (0,0) 为 (7.2.2) 中心, $(\pm1,0)$ 为 (7.2.2) 鞍点, 存在两条连结 $(\pm1,0)$ 异宿轨道, 且它们形成异宿二环;

(3) 在异宿环内存在一族包围 (0, 0) 的闭轨线, 与 x 轴, y 轴分别交于两点, 它们的周期 $T\in\left[\dfrac{2\pi}{g'(0)},\infty\right)$.

证 (1) 的结论是显然的.

(2) 根据关于 $g(x)$ 的假设, $g(0)=0,g(-1)=-g(1)=0,g'(-1)=g'(1)<0$, 可得 $(\pm1,0)$ 为 (7.2.2) 的鞍点. 又 $H(x,y)>0$ 其中 $|x|\leqslant1$, $x^2+y^2\neq0$ 且 $\dfrac{dH}{dt}=0$, 故平衡点 (0,0) 为中心. 记 $h_1=\displaystyle\int_0^1 g(x)dx=\int_0^{-1}g(x)dx$, 则 $H(x,y)=h_1$ 是连结两鞍点 $(\pm1,0)$ 的两条异宿轨道.

(3) 若 $0<h<h_1$, 令 $W(x)=\displaystyle\int_0^x g(x)dx-h,x\in(-1,1)$, 则 $W(0)=-h<0,W(\pm1)=h_1-h>0$; 由 2°), $W'(x)>0,x\in(0,1),W'(x)<0,x\in(-1,0)$; 故 $0<h<h_1$ 时,$H(x,y)=h$ 是一族包围中心的闭轨道, 且与 x 轴仅有两个对称于 y 轴的交点, 与 y 轴亦有两个对称于 x 轴的交点 $(0,\pm\sqrt{2h})$.

设 $H(x,y)=h$ 的闭分支轨道的周期为 T_h, 则

$$\lim_{h\to0^+}T_h=2\pi/\sqrt{g'(0)},$$

$$\lim_{h\to h^+}T_h=4\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2(h_1-\displaystyle\int_0^x g(t)dt)}}.$$

又 $h_1-\displaystyle\int_0^x g(t)dt=-\frac{g'(1)}{2!}(1-x)^2-\frac{g''(\xi)}{3!}(1-x)^3$, $\xi\in(x,1),x\geqslant0$. 则

$$\int_0^1\frac{dx}{\left[2\left(h_1-\displaystyle\int_0^x g(t)dt\right)\right]^{1/2}}=\int_0^1\frac{dx}{(1-x)\left[-g'(1)-\dfrac{g''(\xi)}{3}(1-x)\right]^{1/2}}.$$

而

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{(1-x)\left[-g'(1)-\dfrac{g''(\xi)}{3}(1-x)\right]^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{-g'(1)}}>0,$$

故得到

$$\lim_{h\to h_1}T_h=+\infty. \qquad \square$$

引理 7.2.2 *若 $(x(t),y(t))$ 是 (7.2.2) 闭轨道, 周期为 T, 且 $x(0)=0$, $(\pm p(t),\pm\dot p(t))$ 是异宿轨道的方程解, 则有*

(1) $x(-t)=-x(t), y\ (-t)=y(t); p(-t)=-p(t),\ \dot p(-t)=\dot p(t)$;

(2) $x\left(t+\dfrac{T}{2}\right)=-x(t),\quad y\left(t+\dfrac{T}{2}\right)=-y(t)$;

(3) $y\left(\dfrac{T}{4}\right)=0$, *若* $y(0)>0, y(t)$ *严格单调下降* $\left(t\in\left[0,\dfrac{T}{4}\right]\right)$, *而* $x(t)$ *严格单调上升* $\left(t\in\left[0,\dfrac{T}{4}\right]\right)$.

证 (1) 由 (7.2.2), $(x(t),y(t))$ 满足

$$\begin{cases}\dot x(t)\ =y(t),\\ \dot y(t)\ =-g(x(t)).\end{cases}\tag{7.2.4}$$

故有

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}(-x(t))\ =-y(t),\\ \dfrac{d}{dt}(-y(t))\ =g(x(t))=-g(-x(t)).\end{cases}\tag{7.2.5}$$

所以 $(-x(t),-y(t))$ 是 (7.2.2) 的解, 同理可证 $(x(-t),-y(-t))$, $\left(x\left(t+\dfrac{T}{2}\right),y\left(t+\dfrac{T}{2}\right)\right)$ 都是 (7.2.2) 的解. 由假定 $x(0)=0$, 从而有初值条件 $(-x(0),-y(0))=(0,-y(0))$, 由解的唯一性, 得

$$x(-t)=-x(t),\quad y(-t)=y(t).\tag{7.2.6}$$

同理可以证得

$$p(-t)=-p(t),\quad \dot p(-t)=\dot p(t).\tag{7.2.7}$$

(2) 因 $x\left(\dfrac{T}{2}\right)=x\left(T-\dfrac{T}{2}\right)=-x\left(\dfrac{T}{2}\right)$, 故 $x\left(\dfrac{T}{2}\right)=0$ 由引理 7.2.2 中 (1) 知

$y\left(\dfrac{T}{2}\right)=-y(0)$, 这样就有

$$\left(x\left(\frac{T}{2}\right),y\left(\frac{T}{2}\right)\right)=(0,-y(0)). \tag{7.2.8}$$

$\left(x\left(t+\dfrac{T}{2}\right),y\left(t+\dfrac{T}{2}\right)\right)$ 是 (7.2.2) 解, 满足初值条件 (7.2.8), 故

$$x\left(t+\frac{T}{2}\right)=-x(t),\quad y\left(t+\frac{T}{2}\right)=-y(t).$$

(3) 由于 $y(0)>0$, 可知 $y(t)>0, t\in\left[0,\dfrac{T}{4}\right)$; $x(t)>0, t\in\left(0,\dfrac{T}{4}\right)$ 进一步由方程可知, $x(t)$ 在 $t\in\left[0,\dfrac{T}{4}\right]$ 上严格单调上升. 而同时有 $y'(t)<0$, 因此 $y(t)$ 在 $t\in\left[0,\dfrac{T}{4}\right]$ 上严格单调下降. □

由上面两个引理, 以下不妨假定 (7.2.2) 的闭轨道 $(x(t),y(t))$ 满足 $x(0)=0$, $y(0)>0$.

引理 7.2.3 若闭轨道 $(x(t),y(t))$ 的周期为 T, 则

$$\begin{cases} x(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\sin\frac{2(2n-1)\pi}{T}t, \\ y(t)g(x(t))=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b'_{2n}\sin\frac{2\cdot 2n\pi}{T}t, \end{cases} \tag{7.2.9}$$

其中,

$$b_{2n-1}=\frac{2}{T}\int_0^T\sin\frac{2(2n-1)\pi}{T}tdt,$$
$$b'_{2n}=\frac{2}{T}\int_0^T y(t)g(x(t))\sin\frac{2\cdot 2n\pi}{T}t.$$

证 由上述两个引理知

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi}{T}t. \tag{7.2.10}$$

而

$$\begin{aligned}
b_{2n} &= \frac{2}{T}\int_0^T \sin\frac{2\cdot 2n\pi}{T}tdt \\
&= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x\left(t+\frac{T}{2}\right)\sin\frac{2\cdot 2n\pi}{T}\left(t+\frac{T}{2}\right)dt \\
&= -\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin\frac{2\cdot 2n\pi}{T}(t)dt \\
&= -b_{2n}.
\end{aligned}$$

因此 $b_{2n}=0(n=1,2,3,\cdots)$. 同理可证 $b'_{2n-1}=0(n=1,2,3,\cdots)$. □

引理 7.2.4 若 $f(x,y)\in C^0$, 且 $f(-x,y)=f(x,y); f(x,-y)=-f(x,y)$, 引入记号

$$I^*=\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{p}(t)f(p,\dot{p})dt,\qquad I^n(h_m,\omega)=\int_0^{nT_{nm}}y(t)f(x,y)dt,$$

$$I_l(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{p}(t)\cos l\omega tdt,\qquad I_l^n(h_m,\omega)=\int_0^{nT_{nm}}y(t)\cos l\omega tdt,$$

$$I_{*l}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{p}(t)g(p(t))\sin l\omega tdt,\quad I_{*l}^n(h_m,\omega)=\int_0^{nT_{nm}}y(t)g(x(t))\sin l\omega tdt,$$

其中 l,m,n 是自然数. 闭轨道 $(x(t),y(t))$ 以 T_{nm} 为周期, $T_{nm}=\dfrac{2\pi m}{n\omega}$, n,ω,l 固定时

$$\lim_{m\to\infty}h_m=h_1,\quad \lim_{m\to\infty}T_{nm}=\infty,$$

则有

(1) $I^n(h_m,\omega)\to 2nI^*,\quad m\to\infty,$　　(7.2.11)

(2) $I_l^n(h_m,\omega)\to 2nI_l(\omega),\quad m\to\infty,$　　(7.2.12)

(3) $I_{*l}^n(h_m,\omega)\to 2nI_{*l}(\omega),\quad m\to\infty.$　　(7.2.13)

证 (1) 设 $G(x,y)=\{(x,y)|\quad |x|\leqslant 1,|y|\leqslant\sqrt{2h_1}\}$, 则 $f(x,y),g(x)$ 在 G 上有上界, 不妨设

$$|f(x,y)|\leqslant M,\quad |g(x)|\leqslant M. \tag{7.2.14}$$

由 (7.2.14) 及 $p(+\infty)=1,p(-\infty)=-1$, 可知积分 I^*,I_l,I_{*l} 收敛. 又

$$\int_0^{x(\frac{T_{nm}}{4})}g(x)dx=h_m,$$

则有

$$x\left(\frac{T_{nm}}{4}\right)\to 1,\quad m\to\infty. \tag{7.2.15}$$

利用引理 7.2.2 的结果以及关于 $f(x,y)$ 的假定, 有

$$I^n(h_m,\omega)=2n\int_{-\frac{T_{nm}}{4}}^{\frac{T_{nm}}{4}}y(t)f(x,y)dt. \tag{7.2.16}$$

对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $t_0>0$, 使得

$$1-p(t_0)<\varepsilon/32nM. \tag{7.2.17}$$

固定此 t_0, 存在 N', 使得当 $n>N'$ 时, 有 $T_{nm}/4>t_0$ 和

$$\left|x\left(\frac{T_{nm}}{4}\right)-1\right|<\frac{\varepsilon}{16nM}. \tag{7.2.18}$$

由于 $f(x,y)$ 在 G 上一致连续, 故对此 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 且 $\delta<\dfrac{\varepsilon}{16nM}$, 使得当 $|x_1-x_2|<\delta, |y_1-y_2|<\delta$ 时, 就有

$$|y_1f(x_1,y_1)-y_2f(x_2,y_2)|<\frac{\varepsilon}{16t_0n}. \tag{7.2.19}$$

对 $\delta>0$, 存在 $N>N'$ 时, h_m 和 h_1 充分接近, 换言之 $(x(0),y(0))=(0,\sqrt{2h_m})$ 与 $(p(0),\dot p(0))=(0,\sqrt{2h_1})$ 充分靠近, 由解对初值连续性定理, 必有

$$\begin{cases}|x(t)-p(t)|<\delta,\\ |y(t)-\dot p(t)|<\delta,\end{cases}\quad t\in[-t_0,t_0]. \tag{7.2.20}$$

因此

$$\begin{aligned}\left|x\left(\frac{T_{nm}}{4}\right)-x(t_0)\right|&=\left|x\left(\frac{T_{nm}}{4}\right)-1+1-p(t_0)+p(t_0)-x(t_0)\right|\\&\leqslant\left|x\left(\frac{T_{nm}}{4}\right)-1\right|+|1-p(t_0)|+|p(t_0)-x(t_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{32nM}+\frac{\varepsilon}{16nM}+\frac{\varepsilon}{16nM}=\frac{5\varepsilon}{32nM}.\end{aligned} \tag{7.2.21}$$

故

$$\begin{aligned}|2nI^*-I^n|&=2n\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\dot pf(p,\dot p)dt-\int_{-\frac{T_{nm}}{4}}^{T_{nm}}yf(x,y)dt\right|\\&=2n\left|\int_{-\infty}^{-t_0}\dot pf(p,\dot p)dt+\int_{-t_0}^{t_0}[\dot pf(p,\dot p)-yf(x,y)]dt\right.\\&\quad\left.+\int_{t_0}^{\infty}\dot pf(p,\dot p)dt-\int_{-\frac{T_{nm}}{4}}^{-t_0}yf(x,y)dt-\int_{t_0}^{\frac{T_{nm}}{4}}yf(x,y)dt\right|\\&\leqslant 2n\left[\frac{\varepsilon}{8n}+2M(1-p(t_0))+2M\left(x\left(\frac{T_{nm}}{4}\right)-x(t_0)\right)\right]\\&<2n\left[\frac{\varepsilon}{8n}+\frac{\varepsilon}{16n}+\frac{5\varepsilon}{16n}\right]=\varepsilon.\end{aligned} \tag{7.2.22}$$

即 $I^n(h_m,\omega)\to 2nI^*, m\to\infty$.

(2) 有

$$\begin{aligned}I_l^n(h_m,\omega)&=\int_0^{nT_{nm}}y(t)\cos l\omega t dt\\&=l\omega\int_0^{nT_{nm}}x(t)\sin l\omega t dt\\&=l\omega\int_0^{nT_{nm}}\sum_{i=1}^{n-1}b_{2i-1}\sin\left(\frac{2(2i-1)\pi}{T_{nm}}t\right)\sin\left(\frac{2ml\pi}{nT_{nm}}t\right)dt.\end{aligned}$$

分两种情况：

当 $ml\neq n(2i-1)$ 时,

$$I_l^n(h_m,\omega)=0. \tag{7.2.23}$$

当 $ml=n(2i-1)$ 时, 由于 m 与 n 互质, 则应有 $n|l$, 故

$$\begin{aligned}I_l^n(h_m,\omega)&=2\sum_{j=0}^{n-1}\int_{j\frac{T_{nm}}{2}}^{(j+1)\frac{T_{nm}}{2}}y(t)\cos l\omega t dt\\&=2n\int_0^{\frac{T_{nm}}{2}}y(t)\cos l\omega t dt.\end{aligned}$$

再利用周期关系可得到

$$I_l^n(h_m,\omega)=2n\int_{-\frac{T_{nm}}{4}}^{\frac{T_{nm}}{4}}y(t)\cos l\omega t dt. \tag{7.2.24}$$

接着采用类似于 (1) 的证明, 可以得到

$$I_l^n(h_m,\omega)\to 2nI_l(\omega),\quad m\to\infty. \tag{7.2.25}$$

(3) 由引理 7.2.4, 可得到

$$I_{*l}^n(h_m,\omega)=\int_0^{nT_{nm}}\sum_{i=1}^{\infty}b'_{2i}\sin\frac{2\cdot 2i\pi}{T_{nm}}\sin\frac{2ml\pi}{nT_{nm}}tdt.$$

同样可以分成两种情况加以讨论：

当 $n\cdot 2i\neq ml$ 时, 由正交性得

$$I_{*l}^n(h_m,\omega)=0.$$

当 $n\cdot 2i=ml$ 时, 必有 $n|l$, 再利用周期关系, 可得到

$$I_{*l}^n(h_m,\omega)=2n\int_{-\frac{T_{nm}}{4}}^{\frac{T_{nm}}{4}}y(t)g(x(t))\cos l\omega t dt. \tag{7.2.26}$$

采用类似的估计, 可以证明

$$I_{*l}^n(h_m,\omega)\to 2nI_{*l}(\omega),\quad m\to\infty. \tag{7.2.27}$$

□

下面叙述本节的主要结果:

定理 7.2.1 考虑系统

$$\ddot{x}+\varepsilon\alpha f(x,\dot{x})+g(x)=\varepsilon rh(t), \tag{7.2.28}$$

其中 $0<\varepsilon\ll 1,\alpha,r>0,f(x,\dot{x})$ 满足引理 7.2.4 要求, 当 $\varepsilon=0$ 时, $(7.2.28)_\varepsilon$ 为 (7.2.1) 型系统, 且闭轨道周期为 T_h, 它满足 $dT_h/dh>0$; $h(t)$ 为 t 的周期函数, 其 Fourier 展开式为

$$h(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{h=1}^{K}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t), \tag{7.2.29}$$

并且假定 $I^*\neq 0,I_{*l}\neq 0\ (\omega\in R^1)$. 那么, 有

1° 如果存在某个 $k,a_k^2+b_k^2\neq 0$, 其余 $a_i,b_i=0\ (i=k,i=1,2,\cdots,K)$, 则系统经过无限次奇阶的次谐分枝进入马蹄;

2° 若 $a_0\neq 0$, 且存在某个 $k,a_k^2+b_k^2\neq 0$, 其余 $a_i,b_i=0\ (i\neq k,i=1,2,\cdots,k)$, 则 $(7.2.28)_\varepsilon$ 可能有马蹄产生, 且系统是经有限次次谐分枝进入马蹄;

3° 若存在若干 $k_1k_2\cdots k_m$, 使得 $a_j^2+b_j^2\neq 0\ (j=k_1,\cdots,k_m)$, 其余 $a_i,b_i=0\ (i\neq k_1,\cdots,k_m,i=1,2,\cdots,k)$, 则 $(7.2.28)_\varepsilon$ 经有限次次谐或超次谐分枝或有限次与无限次次谐或超次谐分枝共存导致马蹄.

证 1° $(7.2.28)_\varepsilon$ 的等价系统为

$$\begin{cases}\dot{x}\ =y,\\ \dot{y}\ =-g(x)+\varepsilon(-\alpha f(x,y)+rh(t)).\end{cases} \tag{7.2.30}$$

根据上述四个引理以及定理条件的假设可知, $(7.2.30)_\varepsilon$ 满足上一章提出的 Mel′nikov 方法使用的有关条件. 我们先计算沿着其异宿轨道的 Mel′nikov 函数

$$M(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{p}(t)(-\alpha f(p(t),\dot{p}(t))+rh(t+t_o))dt. \tag{7.2.31}$$

由条件假定 $I^*\neq 0,I_{*l}\neq 0$, 不失一般性取 $I^*>0,I_{*l}>0$, 故 (7.2.31) 为

$$M(t_0)=-\alpha I^*+r\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{p}(t)\cos l\omega t_0dt=-\alpha I^*+rI_l\cos l\omega t_0. \tag{7.2.32}$$

产生马蹄的门槛值为

$$R_l^\infty(\omega)=I^*/I_l. \tag{7.2.33}$$

其次, 计算次谐的 Mel'nikov 函数

$$
\begin{aligned}
M^{m/n}(t_0) &= \int_0^{nT_{nm}} y[-\alpha f(x,y) + r\cos l\omega(t+t_0)]dt \\
&= -\alpha I^n + rI_l^n(h_m,\omega)\cos l\omega t_0.
\end{aligned} \tag{7.2.34}
$$

(7.3.34) 中的 (x,y) 取次谐轨道的解. 因而产生次谐分枝的门槛值为

$$
R_{l,n}^m(\omega) = I^n / I_l^n(h_m,\omega). \tag{7.2.35}
$$

注意, 由于 $I^* \neq 0$, 据引理 7.2.4 可知, 对充分大的 m, 有 $I_l^m(h_m,\omega) \neq 0$, 因而 (7.2.35) 式成立.

取 $m \to \infty$ 的极限情况

$$
\lim_{m\to\infty} R_{l,n}^m(\omega) = 2nI^*/2nI_l = R_l^\infty(\omega). \tag{7.2.36}
$$

由引理 7.2.4 的证明过程可知, 此时有 $n|l$, 因而可以按下列几种情况处理:

(1) 当 $n = l$ 时, $m = 2i-1$, 且 $(l,m) = 1$, 故系统 $(7.2.28)_\varepsilon$ 将按照 $l = 1$ 或 $l > 1$ 分别经过无限次奇阶次谐分枝或无限次超次谐分枝导致马蹄.

(2) $n|l$, 即 n 为 l 的因子, $1 \leqslant n < l$, 设 l 为偶数, 由 $ml = n(2i-1)$ 又可分成两种情况:

(a) 设 n 也为偶数, 在 $\dfrac{l}{n}$ 为偶数时, $ml = n(2i-1)$ 不能成立, 这种情况排除, 故必有 $\dfrac{l}{n}$ 为奇数, 那么 m 必为奇数, 对于一切 i, 可取到可列个 m, 因而系统 $(7.2.28)_\varepsilon$ 在此时也是经过无限次次谐分枝或超次谐分枝导致马蹄.

(b) 设 n 为奇数, 注意到 n 为 l 因子, 故 $\dfrac{l}{n}$ 必为偶数, 那么 $lm = n(2i-1)$ 不能成立, 这种情况应排除.

(3) $n|l, n$ 是 l 因子, $1 \leqslant n \leqslant l$, 假设 l 为奇数, 对一切 i, 可以找到可列个奇数 m 满足 $lm = n(2i-1)$, 所以系统 $(7.2.28)_\varepsilon$ 经过无限次奇数阶次谐分枝或无限次超次谐分枝而导致马蹄.

2° 证明类同 1°.

3° 证明类同 1°. 证毕. □

7.3　Josephson 结的 I~V 特性曲线

超导理论的一个重要方面是对弱连接导体的研究. 把两块超导体用另一个物体 (可以是超导体, 也可以是包括绝缘介质在内的非超导体) 连接起来, 如果它能而且只能让很小的超流电流从一个超导体流向另一个超导体, 就形成了弱连接超导

体. 最典型的弱连接超导体称为 Josephson 结. 多年来, 许多学者已经在理论上和实验上对 Josephson 结作过大量工作. 特别是最近几年, 人们发现了 Josephson 结的 I~V 特性曲线具有混沌性质以后, 这方面的实验和数值研究得到了进一步发展.

研究 Josephson 结的方法是讨论其 I~V 特性曲线. 在恒流源的情况下, Josephson 结的等效电路见图 7.3.1

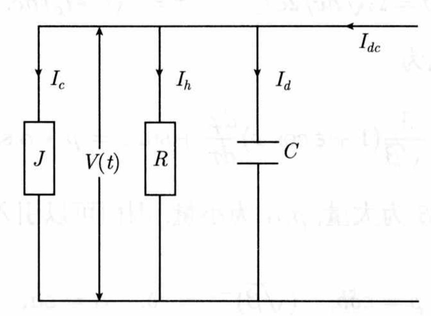


图 7.3.1 Josephson 结的等效电路图

由图可见, 此时结中间同时流过超流电流和正常电流, 因而必须考虑结的电阻效应和电容效应:

$$I_{dc} = I_s + I_n + I_d, \tag{7.3.1}$$

其中 I_s 为流过理想结的电流, I_n 为正常电流, I_d 为位移电流. $I_s = I_c \sin\phi$, I_c 为超导体的临界电流; 考虑到电阻的隧道效应 $I_n = (1+\varepsilon\cos\phi)\dfrac{V}{R}$; $I_d = c\dfrac{dV}{dt}$, 因而 (7.3.1) 可写为

$$I_{dc} = I_c \sin\phi + (1+\varepsilon\cos\phi)\frac{V}{R} + c\frac{dV}{dt}. \tag{7.3.2}$$

注意到波函数的位相差 ϕ 与电压 V 关系

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2e}{h}V(t), \tag{7.3.3}$$

其中 h 为普朗克常数, 可由 (7.3.2) 得到

$$I_{dc} = \left(\frac{hc}{2e}\right)\frac{d^2\phi}{dt^2} + \left(\frac{h}{2ek}\right)(1+\varepsilon\cos\phi)\frac{d\phi}{dt} + I_c\sin\phi. \tag{7.3.4}$$

如果电流部分既有直流又有交流, 那么描述 Josephson 结行为的动力学方程

$$I_{dc} + I_{ac}\sin\Omega t = \left(\frac{hc}{2e}\right)\frac{d^2\phi}{dt^2} + \left(\frac{h}{2ek}\right)(1+\varepsilon\cos\phi)\frac{d\phi}{dt} + I_c\sin\phi. \tag{7.3.5}$$

以下利用 Mel'nikov 方法, 在某些参数条件下, 对 (7.3.5) 作出分析, 并用所得结果对 Josephson 结的 I~V 特性曲线上混沌、台阶、滞后等现象作出相应的讨论, 理论分析所得结果与实验研究结果较好地吻合.

取无量纲参数

$$\rho = I_{dc}/I_c, \quad \alpha = I_{ac}/I_c, \quad \beta = 2eI_c cR^2/h. \tag{7.3.6}$$

再令

$$\omega = \Omega\sqrt{hc/2eI_c}, \qquad \tau = t\sqrt{2eI_c/hc}. \tag{7.3.7}$$

(7.3.5) 的无量纲方程化为

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}(1 + \varepsilon\cos\varphi)\frac{d\varphi}{d\tau} + \sin\varphi = \rho + \alpha\sin\omega\tau. \tag{7.3.8}$$

我们处理 (7.3.8). 假定 β 为大量, ρ, α 为小量, 因而可以引入小参数 $0 < \varepsilon \ll 1$, 使得

$$\rho = \varepsilon\delta b, \quad (\sqrt{\beta})^{-1} = \varepsilon\delta, \quad \alpha = \varepsilon a, \tag{7.3.9}$$

其中 $\delta, b, a \geqslant 0$, 且为 $O(1)$, 那么 (7.3.8) 可化为

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \varepsilon\delta(1 + \varepsilon\cos\phi)\frac{d\varphi}{d\tau} + \sin\varphi = \varepsilon[\delta b + a\sin\omega\tau]. \tag{7.3.10}$$

令 $\varphi = x, \dfrac{d\varphi}{d\tau} = y$, (7.3.10) 的等价系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x + \varepsilon[\delta b - \delta(1 + \varepsilon\cos x)y + a\sin\omega\tau]. \end{cases} \tag{7.3.11}$$

$(7.3.11)_{\varepsilon=0}$ 为一 Hamilton 系统, 其 Hamilton 量为

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x = h. \tag{7.3.12}$$

对应的 $(7.3.11)_{\varepsilon=0}$ 系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x. \end{cases} \tag{7.3.13}$$

(7.3.13) 定义在 $S^1 \times R$ 的柱面上, $(0, 0)$ 为其中心, 并有 $(-\pi, 0)$ 和 $(\pi, 0)$ 粘合而成的双曲鞍点. 在 $h = 1$ 时, 存在两条通向双曲鞍点的同宿轨道 $\Gamma^0_\pm$, 当 $h < 1$ 时, 存在一族包围 $(0, 0)$ 且位于 $\Gamma^0_\pm$ 内的振动型 (O) 型周期轨道 $\Gamma^i(k)$. 当 $h > 1$ 时, 存在两族包围柱面的旋转型 (R) 周期轨道 $\Gamma^l_\pm(k)$. 上述各类轨道的参数方程分别为:

同宿轨道 $\Gamma^0_\pm$,

$$\begin{cases} x^0_\pm(\tau) = \pm 2\arcsin(\tanh\tau), \\ y^0_\pm(\tau) = \pm 2\mathrm{sech}\tau. \end{cases} \tag{7.3.14}$$

振动型 (O 型) 周期轨道 $\Gamma^i(k)$,

$$\begin{cases} x^i(\tau,k) = 2\arcsin(k\mathrm{sn}(\tau,k)), \\ y^i(\tau,k) = 2k\mathrm{cn}(\tau,k), \end{cases} \tag{7.3.15}$$

其中 $h^i(k) = H(\Gamma^i(k)) = 2k^2 - 1$, 对应的周期为 $T^i(k) = 4K(k)$.

R 型周期轨道 $\Gamma^l_{\pm}(k)$,

$$\begin{cases} x^l_{\pm}(\tau,k) = \pm 2\arcsin\left(\mathrm{sn}\left(\dfrac{1}{k}\tau,k\right)\right), \\ y^l_{\pm}(\tau,k) = \pm\dfrac{2}{k}\mathrm{dn}\left(\dfrac{1}{k}\tau,k\right). \end{cases} \tag{7.3.16}$$

此时 $h^l_{\pm}(k) = H(\Gamma^l_{\pm}(k)) = \dfrac{2}{k^2} - 1 > 1$, 对应的周期为 $T^l_{\pm}(k) = 2kK(k) \overset{\text{def}}{=} T^l(k)$.

现在用 Mel'nikov 方法讨论如下.

7.3.1 马蹄的产生

对 Γ^0_+, 其 Mel'nikov 函数为

$$\begin{aligned} M^0_+(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^0_+(\tau)[\delta b - \delta y^0_+(\tau) - \delta\varepsilon\cos x^0_+(\tau)\cdot y^0_+(\tau) - a\sin\omega(\tau+\tau_0)]d\tau \\ &= \frac{2a\pi}{\cosh\left(\dfrac{\pi}{2}\omega\right)}[\delta/\delta^0_+(b) + \sin\omega\tau_0], \end{aligned} \tag{7.3.17}$$

其中 $\delta^0_+(b) = c_0/(b-b_0), b_0 = (12+4\varepsilon)/3\pi, c_0 = a/\cosh\dfrac{\pi}{2}\omega$. 显然在参数 (b,δ) 平面上, 若满足

$$S^0_+ : 0 \leqslant \delta \leqslant |\delta^0_+(b)|, \tag{7.3.18}$$

则当 ε 充分小时, $(7.3.11)_\varepsilon$ 的 Poincaré 映射 $P^{\tau_0}_\varepsilon$ 在不动点 P_1 处的不稳定流形与在不动点 P_2 处的稳定流形将横截相交. 区域 S^0_+ 的边界曲线为

$$l^r_0 : \delta(b-\delta_0) = c_0, \qquad l^l_0 : \delta(b_0 - b) = c_0.$$

l^l_0 与 δ 轴相交于 $(0,\delta_0), \delta_0 = c_0/b_0$(见图 7.3.2).

对 Γ^0_-, 其 Mel'nikov 函数为

$$\begin{aligned} M^0_-(\tau_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^0_-(\tau)[\delta b - \delta y^0_-(\tau) - \delta\varepsilon\cos x^0_-(\tau)\cdot y^0_-(\tau) + a\sin\omega(\tau+\tau_0)]dt \\ &= -\frac{2a\pi}{\cosh\dfrac{\pi}{2}\omega}[\delta/\delta^0_-(b) + \sin\omega\tau_0], \end{aligned} \tag{7.3.19}$$

其中 $\delta_-^0(b)=c_0/(b+b_0)$. 这样, 若 (b,δ) 满足

$$S_-^0:0\leqslant\delta\leqslant|\delta_-^0(b)|. \tag{7.3.20}$$

则当 ε 充分小时, $(7.3.11)_\varepsilon$ 的 Poincaré 映射 $P_\varepsilon^{\tau_0}$ 在不动点 P_1 处的稳定流形与在不动点 P_2 处的不稳定流形将横截相交. 区域 S_-^0 的边界曲线为

$$l_0:\delta(b+b_0)=c_0.$$

l_0 交 δ 轴于 $(0,\delta_0)$ (见图 7.3.2).

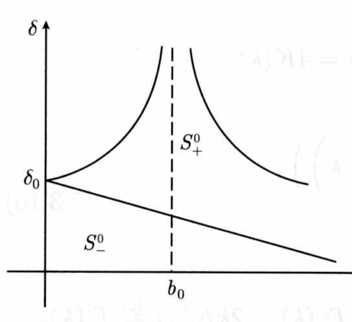


图 7.3.2 S_+^0 与 S_-^0 的分布图

由图 7.3.2 可见, $S_-^0\subset S_+^0$, 因而有

结论 1 若 (b,δ) 满足 $0\leqslant\delta\leqslant|\delta_-^0(b)|$, 则当 ε 充分小时, $(7.3.11)_\varepsilon$ 的 Poincaré 映射 $P_\varepsilon^{\tau_0}$ 在 (x,y) 平面上将出现横截同宿点, 即系统存在马蹄.

7.3.2 次谐的存在性

1. O-型轨道 $\Gamma^i(k)$

对任何互素正整数 m,n, 存在唯一的一个 $k_{m/n}^i\in(0,1)$, 使得 $T^i(k_{m/n}^i)=4K(k_{m/n}^i)=\dfrac{m}{n}T=\dfrac{2\pi m}{n\omega}$, 计算此次谐的 Mel′nikov 函数

$$\begin{aligned}M_i^{m/n}(\tau_0)&=\int_0^{mT}y^i(\tau,k)[\delta b-\delta y^i(\tau,k)-\delta\varepsilon y^i(\tau,k)\cos x^i(\tau,k)+a\sin\omega(\tau+\tau_0)]d\tau\\&=\begin{cases}\text{与}\tau_0\text{无关常数}, & n\neq1\text{或}m\text{为偶},\\-\dfrac{4a\pi}{\cosh(\omega K'(k))}[\delta/\delta_m^i-\sin\omega\tau_0], & n=1\text{且}m\text{为奇},\end{cases}\end{aligned}\tag{7.3.21}$$

其中 $\delta_m^i=a(\cosh\omega K'(k))^{-1}/\left\{\dfrac{4}{\pi}(E-k'^2K)+\dfrac{4\varepsilon}{3\pi}[(2k^2-1)E-k'K]\right\},k'^2=1-k^2,k=k_m^i$. 这样可以得到如下结论:

结论 2 若 (b,δ) 满足

$$S_m^i:0\leqslant\delta\leqslant|\delta_m^i|, \tag{7.3.22}$$

则对充分小的 ε, 在 $(7.3.11)_{\varepsilon=0}$ 的周期为 mT 的 O 型周期解附近存在 $(7.3.11)_\varepsilon$ 的周期为 mT 的 O 型周期解. 反之, 若 $(b,\delta)\overline{\in S_m^i}$, 则不存在周期为 mT 的 O 型次谐周期解.

2. R 型周期轨道 $\Gamma_+^l(k)$

同样对于任何互素正整数 m,n, 存在唯一的一个 $k_{m/n}^l\in(0,1)$, 使得 $T^l(k_{\frac{m}{n}}^l)=$

$2k^l_{m/n}K(k^l_{m/n})=\frac{m}{n}T$, 计算此次谐的 Mel′nikov 函数, 得到

$$
\begin{aligned}
M_l^{m/n}(\tau_0)&=\int_0^{mT}y_+^l(\tau,k)[\delta b-\delta y_+^i(\tau,k)-\delta\varepsilon y_+^i(\tau,k)\cos x^i(\tau,k)\\
&\quad+a\sin\omega(\tau+\tau_0)]d\tau\\
&=\begin{cases}\text{与}\tau_0\text{无关常数}, & n\neq 1\text{或}m\text{为偶},\\ -\dfrac{2a\pi}{\cosh(\omega K'(k))}[\delta/\delta_m(b)+\sin\omega\tau_0], & n=1,\end{cases}
\end{aligned}
\tag{7.3.23}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\delta_m(b)=c_m/(b-b_m),\quad c_m=a(\cosh(k\omega)K^1(k))^{-1},\\
&b_m=\frac{4}{\pi}+\frac{4\varepsilon}{3\pi}\frac{1}{k^3}[(2-k^2)E-2(1-k^2)K],\\
&k=k^l_m.
\end{aligned}
$$

同样可以得到如下结论:

结论 3 若 (b,δ) 满足

$$
S_m:\quad 0\leqslant\delta\leqslant|\delta_m(b)|,\tag{7.3.24}
$$

则当 ε 充分小时, 在 $(7.3.11)_{\varepsilon=0}$ 的周期为 mT 的 R 型周期轨道附近存在 $(7.3.11)_\varepsilon$ 的周期为 mT 的 R 型周期解, 反之, 若 $(b,\delta)\overline{\in S_m}$, 则 $(7.3.11)_\varepsilon$ 不存在这种周期为 mT 的 R 型周期解.

区域 S_m 的边界曲线为

$$
l^l_m:\delta(b_m-b)=c_m,\qquad l^r_m:\delta(b-b_m)=c_m,
$$

l^l_m 与 δ 轴的交点为 $(0,\delta_m),\delta_m=c_m/b_m$.

S^l_m 与 S_m 的图形见图 7.3.3.

利用有限覆盖定理, 可将结论 2 和结论 3 改写为

结论 4 设 Δ 为 S_m(或 S^l_m) 中的一有界闭区域, 则存在 ε_0, 使得当 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ 时, 对 $\forall(b,\delta)\in\Delta$, $(7.3.11)_{\varepsilon=0}$ 存在周期为 mT 的周期解 $\Gamma'(k'_m)$(或 $\Gamma^i(k^i_m)$), 即有周期 mT 的 R 型 (或 0 型) 的次谐解.

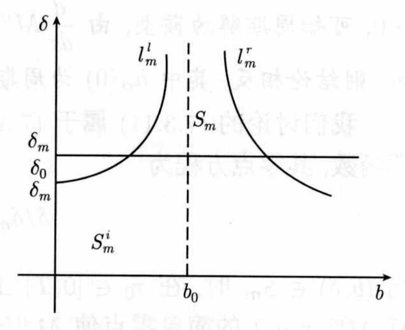


图 7.3.3 S^i_m 与 S_m 的分布图

7.3.3 次谐分枝轨道的稳定性

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x,y) + \varepsilon g_1(x,y,t,\mu) \\ \dot{y} = f_2(x,y) + \varepsilon g_2(x,y,t,\mu) \end{cases} \overset{\text{def}}{=} f(x,y) + \varepsilon g(x,y,t,\mu). \tag{7.3.25}$$

设 $(7.3.25)_{\varepsilon=0}$ 为 Hamilton 系统, $f \in C^r(\mathbf{R}^2), r \leqslant 2, f(x+2\pi, y) = f(x,y)$; 并且对 $(7.3.25)_\varepsilon$ 作如下假定:

(H_1) : 存在两条曲线 l_1 和 l_2, 它们可以表示为 $l_i = \{(x, z_i(x)) | x \in \mathbf{R}, z_i(x) \in C(\mathbf{R})\}, i = 1,2, z_1(x) < z_2(x), \forall x \in \mathbf{R}$, 使得 l_1 和 l_2 所夹区域 B 是 $(7.3.25)_{\varepsilon=0}$ 的不变区域, 且在其中 $f_1(x,y) \neq 0$;

(H_2) : B 中充满了一族 $(7.3.25)_{\varepsilon=0}$ 的轨线 $\Gamma_\alpha, \alpha \in \Lambda$, 其中 Λ 为 R 中一个区间. 设 Γ_α 可表示为 $\Gamma_\alpha = \{x, y_\alpha(x) | x \in \mathbf{R}, y_\alpha(x) \in C(\mathbf{R}), y_\alpha(-\pi) = y_\alpha(\pi)\}$, 且 Γ_α 随着 $\alpha \in \Lambda$ 连续变化;

(H_3) : 令 $h_\alpha = H(\Gamma_\alpha), h_\alpha$ 是 $\alpha \in \Lambda$ 的严格单调连续函数;

(H_4) : 记轨线 Γ_α 上一点从 $(-\pi, y_\alpha(-\pi))$ 到 $(\pi, y_{\alpha(\pi)})$ 所花时间为 T_α, 且有 $dT_\alpha / dh_\alpha \neq 0, \alpha \in \Lambda$;

(H_5) : $g \in C^r(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \times \Delta)(r \geqslant 2), \mu \in \Delta \subset R^K, \Delta$ 为 $\mathbf{R}^K$ 中以有界闭区域; $g(x,y,t+T,\mu) = g(x,y,t,\mu), \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, t \in \mathbf{R}, \mu \in \Delta; g(x+2\pi, y, t, \mu) = g(x,y,t,\mu), \forall (x,y,t,\mu) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \times \Delta$.

对 $(7.3.25)_{\varepsilon=0}$ 下述定理成立:

定理 7.3.1　如果 $\mathrm{trace} Dg < 0$, 则

(i) $(7.3.25)_\varepsilon$ 的所有周期解为鞍型或汇型;

(ii) 若 $M^{m/n}(\tau, \mu_0)$ 以 t_0 为简单零点, 则当 $\dfrac{dT_\alpha}{dh_\alpha}|_{h_\alpha(0)} < 0$ 时, 由 $\dfrac{d}{d\tau} M^{m/n}(t_0, \mu_0) > 0$, 可知周期解为鞍型, 由 $\dfrac{d}{d\tau} M^{m/n}(t_0, \mu_0) < 0$, 可知为汇型. 如果 $\dfrac{dT_\alpha}{dh_\alpha}|_{h_\alpha(0)} > 0$ 时, 则结论相反, 其中 $h_\alpha(0)$ 为周期为 $\dfrac{m}{n} T$ 次谐的 Hamilton 量.

我们讨论的 (7.3.11) 属于 $(7.3.25)_\varepsilon$ 型. 如果 $|\varepsilon| < 1$, 注意到 $M_l^m(\tau_0)$ 的 T 周期函数, 其零点方程为

$$\delta / \delta_m(b) + \sin \omega \tau_0 = 0. \tag{7.3.26}$$

当 $(b, \delta) \in S_m$ 时, 在 $\tau_0 \in [0, T]$ 上有两个不同简单零点, 从而在 $\tau_0 \in [0, T]$ 上总有 $M_l^m(\tau, \mu_0)$ 的简单零点使 $M_l^m(\tau, \mu_0)$ 在该点的导数为负, 又 $T_r(Dg) = -\varepsilon\delta(1 + \varepsilon \cos x) < 0$. 由定理 7.3.1 可得

结论 5　若 $(b, \delta) \in S_m$, 则 $(7.3.11)_\varepsilon$ 总存在稳定的周期为 mT 的 R 型周期解. 同样, 对 $M_l^m(\tau, \mu_0)$ 也有类似结论.

结论 6　若 $(b, \delta) \in S_m^i$, 则 $(7.3.11)_\varepsilon$ 总存在稳定的周期为 mT 的 O 型周期解.

7.3.4 平均值 $< y^l(\tau, k_m^l) >, < y^i(\tau, k_m^i) >$ 的性质

记号 $< \quad >$ 表示解在一个周期上的平均值.

对 $(7.3.25)_\varepsilon$ 作变换

$$\begin{cases} \varphi = x, \\ h = H(x,y). \end{cases} \tag{7.3.27}$$

该变换在 $(x,y) \in B$ 内可逆. 记逆变换为 $x = \varphi, y = \widetilde{H}(\varphi, h)$. 在此变换下 $(7.3.25)_\varepsilon$ 化为

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dot{x} = \theta(\varphi, h) + \varepsilon g_1(\varphi, \widetilde{H}(\varphi,h), t, \mu), \\ \dot{h} = \varepsilon f(\varphi, \widetilde{H}(\varphi,h)) \wedge g(\varphi, \widetilde{H}(\varphi,h), t, \mu). \end{cases} \tag{7.3.28}$$

为方便起见, 记

$$f(\varphi, \widetilde{H}(\varphi,h)) = f(\varphi, h),$$

$$g(\varphi, \widetilde{H}(\varphi,h), t, \mu) = g(\varphi, h, t, \mu).$$

(7.3.28) 可化为

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \theta(\varphi, h) + \varepsilon g_1(\varphi, h, t, \mu), \\ \dot{h} = \varepsilon f(\varphi, h) \wedge g(\varphi, h, t, \mu). \end{cases} \tag{7.3.29}$$

考虑 B 中次谐轨道, 即存在 $\alpha_0 \in \Lambda^\circ$ (Λ 的内部), 使得 $T_{\alpha_0} = \dfrac{m}{n}T, m, n \in N$, 且 $(m,n) = 1, H(\Gamma_{\alpha_0}) = h_{\alpha_0}$, 取一闭区域 B_1, 使得 $B_0 \cap \Gamma_{\alpha_0} \in B_1 \subset B_0$. 任取 $r \in [0,T]$ 作为初始时刻, 可设 $(7.3.29)_{\varepsilon=0}$ 的 Γ_{α_0} 的参数方程为

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_{\alpha_0}(t-\tau), \\ h = h_{\alpha_0}(t-\tau), \end{cases} \tag{7.3.30}$$

使得 $(\varphi_{\alpha_0}(0), h_{\alpha_0}(0)) \in B_1$. 设 $(\varphi_\varepsilon(t,\varphi,h,\tau,\mu), h_\varepsilon(t,\varphi,h,\tau,\mu))$ 和 $(\varphi_0(t,\varphi,h,\tau,\mu), h_0(t,\varphi,h,\tau,\mu))$ 分别表示初始时刻取在 $t=\tau$, 初始位置为 (φ,h) 的方程 $(7.3.29)_\varepsilon$ 和 $(7.3.25)_{\varepsilon=0}$ 的解. 定义映射

$$P_\varepsilon^\tau: \quad (\varphi, h) \to (\varphi_\varepsilon(\tau+T, \varphi, h, \tau, \mu), h_\varepsilon(\tau+T, \varphi, h, \tau, \mu)),$$

这是定义在 B_1 上的时间 T 的 Poincaré 映射.

定理 7.3.2 系统 $(7.3.25)_{\varepsilon=0}$ 有如下性质: 设 $\mu_0 \in \Lambda, M^{m/n}(\tau, \mu_0)$ 以 t_0 为简单零点, 则存在 $\varepsilon_0 > 0, \sigma_0 > 0$, 使得当 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, |\mu - \mu_0| \leqslant \sigma_0$ 时, 在 $(\varphi^*(\varepsilon,\mu), h^*(\varepsilon,\mu))$ 有

$$(P_\varepsilon^{t_0})^m \begin{pmatrix} \varphi^*(\varepsilon,\mu)) \\ h^*(\varepsilon,\mu)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^*(\varepsilon,\mu) + 2n\pi) \\ h^*(\varepsilon,\mu)) \end{pmatrix}. \tag{7.3.31}$$

若 $\forall \tau \in [0,T], M^{m/n}(\tau, \mu_0) \neq 0$, 则满足上式的点不存在.

把定理 7.3.2 用到 $(7.3.11)_\varepsilon$, 可得到如下结论:

结论 7　(a) 设 $\Delta \subset S_m$ 为一有界闭区域, 则当 ε 充分小时, $\forall (b,\delta) \in \Delta$, 用 (x_m^l, y_m^l) 记上述 $(7.3.11)_\varepsilon$ 存在的周期为 mT 的稳定 R 型次谐波解, 则有

$$< y_m^l > = < y^l(\tau, k_n^l) > = \frac{2\pi}{mT} = \frac{\omega}{m}. \tag{7.3.32}$$

(b) 类似地, 对于 $(7.3.11)_\varepsilon$ 式的周期为 mT 的稳定的 O 型次谐波解, 有

$$< y_m^i > = < y^i(\tau, k_n^i) > = 0. \tag{7.3.33}$$

证　由定理 7.3.2 可知

$$x_m^l(mT) - x_m^l(0) = 2\pi = x^l(mT, k_m^l) - x^l(0, k_m^l).$$

于是

$$\begin{aligned} < y_m^l > &= \frac{1}{mT}\int_0^{mT} y_m^l d\tau = \frac{1}{mT}[x_m^l(mT) - x_m^l(0)] \\ &= \frac{2\pi}{mT} = \frac{\omega}{m} = < y^l(\tau, k_m^l) > . \end{aligned}$$

类似可证得

$$< y_m^i > = < y^i(\tau, k_n^i) > = 0.$$

□

在讨论 Josephson 结的 I~V 特性曲线前, 我们再给出一个引理.

引理 7.3.1　当 $|\varepsilon| < 1$ 时,

(a) b_m 严格单调下降, 且当 $m \to \infty$ 时, 趋于 b_0;

(b) c_m 严格单调下降, 且当 $m \to \infty$ 时, 趋于 c_0;

(c) 存在 $m_1 > 0$, 当 $m \geqslant m_1$ 时, δ_m^i 严格单调下降, 且当 $m \to \infty$ 时, 趋于 δ_0;

(d) 存在 $m_2 > 0$, 当 $m \geqslant m_2$ 时, δ_m 严格单调下降, 且当 $m \to \infty$ 时, 趋于 δ_0.

证　(a) 令 $f(k) = \frac{4}{\pi}\frac{E}{k} + \frac{4\varepsilon}{3\pi}\frac{1}{k^3}[(2-k^2)E - 2(1-k^2)K]$,　$k \in (0,1)$, 则 $b_m = f(k_m^l)$, 经计算

$$f'(k) = -\left[\frac{4}{\pi}(1-\varepsilon)\frac{K}{k^2} + \frac{8\varepsilon}{\pi}\frac{E - k'^2 K}{k^2}\right] < 0. \tag{7.3.34}$$

故当 $|\varepsilon| < 1$ 时, $k \in (0,1), f(k)$ 单调下降. 又由于 $kK(k)$ 是 $k \in (0,1)$ 的单调上升函数, 从而 k_m^l 是 $m \in N$ 的单调上升序列, 故 b_m 单调下降, 且当 $m \to \infty$ 时, $b_m \to b_0$.

结论 (b)~(c) 可类似 (a) 证明.

□

利用引理 7.3.1 和上面计算结果, 对任意固定的 ω, ε, a 以及给定的 ε, 在 (b,δ) 平面上可得到图 7.3.4. 图 7.3.5 是利用 (ρ,β) 和 (b,δ) 的关系式 (7.3.9) 由图 7.3.4 复制而成的. 图 7.3.4 和图 7.3.5 等价, 故可以通过对图 7.3.4 的讨论来了解原系统 $(7.3.11)_\varepsilon$ 的参数对 Josephson 结的 I~V 特性曲线的影响.

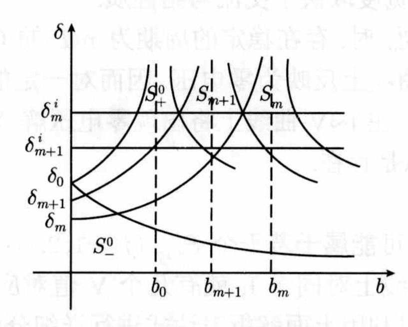


图 7.3.4 (b,δ) 平面上各曲线间的关系

图 7.3.5 (ρ,β) 平面上各曲线间的关系

1) 混沌性质

我们知道, 马蹄的出现可能意味着混沌存在. 由结论 1 与图 7.3.4 知, 当 $\delta < \delta_0$ 时, I~V 曲线可能处于混沌状态.

(i) 固定 δ, 只要 $b < \dfrac{c_0}{\delta} - b_0$, 混沌可能出现, 即对一定的结 ($c, k$ 固定), 变化交直流, 使其满足关系 $b < \dfrac{c_0}{\delta} - b_0$, 就可能在 I~V 曲线上呈现混沌区域.

(ii) 固定 b, 只要 $\delta < c_0/(b+b_0)$, 有可能出现混沌. 即当直流固定时, 可通过改变结性质以及交流, 使 I~V 曲线出现混沌区域.

(iii) 另外, 对于 $\delta > \delta_0$, 且 δ 充分大, 在 $b \to b_0 + 0$ 区域内, 共存的次谐越来越多, 而每个次谐波解的稳定区域缩小, 即系统对初值及参数值非常敏感. 因而在这个区域, 系统也可能处于混沌状态. 即当结的 k^2c 值比较小时, 对于给定系统, 直流接近于由 $\cos\varphi$ 项系数决定的某一值时, 系统也可能出现混沌状态.

2) 台阶性质

Josephson 结的 I~V 曲线中的台阶相当于上面讨论中的稳定 R 型次谐轨道. 这样我们可以得到如下结果:

(i) 由结论 7, 对一切 $(b,\delta) \in S_m, < y_m^l >= \dfrac{\omega}{m}$, 则直流电压

$$
\begin{aligned}
V &= (\overline{h}/2e) < \frac{d\varphi}{dt} > = \left(\frac{\overline{h}}{2e}\right)\sqrt{2eI_0/\overline{h}_c} < \frac{d\varphi}{d\tau} > \\
&= (\overline{h}/2e)\sqrt{2eI_0/\overline{h}_c} \cdot \frac{\omega}{m} = \left(\frac{\overline{h}}{2e}\right)\frac{\Omega}{m}.
\end{aligned} \tag{7.3.35}
$$

即 I~V 曲线中台阶的为位置, 仅与外加交流频率有关, 与结的性质、直流大小、交

流的幅值都无关, 这与实验结果一致.

(ii) 由结论 4 和 5 知, 当 $(b,\delta)\in S_m$ 时, 存在稳定的周期为 mT 的 R 型次谐解. 对于一定的 δ, 此解的存在范围为 $\left(b_m-\dfrac{C_m}{8},b_m+\dfrac{C_m}{8}\right)$, 即在直流的一定范围内, I~V 曲线将出现 m 阶次谐台阶, 它的宽度取决于交流与结性质.

(iii) 由结论 2 和结论 6 知, 当 $(b,\delta)\in S_m^i$ 时, 存在稳定的周期为 mT 的 O 型次谐解. 从结论 7 知, O 型次谐解在 I~V 曲线上反映为零电压. 因而对一定的结, 只要 k 与 c 满足 $\delta<\delta_m^i$ (其中 m 为奇整数), 在 I~V 曲线上将出现零电压解. 对于直流比较小的情况, R_0^2c 充分大, 则零电压总是存在.

3) 滞后效应

由图 7.3.4 可清楚看出, 同一个 (b,δ) 有可能属于若干个 S_{mj}^i $(j=1,2,\cdots,n_i)$ 和若干 S_{mj} $(j=1,2,\cdots,n_i)$. 即在 I~V 曲线上对同一 I, 就有几个 V 值对应, 这就导致滞后效应产生. 有关参数的影响, 可以利用上面解析表达式进行详细分析.

总起来说, Josephson 结在外加稳恒电流比较小的条件下, 由于交流小扰动存在, 其 I~V 曲线将出现混沌、次谐台阶、滞后等一系列复杂现象. 这些现象在 I~V 曲线上分布将依赖于系统的各种参数, 它们之间的复杂解析表达式已经在上面详细导出, 这样我们可以给出 I~V 曲线的大致分布情况. 图 7.3.6 是这种分布的示意图, 它反映 I~V 特性曲线的定性性质.

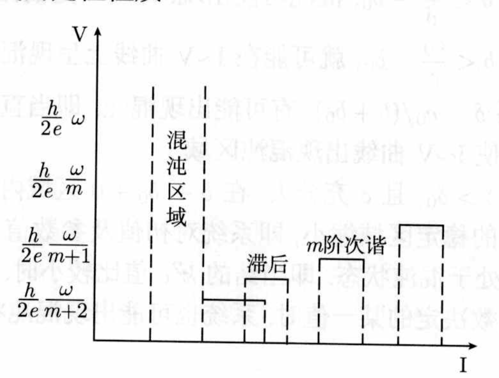


图 7.3.6　Josephson 结的 I~V 曲线示意图

7.4　环面上的 Van der Pol 方程的次谐分枝与马蹄

自 Poincaré 的开创性工作以来, 关于环面上无奇点的连续流的研究已有很多工作. 近年来, 已出现许多研究二维流形上既有奇点, 又有微分方程的动力系统的工作. 而环面上的 Van der Pol 方程是二维环面上定义的微分方程的一个典型例子, 本节拟用 Mel′nikov 方法来讨论环面 Van der Pol 方程之扰动方程的次谐分枝及分

枝到马蹄的途径.

考虑环面 Van der Pol 方程之扰动系统:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sin y,\\ \frac{dy}{dt} &= -\sin x + \varepsilon(\lambda_1 \sin y + \lambda_2 \cos \omega t).\end{aligned} \tag{7.4.1}$$

利用定性方法讨论可知, $(7.4.1)_{\varepsilon=0}$ 在环面的展开正方形 $S:[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ 内存在一系围绕 (0,0) 的闭轨族, 若把 S 的两边分别粘接起来, 则绕 (π,π) 还有一族闭轨道. $(7.4.1)_{\varepsilon=0}$ 有首次积分

$$\cos x + \cos y = h. \tag{7.4.2}$$

当 $h = 2$ 时, (7.4.2) 对应于原点 (0,0). 当 $h \in (0,2)$ 时, (7.4.2) 为绕 (0,0) 的闭轨族 Γ_1^h. 当 $h \in (-2,0)$ 时, (7.4.2) 为绕 (π,π) 的闭轨族 Γ_2^h. 当 $h=0$ 时, (7.4.2) 对应于连接鞍点 $A(\pi,0),B(0,\pi),C(-\pi,0),D(0,-\pi)$ 之间的线段构成的异宿轨线. 当 $h=-2$ 时, (7.4.2) 对应于点 (π,π)(见图 7.4.1).

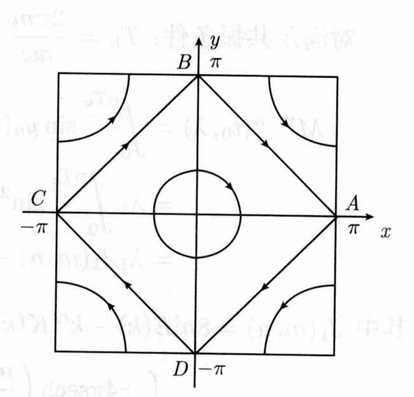


图 7.4.1 (7.4.1) 的未扰动系统的相图

为计算 Mel′nikov 函数, 先求以上几族轨线的参数方程. 由于 $(7.4.1)_{\varepsilon=0}$ 的向量场旋转 $\pi/2$ 角度不变, 故为求异宿轨道参数方程, 只需求出线段 BC 的参数方程即可. 在 (7.4.2) 中令 $h=0$ 解出 $\sin y$ 代入 $(7.4.1)_{\varepsilon=0}$ 可求得 BC 的参数方程

$$\Gamma_0:\begin{cases} x_0(t) = -2\arctan(e^{-t}),\\ y_0(t) = \pi - 2\arctan(e^{-t}).\end{cases} \tag{7.4.3}$$

当 $h \in (0,2)$ 时通过积分同样可求得 Γ_1^h 的参数方程为

$$\Gamma_1^h:\begin{cases} x_h(t) = 2\arctan(b\mathrm{cn}(t,k)),\\ y_h(t) = -\arcsin\left(\dfrac{2b\mathrm{sn}(t,k)\mathrm{dn}(t,k)}{1+b^2\mathrm{cn}^2(t,k)}\right),\end{cases} \tag{7.4.4}$$

其中 $b=\sqrt{\dfrac{2-h}{h}}$, $\mathrm{cn}(t,k),\mathrm{dn}(t,k),\mathrm{sn}(t,k)$ 为模为 $k=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-h^2}$ 的椭圆函数. 而当 $-2<h<0$ 时, 闭轨道族 Γ_0^h 的参数方程为

$$\Gamma_2^h:\begin{cases} x_h(t) = 2\arctan\left(\dfrac{a'}{\mathrm{cn}(t,k)}\right),\\ y_h(t) = \arcsin\left(\dfrac{2a'\mathrm{sn}(t,k)\mathrm{dn}(t,k)}{a'^2+\mathrm{cn}^2(t,k)}\right),\end{cases} \tag{7.4.5}$$

其中椭圆函数的模 k 同上, $a'=\sqrt{\dfrac{-h}{2+h}}$.

显然, 闭轨道 Γ_1^h,Γ_2^h 的周期为 $T_k=4K(k)$, 它们关于 k 严格单调.

关于异宿轨道 BC, 计算异宿轨道的 Mel'nikov 函数得

$$\begin{aligned}M^{\infty}(t_0,\lambda)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin y_0(t)[\lambda_1\sin y_0(t)+\lambda_2\cos\omega(t+t_0)]dt\\&=\lambda_1\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^2 y_0(t)dt+\lambda_2\cos\omega t_0\int_{-\infty}^{+\infty}\sin y_0(t)\cos\omega t dt\\&=2\lambda_1+\lambda_2\pi\text{sech}\left(\frac{\omega\pi}{2}\right)\cos\omega t_0.\end{aligned}\tag{7.4.6}$$

对满足共振条件: $T_K=\dfrac{2\pi m}{n\omega}$ 的轨道 (7.4.4) 计算次谐波 Mel'nikov 函数得

$$\begin{aligned}M^{m/n}(t_0,\lambda)&=\int_0^{nT_k}\sin y_h(t)[\lambda_1\sin y_h(t)+\lambda_2\cos\omega(t+t_0)]dt\\&=\lambda_1\int_0^{nT_k}\sin^2 y_h(t)dt-\lambda_2\sin\omega t_0\int_0^{nT_k}\sin y_h(t)\sin\omega t dt\\&=\lambda_1 J_1(m,n)-\lambda_2 J_2(m,n)\sin\omega t_0,\end{aligned}\tag{7.4.7}$$

其中 $J_1(m,n)=8n[E(k)-k'^2K(k)]$,

$$J_2(m,n)=\begin{cases}\pm4\pi\text{sech}\left(\dfrac{m\pi K'}{2K}\right)\sin\dfrac{m\pi}{4}, & m\text{ 为奇数 } n=1,\\ 0, & n\neq1\text{ 或 } m\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

而 “+” 对应于 Γ_1^h $(h\in(0,2))$, “-” 对应 Γ_2^h $(h\in(-2,0))$, $E(k),K(k)$ 为第一、二类完全椭圆积分.

由以上计算可知, 方程 $(7.4.1)_\varepsilon$ 的混沌门槛值为

$$R_\infty(\omega)=\frac{2}{\pi}\cosh\left(\frac{\omega\pi}{2}\right).$$

当且仅当 λ_1,λ_2 满足不等式 $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|>R_\infty(\omega)$ 时, 方程 $(7.4.1)_\varepsilon$ 存在横截异宿环, 故存在横截同宿点, 应用 Smale-Birkhoff 定理知 $(7.4.1)_\varepsilon$ 存在马蹄, 即出现混沌解.

方程 $(7.4.1)_\varepsilon$ 出现 (奇数) 阶次谐分枝的门槛值为

$$R_m(\omega)=\left|\frac{J_1(m,n)}{J_2(m,n)}\right|=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cosh(\omega K')[E(k)-k'^2K(k)].$$

当且仅当 λ_1,λ_2 满足 $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|>R_m(\omega)$ 时, $(7.4.1)_\varepsilon$ 出现 m 阶次谐分枝.

下面看分枝到 Smale 马蹄的方式.

对于固定的 $\omega > 0$, 注意到

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dk}\{[E(k)-k'^2K(k)]\cosh(\omega K'(k))\}\\&=kK(k)\cosh(\omega K'(k))-\frac{\omega}{kk'^2}[E'(k)-k'^2K'(k)][E(k)-k'^2K(k)].\end{aligned}$$

令 $m\to\infty$, 即 $k\to 1$ 时,

$$\begin{aligned}&kK(k)\cosh(\omega K'(k))\to+\infty,\quad E(k)-k'^2K(k)\to 1,\\&\frac{E'(k)-k^2K'(k)}{k'^2}\to\frac{\pi}{4},\quad K'(k)\to\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

故当 k 充分接近 1 即 m 充分大时, $\frac{d}{dk}R_m(\omega)>0$. 即 $R_m(\omega)$ 对任意固定的 ω 随 m 单增, 且

$$\lim_{m\to\infty}R_m(\omega)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cosh\left(\frac{\omega\pi}{2}\right).$$

从而当 m 充分大时, 有 $R_m(\omega)>R_\infty(\omega)=\frac{2}{\pi}\cosh\frac{\omega\pi}{2}$.

又当 m 固定时, 令 $k\to 0$, 即 $\omega\to m$(奇数) 时,

$$\lim_{\substack{\omega\to m\\(k\to 0)}}R_m(\omega)=\begin{cases}\infty, & \text{当 } m>2 \text{ 为奇数时},\\ 0, & \text{当 } m=1 \text{ 时}.\end{cases}$$

并且

$$\lim_{\substack{\omega\to m\\(k\to 0)}}R_\infty(\omega)=\frac{2}{\pi}\cosh\left(\frac{\omega\pi}{2}\right).$$

当 m 固定时, 令 $k\to 1$, 即 $\omega\to 0$,

$$\lim_{\substack{\omega\to m\\(k\to 0)}}R_m(\omega)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi},\quad \lim_{\omega\to 0}R_\infty(\omega)=\frac{2}{\pi}.$$

由以上几个极限式可以看出, 当 $m>1$ 时, 所有次谐分枝曲线 $R_m(\omega)$ 都从高于 $R_\infty(\omega)$. 并且随着 ω 由零增加而发生变化, 至少有一条分枝曲线 (如 $R_1(\omega)$) 与 $R_\infty(\omega)$ 相交 (见图 7.4.2).

综合上面的分析我们得到下述结论：对任意固定的 $\omega>0$, 方程 $(7.4.1)_\varepsilon$ 至多经过有限次奇数阶次谐分枝而分枝到马蹄. 而且还存在 $\omega_0>0$, 使当 $0<\omega<\omega_0$ 时, 只要 $(7.4.1)_\varepsilon$ 出现谐波则必有混沌解 (即经一次谐波分枝进入混沌).

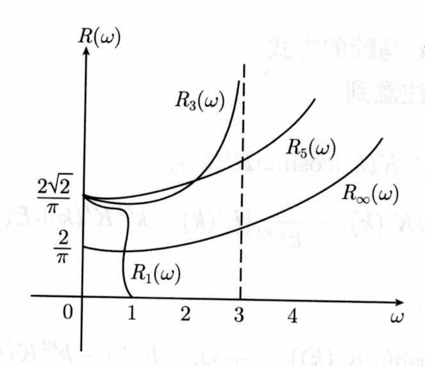


图 7.4.2　(7.4.1) 的分枝曲线图

事实上, 由前面的讨论, 对任意固定的 $\omega > 0$, 当 m 充分大时有

$$R_m(\omega) > R_\infty(\omega).$$

故当 $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| > R_m(\omega)$ 时, 必有 $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| > R_\infty(\omega)$. 从而结论的前半部得证.

因为

$$\lim_{\omega\to 0} R_1(\omega) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} > \lim_{\omega\to 0} R_\infty(\omega) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{\omega\to 1} R_1(\omega) = 0 < \lim_{\omega\to 1} R_\infty(\omega) = \frac{\pi}{2}\cosh\frac{\pi}{2}.$$

故存在 $\omega_0 > 0$, 使当 $0 < \omega < \omega_0$ 时, $R_1(\omega) > r_\infty(\omega)$, 故当 $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| > R_1(\omega)$ 时, 必有 $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| > R_\infty(\omega)$. 从而得到结论的下半部.

注意 $\lim\limits_{m\to\infty} R_m(\omega) \neq R_\infty(\omega)$, 这与关于同宿轨道的有关结论不同.

7.5　生物系统的分枝与混沌性质

Mel′nikov 方法可以用来讨论生物学上一些现象, 从而说明生物系统具有某些丰富的动态复杂性.

7.5.1　周期时间制约捕食者 一食饵系统

在生态数学模型中, 考虑生态系统的周期干扰和生态参数的周期性变化是重要而合理的. 因为生态系统及其参数受季节变化、食物增减、播种与收获季节食物链的改变、动物配偶的习惯等因素影响而发生周期性变化. 为了正确地模拟这种变化, 需要在系统中引入周期项.

考虑 Ayala 曾讨论过的捕食者—食饵系统

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1(r_1 - a_1x_1 - a_{12}x_2 - b_{12}x_1x_2), \\ \dot{x_2} = x_2(-r_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + c_{12}x_1x_2), \end{cases} \tag{7.5.1}$$

其中 r_i, a_{ij} $(i,j=1,2)$ 是正常数, b_{12}, c_{12} 是任意常数. 为简化, 取 $b_{12}=c_{12}=0$, 并设两个种群的内禀增长率为

$$\begin{cases} r_1 = f + \varepsilon(\lambda_1 + \lambda_2\cos\omega t), \\ r_2 = f + \varepsilon(\widetilde{\lambda_1} + \lambda_2\cos\omega t). \end{cases} \tag{7.5.2}$$

并假定 (7.5.1) 还受周期激励 $\varepsilon\lambda_3\cos\omega t$ 的作用, a_{ij} 构成一个可积系统, 即讨论系统

$$\begin{cases} \dot{x} = x(f - ax - 2by) + \varepsilon[\lambda_1 x + (\lambda_3 + \lambda_2 x)\cos\omega t], \\ \dot{y} = y(-f + 2ax + by) + \varepsilon[-\widetilde{\lambda_1}x + (\lambda_3 - \lambda_2 y)\cos\omega t]. \end{cases} \tag{7.5.3}$$

按生态模型的要求, 只要考虑 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 情况. 容易看出 $(7.5.3)_{\varepsilon=0}$ 有四个奇点: $A\left(\dfrac{f}{a},0\right), B\left(0,\dfrac{f}{b}\right)$ 和 $O(0,0)$ 是鞍点. $C\left(\dfrac{f}{3a},\dfrac{f}{3b}\right)$ 是中心. 直线 $x=0, y=0, ax+by=f$ 是连结鞍点的异宿轨道, 形成一个异宿三环. 在异宿环内存在一族包围 C 的闭轨道 (图 7.5.1).

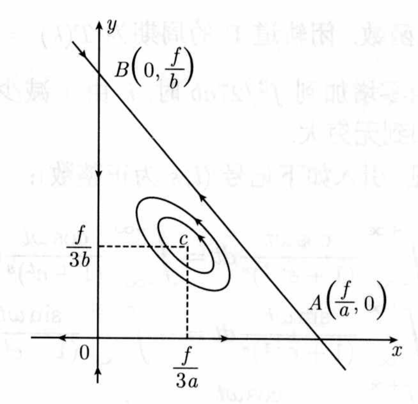


图 7.5.1 未扰动系统 $(7.5.3)_{\varepsilon=0}$ 的相图

$(7.5.3)_{\varepsilon=0}$ 是 Hamilton 系统, 其 Hamilton 量为

$$H(x,y) = xy(f - ax - by) = h. \tag{7.5.4}$$

当 $h=0$ 时, 三条异宿轨道所对应的参数方程分别是

$$OA: \begin{cases} x(t) = \dfrac{f}{a(1+e^{-t})}, \\ y(t) = 0; \end{cases} \tag{7.5.5}$$

$$OB:\begin{cases}x(t)=0,\\ y(t)=\dfrac{f}{b(1+e^t)};\end{cases}\tag{7.5.6}$$

$$AB:\begin{cases}x(t)=\dfrac{f}{a(1+e^t)},\\ y(t)=\dfrac{f}{b(1+e^{-t})}.\end{cases}\tag{7.5.7}$$

当 $h\in(0,f^3/27ab)$ 时, 对应于闭轨道族 $\{\Gamma\}$ 其参数方程为

$$\begin{aligned}x_k(t)&=\frac{\gamma}{1-A^2\mathrm{sn}^2(\Omega t,k)},\\ y_k(t)&=\frac{1}{2b}\left(f-\frac{ar}{1-A^2\mathrm{sn}^2(\Omega,k)t}-\frac{2A^2\Omega\mathrm{sn}(\Omega t,k)\mathrm{dn}(\Omega t,k)}{1-A^2\mathrm{sn}^2(\Omega t,k)}\right),\end{aligned}\tag{7.5.8}$$

其中 $A=\dfrac{\beta-\gamma}{\beta},\Omega=\sqrt{(\alpha-\gamma)\beta\alpha/2},\alpha>\beta>\gamma$ 是三次代数方程

$$G(x)=x^3-\frac{3f}{a}x^2+\frac{f^2}{a^2}x-\frac{4bh}{a^2}\tag{7.5.9}$$

的实根, 且 $\alpha>\dfrac{f}{a}>\beta>\dfrac{f}{3a}>\gamma>0;\mathrm{sn}(\Omega t,k),\mathrm{cn}(\Omega t,k),\mathrm{dn}(\Omega t,k)$ 是模 $k^2=\dfrac{(\beta-\gamma)\alpha}{(\alpha-\gamma)\beta}$ 的 Jacobi 椭圆函数. 闭轨道 Γ 的周期为 $T(k)=2K(k)/\Omega,K(k)$ 是第一类完全椭圆积分, 当 h 由零增加到 $f^3/27ab$ 时, k 由 1 减少到 0. 可以证明随着 k 的增加, $T(k)$ 单调地增加到无穷大.

为后面书写简单起见, 引入如下记号 (l,s 为正整数):

$$\begin{aligned}I_s&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{(1+e^{-t})^s}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{(1+e^t)^s}dt,\\ J_s&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{(1+e^{-t})^s}dt=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{(1+e^t)^s}dt,\\ I_{sl}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{(1+e^{-t})^s(1+e^t)^l}dt,\\ J_{sl}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{(1+e^{-t})^s(1+e^t)^l}dt.\end{aligned}\tag{7.5.10}$$

显然 $I_{sl}=I_{ls},J_{sl}=-J_{ls},J_{ll}=0$. 用留数计算法可得

$$\begin{aligned}&I_1=0,\quad I_2=\frac{\omega\pi}{\sinh\pi\omega},\quad J_1=-\frac{\pi}{\sinh\pi\omega},\quad J_2=-I_{12}=-\frac{\pi}{2\sinh\pi\omega},\\ &J_{12}=-J_{21}=\frac{\pi\omega^2}{2\sinh\pi\omega},\quad I_{11}=-\frac{\omega\pi}{\sinh\pi\omega}=-I_2.\end{aligned}\tag{7.5.11}$$

并且容易求得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(1+e^t)^2(1+e^{-t})}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(1+e^{-t})^2(1+e^t)}=\frac{1}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(1+e^{-t})^2}=1. \tag{7.5.12}$$

(1) $\lambda_1=\widetilde{\lambda_1}$ 情形

$$\begin{aligned}M_{OA}(t_0,\lambda_3,\omega)&=\lambda_3\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)[f-ax(t)]\cos\omega(t+t_0)dt\\&=\frac{\lambda_3f^2}{a}[(I_1-I_2)\cos\omega t_0-(J_1-J_2)\sin\omega t_0]\\&=\frac{\lambda_3f^2\pi}{2a\sinh\pi\omega}(\sin\omega t_0-2\omega\cos\omega t_0).\end{aligned}\tag{7.5.13}$$

计算上式时的 $x(t)$, 由 (7.5.5) 得到

$$\begin{aligned}M_{OB}(t_0,\lambda_3,\omega)&=\lambda_3\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)[f-by(t)]\cos\omega(t+t_0)dt\\&=\frac{\lambda_3f^2}{b}[(I_1-I_2)\cos\omega t_0-(J_1-J_2)\sin\omega t_0]\\&=-\frac{\lambda_3f^2}{2b\text{sh}\pi\omega}[\sin\omega t_0+2\omega\cos\omega t_0].\end{aligned}\tag{7.5.14}$$

计算上式时的 $y(t)$ 由 (7.5.6) 得到. 又由 (7.5.7) 得

$$\begin{aligned}M_{AB}(t_0,\lambda_3,\omega)=&\int_{-\infty}^{+\infty}[y(t)(-f+2ax(t)+by(t))(\lambda_1x(t)+(\lambda_3+\lambda_2x(t))\\&\cdot\cos\omega(t+t_0)-x(t)(f-ax(t)-2by(t)\\&\cdot(-\lambda_1y(t)+(\lambda_3-\lambda_2y(t))\cos\omega(t+t_0)]dt\\=&\frac{f^2}{ab}\{\lambda_3[2(a+b)I_{11}+(a+b)I_2]\cos\omega t_0\\&-[\lambda_3(a+b)(J_2-J_1)+2\lambda_2fJ_{12}]\sin\omega t_0\}\\=&-\frac{\pi f^2}{2ab\sinh\pi\omega}\{2\lambda_3(a+b)\omega\cos\omega t_0\\&+[\lambda_3(a-b)+2\lambda_2f\omega^2]\sin\omega t_0\}.\end{aligned}\tag{7.5.15}$$

从 (7.5.13),(7.5.14),(7.5.15) 可知, 只要 $f\neq0,\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq0,M_{OA},M_{OB}$ 和 M_{AB} 关于 t_0 是振动的, 故系统存在马蹄, 蕴含了复杂的动力学行为.

下面计算满足共振条件 $T=\dfrac{2\pi m}{\omega}=\dfrac{2K(k)}{\Omega}$ 的次谐 Mel′nikov 函数

$$\begin{aligned}M^{m/1}(t_0,\lambda_3,\omega)=&\int_{-T/2}^{T/2}\{y_k(t)[-f+2ax_k(t)+by_k(t)]\cdot[\lambda_1x_k(t)\\&+(\lambda_3+\lambda_2x_k(t))]\cos\omega(t+t_0)-x_k(t)[f-ax_k(t)-2by_k(t)]\\&\cdot[-\lambda_1y_k(t)+(\lambda_3-\lambda_2y_k(t))]\cos\omega(t+t_0)\}dt.\end{aligned}\tag{7.5.16}$$

注意到

$$\begin{aligned}ax_k-by_k&=\frac{\dot{x}_k(t)}{x_k}+\frac{\dot{y}_k(t)}{y_k},\\ax_k^2y_k-bx_ky_k^2&=x_ky_k\left(\frac{\dot{x}_k}{x_k}+\frac{\dot{y}_k}{y_k}\right)=y_k\dot{x}_k+x_k\dot{y}_k=d(x_ky_k).\end{aligned}$$

可把 (7.5.16) 化为

$$\begin{aligned}M^{m/l}(t_0,\lambda_3,\omega)=&\lambda_1\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[ax_k^2(t)y_k(t)-bx_k(t)y_k^2(t)]dt\\&+\lambda_3\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\{-f[x_k(t)+y_k(t)]+2(a+b)x_k(t)y_k(t)\\&+ax_k^2(t)+by_k^2(t)\}\cos\omega(t+t_0)dt\\&+\lambda_2\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[ax_k^2(t)y_k(t)-bx_k(t)y_k^2(t)]\cos\omega(t+t_0)dt.\end{aligned}\tag{7.5.17}$$

(7.5.17) 右边第一个积分为零. 第三个积分可用分部积分法化为

$$\lambda_2\omega\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x_k(t)y_k(t)\sin\omega(t+t_0)dt.$$

由于 $x_k(t)$ 是 t 的偶函数,

$$y_k(t)=\frac{1}{2b}[f-ax_k(t)-\dot{x}_k(t)/x_k(t)]x_k(t)y_k(t)=\frac{1}{2b}[fx_k(t)-ax_k^2(t)-\dot{x}_k(t)].$$

由分部积分得

$$\int_{-T/2}^{T/2}x_k\sin\omega tdt=-\omega\int_{-T/2}^{T/2}x_k(t)\cos\omega tdt.$$

再引入可计算积分

$$I_l^m=\int_{-T/2}^{T/2}x_k^l\cos\omega tdt,$$

$$J_l^m = \int_{-T/2}^{T/2} y_k^l \cos\omega t dt,$$

$$\widetilde{J}_l^m = \int_{-T/2}^{T/2} y_k^l \sin\omega t dt. \tag{7.5.18}$$

于是

$$\int_{-T/2}^{T/2} x_k(t) y_k(t) \cos\omega t dt = \frac{1}{2b}(f I_1^m - a I_2^m),$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} x_k(t) y_k(t) \sin\omega t dt = \frac{\omega}{2b} I_1^m.$$

利用这些记号, 可把 (7.5.17) 化为

$$\begin{aligned} M^{m/1}(t_0,\lambda,\omega) =& \left[\frac{1}{2a}(2\lambda_3 af - \lambda_2\omega)I_1^m - \lambda_3 f J_1^m - \frac{\lambda_3 a^2}{b} I_2^m + \lambda_3 b J_2^m\right] \cdot \cos\omega t_0 \\ & - \left[- \frac{1}{2b}(2\lambda_3(a+b)\omega + \lambda_2 f) I_1^m + \lambda_3 b \widetilde{J}_2^m \right. \\ & \left. - \lambda_3 f \widetilde{J}_1^m + \frac{1}{2b}\lambda_2 a I_2^m \right] \sin\omega t_0. \end{aligned} \tag{7.5.19}$$

只要 (7.5.19) 的方括号内的数不等于零, $M^{m/1}$ 关于 t_0 是振动的, 这就蕴含着任意 m 阶次谐周期解存在, 这说明生物系统存在周期的动力学行为.

(2) $\lambda_1 \neq \widetilde{\lambda_1}$ 情况

此时, 很明显 $\widetilde{M}_{OA}$, $\widetilde{M}_{OB}$ 与 (7.5.13), (7.5.14) 一致, 沿 AB 的 Mel'nikov 函数为

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{AB}(t_0,\lambda,\omega) =& (2\lambda_1 - \widetilde{\lambda_1})a \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)y(t)dt + (\widetilde{\lambda_1} - \lambda) f \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)dt \\ & - (\lambda_1 - 2\widetilde{\lambda_1}) b \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^2(t) dt + M_{AB}(t_0,\lambda,\omega) \\ =& \frac{f^8}{2ab}[(\lambda - \widetilde{\lambda_1}) + M_{AB}(t_0,\lambda,\omega) \\ =& \frac{f^8}{2ab}\left[(\lambda - \widetilde{\lambda_1}) - \frac{\pi}{\sinh \pi\omega}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(\omega t_0 - \varphi)\right], \end{aligned}$$

其中 M_{AB} 由 (7.5.15) 确定, $x(t), y(t)$ 由 (7.5.7) 定义, $\alpha = 2\lambda_3(a+b)\omega, \beta = \lambda_3(a-b) + 2\lambda_2 f\omega^2, \cos\varphi = \alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. 显然, 当 $\lambda_2 \cdot \lambda_3 \neq 0$ 且

$$\frac{|\lambda_1 - \widetilde{\lambda_1}|}{\pi\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} < 1 \tag{7.5.20}$$

时, $\widetilde{M}_{AB}$ 存在简单零点, 从而 $(7.5.3)_\varepsilon$ 存在横截 3 环.

此时满足共振条件的次谐 Mel′nikov 函数为

$$\widetilde{M}^{m/1}(t_0,\lambda,\omega)=(2\lambda_1-\widetilde{\lambda_1})a\int_{-T/2}^{T/2}x_k^2(t)y_k(t)dt+(\widetilde{\lambda_1}-\lambda_1)f\int_{-T/2}^{T/2}x_k(t)y_k(t)dt$$
$$+(\lambda_1-2\widetilde{\lambda_1})b\int_{-T/2}^{T/2}x_k(t)y_k^2(t)dt+M^{m/1}(t_0,\lambda,\omega). \tag{7.5.21}$$

记

$$I_l^0=\int_{-T/2}^{T/2}x_k^l(t)dt,\quad \widetilde{I}_2=\int_{-T/2}^{T/2}\frac{\dot{x}_k^2(t)}{x_k(t)}dt. \tag{7.5.22}$$

(7.5.21) 可以简化为

$$\begin{aligned}\widetilde{M}^{m/1}(t_0,\lambda,\omega)&=(2\lambda_1-\widetilde{\lambda_1})\frac{a}{2b}(fI_2^0-aI_3^0)+\frac{f}{2b}\cdot(fI_1^0-aI_2^0)\\&\quad+\frac{\lambda_1-2\widetilde{\lambda_1}}{4b}(f^2I_1^0-a^2I_3^0-2afI_2^0+\widetilde{I}_2)+M^{m/l}(t_0,\lambda,\omega)\\&=\frac{1}{4b}(4af\lambda_1I_2^0-\lambda_1f^2I_1^0-3\lambda_1a^2I_3^0+(\lambda_1-2\widetilde{\lambda_1})\widetilde{I}_2)\\&\quad+M^{m/1}(t_0,\lambda,\omega).\end{aligned} \tag{7.5.23}$$

若简记

$$\begin{aligned}\alpha_m&=\frac{1}{2b}(3\lambda_3af-\lambda_2\omega)I_1^m-\lambda_3fJ_1^m-\frac{\lambda_3a^2}{b}I_2^m+\lambda_3bJ_2^m,\\\beta_m&=-\frac{1}{2b}(2\lambda_3(a+b)\omega+\lambda_2f)I_1^m+\lambda_2b\widetilde{J}_2^m-\lambda_3f\widetilde{J}_1^m+\lambda_2\frac{a}{2b}I_2^m,\\I&=\frac{1}{4b}(4af\lambda_1I_2^0-\lambda_1f^2I_1^0-3\lambda_1a^2I_3^0+(\lambda_1-2\widetilde{\lambda_1})I_2)=I(\lambda_1,\widetilde{\lambda_1},\omega).\end{aligned}$$

于是

$$\widetilde{M}^{m/1}(t_0,\lambda,\omega)=I(\lambda_1,\widetilde{\lambda_1},\omega)+\sqrt{\alpha_m^2-\beta_m^2}\cos(\omega t_0+\varphi_m), \tag{7.5.24}$$

其中 $\cos\varphi_m=\alpha_m/\sqrt{\alpha_m^2+\beta_m^2}$. 从 (7.5.24) 看出, 只要

$$|I(\lambda_1,\widetilde{\lambda_1},\omega)|<\sqrt{\alpha_m^2+\beta_m^2}, \tag{7.5.25}$$

$M^{m/1}(t_0)$ 即存在简单零点, 从而 $(7.5.3)_\varepsilon$ 存在 m 阶次谐波.

可见系统 $(7.5.3)_\varepsilon$ 在一定参数条件存在马蹄和周期 mT 的各种周期解, 表现出很复杂的动力学行为.

7.5.2 肌型血管模型

在探讨心肌梗塞的病理研究中, 一些医学家认为动脉粥样硬化和动脉痉挛是导致发病的共同原因. 为此, 人们探讨了动脉肌肉力学的一般方程, 并导出了如下的 N 型血管和 S 型血管的含集中参数的力学模型:

$$\frac{d\delta_R}{dt} = h - \left(\frac{1}{2\pi L R_0^2} + \frac{R^3}{16\mu L^2}\right)\delta_P - \frac{R_0^2 P_0}{4\pi L^2}\delta_R, \tag{7.5.26}$$

$$\begin{aligned} h &= \frac{P_a - P_b}{2} - \frac{\pi P_0 R_0^4}{8\mu L}, \\ \delta_R &= R - R_0, \\ \delta_P &= P - P_0, \end{aligned} \tag{7.5.27}$$

$$\frac{d\delta_P}{dt} = \varphi(\delta_R, \delta_P) + K\frac{d\delta_P}{dt}, \tag{7.5.28}$$

其中

$$|\delta_R| \ll R_0, \quad |\delta_P| \ll P_0. \tag{7.5.29}$$

对于 S 型血管:

$$\begin{cases} \varphi(\delta_R, \delta_P) = \beta[\delta_R - \phi(\delta_P)], \\ \phi(\delta_P) = -\alpha\delta_P\left(1 - \dfrac{\delta_P}{\delta_{P_1}}\right)\left(1 + \dfrac{\delta_p}{\delta_{P_2}}\right). \end{cases} \tag{7.5.30}$$

对于 N 型血管:

$$\begin{cases} \varphi(\delta_R, \delta_P) = \gamma[\Psi(\delta_R) - \delta_P], \\ \Psi(\delta_R) = -\dfrac{1}{2}\delta_R\left(1 - \dfrac{\delta_R}{\delta_{R_1}}\right)\left(1 + \dfrac{\delta_R}{\delta_{R_2}}\right). \end{cases} \tag{7.5.31}$$

式中的参数 $\alpha, \beta, \gamma, K, \delta_{P_{1,2}}, \delta_{P_1}, \delta_{P_2}, \delta_{R_1}, \delta_{R_2}$ 都是常数.

1) N 型血管

引入无量纲变量 x, y, τ, 令

$$\begin{cases} \delta_R = y\delta_{R_1}, \\ \delta_P = \dfrac{1}{\alpha}x\delta_{P_1}, \\ t = t_*\tau, \end{cases} \tag{7.5.32}$$

即 x 为无量纲压力差, y 为无量纲内径变化差, 特征时间取为 $\tau_R = K(\alpha/r)$, N 型血管的动力学方程化为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \gamma t_*[\psi(y) - x] + K\alpha\frac{dy}{d\tau}, \\ \frac{dy}{d\tau} &= h_1 - \frac{t_* n}{\alpha}x - t_* my, \end{aligned} \tag{7.5.33}$$

其中

$$\psi(y)=-y(1-y)(1+\xi y),\quad \xi=\frac{\delta_{R_1}}{\delta_{R_2}},\quad h_1=\frac{t_*}{\delta_{R_1}}h.$$

取 $\xi=1,h_1=0,t_*=K(\alpha/\gamma)$, 则 (7.5.33) 变成

$$\frac{dx}{d\tau}=K\alpha[-y(1-y^2)-x]+K\alpha\frac{dy}{d\tau},\quad \frac{dy}{d\tau}=-\frac{Kn}{\gamma}x-\frac{K\alpha m}{\gamma}y.$$

引入 $K\alpha=\lambda,\dfrac{Kn}{r}=b,\dfrac{K\alpha m}{r}=c$, 上式化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\tau}=\lambda[-y+y^3-x]+\lambda\dfrac{dy}{d\tau},\\ \dfrac{dy}{d\tau}=-bx-cy,\end{cases}\tag{7.5.34}$$

于是, 可得

$$\frac{d^2y}{d\tau^2}=(b\lambda-\lambda c)y-b\lambda y^3-(\lambda+b\lambda+c)\frac{dy}{d\tau}.\tag{7.5.35}$$

假设 $b\lambda-\lambda c>0,\lambda+b\lambda+c=\varepsilon\delta,b\lambda-\lambda c=A+\varepsilon\gamma_1,b\lambda=B+\varepsilon\gamma_2$, 再加上扰动项 $\varepsilon\cos\omega t$(其生理含意为血管受到某种周期性刺激), 并令 $\dfrac{dy}{d\tau}=z$, 则 (7.5.35) 成为

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{d\tau}=z,\\ \dfrac{dz}{d\tau}=Ay+By^3-\varepsilon\delta z+\varepsilon\gamma\cos\omega\tau+\varepsilon\gamma_1y-\varepsilon\gamma_2y^3.\end{cases}\tag{7.5.36}$$

当 $\varepsilon=0$ 时, 未扰动系统有 Hamilton 量

$$H(y,z)=\frac{1}{2}z^2-\frac{A}{2}y^2+\frac{B}{4}y^4=h.\tag{7.5.37}$$

对应于 $h=0$, 存在 8 字形的同宿轨道, 其内部包围着两族周期轨道, 其参数表式分别如下:

$$\begin{cases}y_0=\pm\dfrac{\sqrt{2A}}{\sqrt{B}}\operatorname{sech}(\sqrt{A}\tau),\\ z_0=\mp\dfrac{A\sqrt{2}}{\sqrt{B}}\operatorname{sech}(\sqrt{A}\tau)\tanh(\sqrt{A}\tau);\end{cases}\tag{7.5.38}$$

$$\begin{cases}y_k=\dfrac{\sqrt{2A}}{\sqrt{B}}\dfrac{1}{\sqrt{2-k^2}}\operatorname{dn}\left(\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{2-k^2}}\tau,k\right),\\ z_k=\dfrac{\sqrt{2A}}{\sqrt{B}}\dfrac{k^2}{\sqrt{2-k^2}}\operatorname{sn}\left(\dfrac{\sqrt{A}\tau}{\sqrt{2-k^2}},k\right)\operatorname{cn}\left(\dfrac{\sqrt{A}\tau}{\sqrt{2-k^2}},k\right),\end{cases}\tag{7.5.39}$$

k 满足关系式 $h_k = \dfrac{k^2-1}{(2-k^2)^2}\dfrac{A^2}{B}$, 周期 $T_k = \dfrac{2\sqrt{2-k^2}}{\sqrt{A}}K(k)$. 计算同宿轨道的 Mel′nikov 函数

$$\begin{aligned}M(\tau_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z_0(t)[\gamma\cos\omega(\tau+\tau_0)-\delta z_0(\tau)]d\tau \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} z_0(\tau)(\gamma_1 y_0(\tau)-\gamma_2 y_0^3(\tau))d\tau \\ &= \frac{A\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{B}\sqrt{A}}\pi\omega\frac{1}{\sqrt{A}}\text{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{A}}\right)\sin(\omega\sqrt{A}\tau_0)-\frac{4}{3}\delta\frac{A^2}{B}\frac{1}{\sqrt{A}}.\end{aligned} \tag{7.5.40}$$

当

$$\frac{\gamma}{\delta} > R_\infty(\omega) = \frac{\frac{4}{3}A^{3/2}}{3\sqrt{2}\sqrt{B}\pi\omega\text{sech}\dfrac{\pi\omega}{2\sqrt{A}}} \tag{7.5.41}$$

时, $M(\tau_0)$ 有简单零点, 系统存在 Smale 马蹄.

对于满足共振条件 $T_k = \dfrac{2\sqrt{2-k^2}}{\sqrt{A}}K(k) = \dfrac{2\pi m}{\omega n}$ 的 k, 次谐 Mel′nikov 函数为

$$\begin{aligned}M^{m/n}(\tau) &= \int_0^{mT} z_k(\tau)[\gamma\cos\omega(\tau+\tau_0)-\delta z_k(\tau)T\gamma_1 y_k(\tau)+\gamma_2 y_k^3(\tau)]d\tau \\ &= -\delta J_1 - \gamma J_2\sin\left(\frac{\omega\tau_0}{2\sqrt{A}}\right),\end{aligned} \tag{7.5.42}$$

其中

$$J_1 = \frac{\frac{2}{3}(\frac{A}{\sqrt{B}})^2[(2-k^2(m,n))2E-4k'^2(m,n)K]}{[2-k^2(m,n)]^{3/2}},$$

$$J_2 = \begin{cases}0 & n\neq 1, \\ \sqrt{2}\pi\omega\dfrac{A^{3/2}}{B}\text{sech}\left(\dfrac{\pi mK}{K\sqrt{A}}\right).\end{cases}$$

于是当

$$\frac{r}{\delta} > R^m(\omega) = J_1(m,1)/J_2(m,1) \tag{7.5.43}$$

时发生次谐分枝.

由此可见, 固定其他参数, 使 λ 从足够大减小, 也就是 δ 从足够大减小, 并要求 K 不变, 就相当于 α 从足够大减小; 当 $(\gamma/\delta) > R^m$ 时 N 型血管模型将逐次发生次谐分枝, 当 $(\gamma/\delta) > R_\infty$ 时, 系统将导致马蹄. 由于 α 是决定 N 型血管静态液变特性的一个参数, 血管的病态变化使 α 从大变小时, 血管模型所确定的运动就进入混沌状态.

2) S 型血管

引进无量纲变量

$$\delta_k = 2y\delta_{k1}, \quad \delta_P = x\delta_{P1}, \quad t = t_*\tau, \tag{7.5.44}$$

x 为无量纲压力差, y 为无量纲内径变化, 取特征时间 $t_* = K/\beta$, S 型血管模型为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha\beta t_*[y - \Phi(x)] + K\alpha\dfrac{dy}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dt} = h_1 - \dfrac{t_* n}{2}x - t_* my, \\ \Phi(x) = -x(1-x)(1+\xi x), \end{cases} \tag{7.5.45}$$

其中 $\xi = \delta_{P_1}/\delta_{P_2}, h_1 = \dfrac{t_*}{\alpha\beta\delta_{P_1}}h, n = \dfrac{1}{2\pi LR_0 z} + \dfrac{R_0^3}{16\mu L^2}$. 取 $\xi = 1, h_1 = 0, t_* = \dfrac{K}{\beta}$, (7.5.45) 化为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = K\alpha(y + x - x^3) + K\alpha\dfrac{dy}{d\tau}, \\ \dfrac{dy}{d\tau} = -\dfrac{Kn}{\alpha\beta}x - \dfrac{Km}{\beta}y. \end{cases} \tag{7.5.46}$$

引入 $\lambda = K\alpha, a = \dfrac{Kn}{\alpha\beta}, b = \dfrac{Km}{\beta}$, 可得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \lambda\left(y + x - x^3 + \dfrac{dy}{d\tau}\right), \\ \dfrac{dy}{d\tau} = -ax - by. \end{cases} \tag{7.5.47}$$

(7.5.47) 可以化为

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{d\tau^2} = {} & y(\lambda b - \lambda a) + \frac{dy}{d\tau}(\lambda - a\lambda - b) - \frac{\lambda}{a^2}b^3y^3 \\ & - \frac{\lambda}{a^2}\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^3 - \frac{\lambda}{a^2}3by\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - \frac{3\lambda b^2}{a^2}y^2\frac{dy}{d\tau}. \end{aligned} \tag{7.5.48}$$

假设

$$\lambda - a\lambda - b = -\varepsilon\delta, \ \frac{\lambda}{a^2} = \varepsilon\delta_1, \ \frac{\lambda}{a^2}3b = \varepsilon\delta_2, \ \frac{3\lambda b^2}{a^2} = \varepsilon\delta_3,$$

$$\lambda(b-a) = F + \varepsilon\gamma_1, \ \lambda - a\lambda - b = -\varepsilon\delta, \ \frac{\lambda}{a^2}b^3 = D + \varepsilon\gamma_2.$$

并令 $\dfrac{dy}{d\tau} = z$, 加上扰动项 $\varepsilon\gamma\cos\omega t$, 得到

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\tau} = z, \\ \dfrac{dz}{d\tau} = Fy - Dy^3 - \varepsilon\delta z - \varepsilon\delta_1 z^3 - \varepsilon\delta_2 z^2 y - \varepsilon\delta_3 y^3 z + \varepsilon\gamma\cos\omega\tau + \varepsilon\gamma_1 y - \varepsilon\gamma_2 y^3. \end{cases} \tag{7.5.49}$$

同 N 型血管, 可得 $\varepsilon = 0$ 时的同宿轨道为

$$\begin{cases} y_0 = \pm\dfrac{\sqrt{2F}}{\sqrt{D}}\mathrm{sech}(\sqrt{F}\tau), \\ z_0 = \mp\dfrac{\sqrt{2F}}{\sqrt{D}}\mathrm{sech}(\sqrt{F}\tau)\tanh(\sqrt{F}\tau). \end{cases} \tag{7.5.50}$$

相应的 Mel′nikov 函数为

$$\begin{aligned} M(t_0) = &\int_{-\infty}^{+\infty} z_0(\tau)[\gamma\cos\omega(\tau+\tau_0) - \delta z_0(\tau) - \delta_1 z_0^3(\tau) - \delta_2 z_0^2(\tau)y_0(\tau) \\ &- \delta_3 y_0^2(\tau)z_0(\tau) - \gamma_1 y_0(\tau) - \gamma_2 y_0^3(\tau)]d\tau \\ =&\gamma J_1 - \delta J_2 - \delta_1 J_3 - \delta_2 J_4 - \delta_3 J_5 - \gamma_1 J_6 - \gamma_2 J_7, \end{aligned}$$

其中

$$J_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{D}}\pi\omega\mathrm{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{F}}\right)\sin(\omega\sqrt{F}\tau_0), \quad J_2 = -\frac{F^{3/2}}{D}\frac{4}{3},$$

$$J_3 = \frac{4F^{2/3}}{D^2}\left(-\frac{316}{35}\right), \quad J_4 = 0, \quad J_5 = \frac{4}{15}, \quad J_6 = 0.$$

所以当

$$\left|\frac{\delta\cdot\dfrac{4F^{3/2}}{3D} + \delta_1\dfrac{4F^{7/2}}{D^2}\left(-\dfrac{316}{35}\right) + \delta_3\dfrac{4F^3}{D^2}\dfrac{1}{\sqrt{F}}\dfrac{4}{15}}{r\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{D}}\pi\omega\mathrm{sech}\dfrac{\pi\omega}{2\sqrt{F}}}\right| \leqslant 1 \tag{7.5.51}$$

成立时 (7.5.49) 存在马蹄.

为讨论简单起见, 令 $\delta_1 = \delta_3 = 0$, 其他参数固定, 当 δ 从足够大变小时, S 型血管会进入混沌态. 当 $b, a > 1$ 固定时, δ 的下降要引起 α 的增大. 由此可见 S 型血管的病态变化使 α 从小变大而使血管的运动进入混沌态. S 型血管与 N 型血管在进入混沌过程时, α 变化截然相反.

7.6 两分量 Bose-Einstein 凝聚态系统的混沌与分枝

本节讨论两个弱耦合 Bose-Einstein 凝聚态的相干振荡原子流问题，考虑到类 -Josephson 隧穿现象，模型方程为

$$\dot{z} = -\sqrt{1-z^2}\sin\phi, \quad \dot{\phi} = \Lambda z + \Delta E + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\cos\phi, \tag{7.6.1}$$

其中 z 表示部分密度不平衡, ϕ 为相对相位差, Λ 和 ΔE 为两个常参数.

有文献用数值方法考虑了如下系统

$$\dot{z} = -2K(t)\sqrt{1-z^2}\sin\phi, \quad \dot{\phi} = \Lambda z + \Delta E(t) + \frac{2K(t)z}{\sqrt{1-z^2}}\cos\phi \tag{7.6.2}$$

的混沌行为, 其中

$$\Delta(t) = \Delta E_0 + \Delta E_1 \sin\omega t, \quad K(t) = K_0 + K_1 \sin\omega t,$$

ΔE_0, K_0 为常数且 $|K_1| \ll 1$, $|\Delta E_1| \ll 1$.

考虑下列系统

$$\frac{d\eta}{dt} = -\alpha\sqrt{1-\eta^2}\sin\phi, \quad \frac{d\phi}{dt} = \gamma + \beta\eta + \alpha\eta(1-\eta^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\phi \tag{7.6.3}$$

和 (7.6.3) 的扰动系统:

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta}{dt} = -\alpha_0\sqrt{1-\eta^2}\sin\phi - \varepsilon\alpha_1\sqrt{1-\eta^2}\sin\phi\sin\omega t, \\ \dfrac{d\phi}{dt} = \beta_0\eta + \alpha_0\eta(1-\eta^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\phi \\ \qquad\quad +\varepsilon[\gamma_0 + \beta_1\eta + (\gamma_1 + \alpha_1\eta(1-\eta^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\phi)\sin(\omega t)]. \end{cases} \tag{7.6.4}$$

这里假设系统 (7.6.3) 中的参数 $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1\sin\omega t$, $\beta = \beta_0 + \varepsilon\beta_1$.

注意到系统 (7.6.3) 在 (ϕ, η)-相平面上有两条直线解, 并且在这两条直线上, $\dfrac{d\phi}{dt}$ 没有定义. 由于 (7.6.3) 关于 ϕ 是周期的. 因此, 可在有界柱面 $S^1 \times (-1, 1)$ 上考虑状态的运动, 其中 $S^1 = [-\pi, \pi]$, 并将 $\phi = -\pi$ 和 $\phi = \pi$ 粘合.

系统 (7.6.3) 的首次积分为

$$H(\phi, \eta) = \gamma\eta + \frac{\beta}{2}\eta^2 - \alpha\sqrt{1-\eta^2}\cos\phi = h. \tag{7.6.5}$$

7.6.1 系统 (7.6.3) 的分枝集和相图

以下讨论当参数 α, β 和 γ 变化时, 系统 (7.6.3) 的分枝集和相图. 我们可以设 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma \geqslant 0$.

1. $\gamma > 0$ 情形

由 (7.6.3) 可见, 其平衡点 (ϕ_e, η_e) 分别位于两直线 $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi$ 上, 并满足 $-1 < \eta_e < 1$, 其中 η_e 为两曲线 $u = \beta\eta + \gamma$ 和 $u = \mp\dfrac{\alpha\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$ 的交点. 在 $\phi = 0$ 上, 只有一个平衡点 $O(0, \eta_{e1})$. 当 $\alpha < \beta$ 时, 记 $\eta_c = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}}}$, $\gamma_c = \eta_c\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\eta_c^2}} - \beta\right)$. 对于固定的数对 (α, β), 下面的结论成立:

(1) 当 $\gamma < \gamma_c$ 时, 存在三个平衡点 $P_\pi^a(\pi, \eta_{e2})$, $P_\pi^b(\pi, \eta_{e3})$, $P_\pi^c(\pi, \eta_{e4})$, 并有 $\eta_{e2} < \eta_{e3} < 0 < \eta_{e4}$;

(2) 当 $\gamma = \gamma_c$ 时, 存在二个平衡点 $P_\pi^{ab}(\pi, \eta_c)$, $P_\pi^c(\pi, \eta_{e4})$, 并有 $\eta_c < 0 < \eta_{e4}$;

(3) 当 $\gamma > \gamma_c$ 时, 只有一个平衡点 $P_\pi^c(\pi, \eta_{e4})$, $0 < \eta_{e4} < 1$.

用 $M(\phi_e, \eta_e)$ 表示 (7.6.3) 在平衡点 (ϕ_e, η_e) 的线性化系统的系数矩阵, 用 $J(\phi_e, \eta_e)$ 表示该矩阵的行列式. 于是, $\mathrm{trace}(M(v_e, \eta_e)) = 0$,

$$J(0, \eta_{e1}) = \alpha\sqrt{1 - \eta_{e1}^2}\left(\beta + \frac{\alpha}{\sqrt{(1 - \eta_{e1}^2)^3}}\right),$$

$$J(\pi, \eta_{ej}) = -\alpha\sqrt{1 - \eta_{ej}^2}\left(\beta - \frac{\alpha}{\sqrt{(1 - \eta_{ej}^2)^3}}\right), \quad j = 2, 3, 4.$$

注意, $J(\pi, \eta_c) = 0$ 意味着当 $\alpha < \beta$ 时, $J(\pi, \eta_{e2}) > 0$, $J(\pi, \eta_{e3}) < 0$, $J(\pi, \eta_{e4}) > 0$. 我们可用 J 的符号判定平衡点的类型.

记

$$h_O = H(0, \eta_{e1}) = -\left[\alpha\sqrt{1 - \eta_{e1}^2} + \eta_{e1}^2\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \eta_{e1}^2}} + \frac{\beta}{2}\right)\right] < 0,$$

$$h_j^\pi = H(\pi, \eta_{ej}) = \alpha\sqrt{1 - \eta_{ej}^2} + \eta_{ej}^2\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \eta_{ej}^2}} - \frac{\beta}{2}\right), \quad j = 2, 3, 4,$$

$$h_5 = H(\phi, -1) = -\gamma + \frac{\beta}{2}, \quad h_6 = H(\phi, 1) = \gamma + \frac{\beta}{2}.$$

当 $\beta > 2\alpha$ 时, 随着 γ 从 $0 < \gamma < \gamma_c$ 增加到 $\gamma > \gamma_c$, 我们得到图 7.6.1 所示的相图.

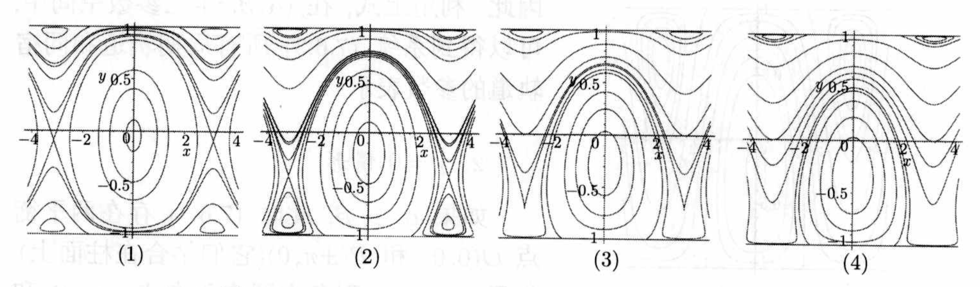


图 7.6.1 当 $\beta > 2\alpha$ 时, 系统 (7.6.3) 的相图的变化

(1) $h_O < h_2^\pi < h_5 < h_1^\pi < h_6 < h_3^\pi$, $\gamma < \gamma_c$; (2) $h_O < h_5 < h_2^\pi < h_1^\pi < h_6 < h_3^\pi$, $\gamma < \gamma_c$; (3) $h_O < h_5 < h_2^\pi = h_1^\pi < h_6 < h_3^\pi$, $\gamma = \gamma_c$; (4) $h_O < h_5 < h_6 < h_3^\pi$, $\gamma > \gamma_c$

从图 7.6.1(1) 可以看出, 在相柱面上系统 (7.6.3) 存在如下五族周期轨道:

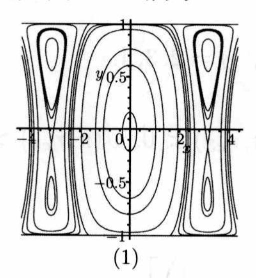
(i) 围绕平衡点 $O(0,\eta_{e1})$ 的振荡周期轨道族 $\{\Gamma_1^h\}$, 其轨道由 $H(\phi,\eta)=h,\ h\in(h_O,h_2^\pi)$ 确定;

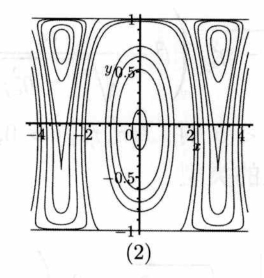
(ii) 两族旋转周期轨道 $\{\Gamma_{r\pm}^h\}$, 其轨道分别由 $H(\phi,\eta)=h,\ h\in(h_3^\pi,h_5)$ 和 $h\in(h_3^\pi,h_6)$ 确定;

(iii) 围绕平衡点 $P_\pi^a(\pi,\eta_{e2})$ 和 $P_\pi^c(\pi,\eta_{e4})$ 的两族振荡周期轨族 $\{\Gamma_{2\pm}^h\}$, 其轨道分别由 $H(\phi,\eta)=h,\ h\in(h_5,h_2^\pi)$ 和 $h\in(h_6,h_4^\pi)$ 确定.

同样, 从图 7.6.1 的 (2)~(4) 可知, 系统 (7.6.3) 存在不同的周期解族.

当 $\alpha<\beta<2\alpha$ 时, 随着 γ 从 $0<\gamma<\gamma_c$ 递增到 $\gamma>\gamma_c0$, 系统 (7.6.3) 不同的相图如图 7.6.2 所示.


(1)


(2)

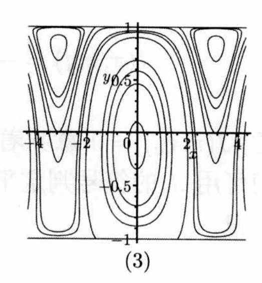

(3)

图 7.6.2　当 $\alpha<\beta<2\alpha$ 时, 系统 (7.6.3) 的相图的变化

(1) $h_O<h_5<h_6<h_2^\pi<h_1^\pi<h_6<h_3^\pi,\ \gamma<\gamma_c$; (2) $h_O<h_5<h_6<h_2^\pi=h_1^\pi<h_3^\pi,\ \gamma=\gamma_c$; (3) $h_O<h_5<h_6<h_3^\pi,\ \gamma>\gamma_c$

当 $0<\beta<\alpha,\gamma>0$ 时, 系统 (7.6.3) 的相图如图 7.6.3:

应用首次积分得

$$\frac{d\eta}{dt}=-\sqrt{(\alpha^2-h^2)+2h\gamma\eta+(h\beta-\alpha_2-\gamma^2)\eta^2-\beta\gamma\eta^3-\frac{1}{4}\beta^2\eta^4}.$$

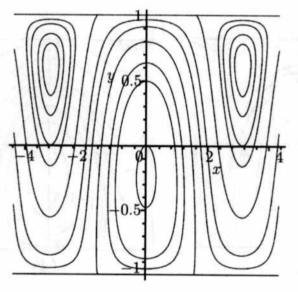


图 7.6.3　当 $\alpha>\beta>0$ 时, 系统 (7.6.3) 的相图

$h_O<h_5<h_6<h_3^\pi,\ \gamma>0$

因此, 利用上式, 在 (α,β,γ)-三参数空间中, 可以得到系统 (7.6.3) 所有周期轨道和同宿轨道的参数表示.

2. $\gamma=0$ 情形

如果 $\alpha\geqslant\beta$, 此时 (7.6.3) 存在两平衡点 $O(0,0)$ 和 $P(\pm\pi,0)$(它们粘合在柱面上). 如果 $\alpha<\beta$, 则存在四个平衡点 O, P 和 $P_\pi^\pm(\pm\pi,\pm\eta_1)$, 其中, $\eta_1=\sqrt{1-\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}}$. 此时,

$$J(0,0)=\alpha(\alpha+\beta),\quad J(\pi,0)=-\alpha(\beta-\alpha),\quad J(\pi,\eta_1)=\beta^2-\alpha^2.$$

$$h_0 = H(0,0) = -\alpha, \quad h_\pi = H(\pi,0) = \alpha, \quad h_1 = H(\pi,\eta_1) = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2\beta},$$

$$y = \pm 1, \ h = h_2 = \frac{\beta}{2}.$$

基于以上事实, 系统 (7.6.3) 的相图的改变如图 7.6.4 所示.

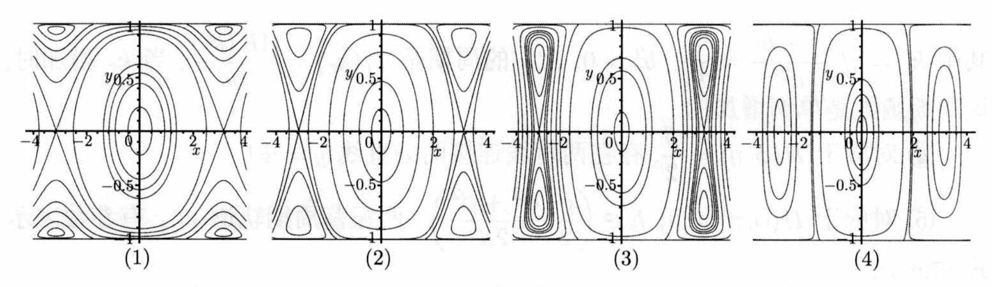


图 7.6.4 当 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 时, 系统 (7.6.3) 的相图的改变

(1) $\beta > 2\alpha$, $h_0 < h_\pi < \frac{\beta}{2} < h_1$; (2) $\beta = 2\alpha$, $h_0 < \dfrac{\beta}{2} = h_\pi < h_1$;

(3) $\alpha < \beta < 2\alpha$, $h_0 < \dfrac{\beta}{2} < h_\pi < h_1$; (4) $\beta \leqslant \alpha$, $h_0 < \dfrac{\beta}{2} < h_1$

以下考虑在不同的参数条件下系统 (7.6.3) 的轨道的参数表示. 当 $\gamma = 0$ 时, 有

$$\frac{d\eta}{dt} = -\sqrt{(\alpha^2 - h^2) + (h\beta - \alpha_2)\eta^2 - \frac{1}{4}\beta^2\eta^4} = -\frac{\beta}{2}\sqrt{(a^2-\eta^2)(\eta^2-b^2)}, \qquad (7.6.6)$$

其中,

$$a^2 = \frac{2}{\beta^2}\left[(h\beta - \alpha^2) + \sqrt{\Delta}\right], \quad b^2 = \frac{2}{\beta^2}\left[(h\beta - \alpha^2) - \sqrt{\Delta}\right],$$

并且 $\Delta = \alpha^2(\alpha^2 + \beta^2 - 2h\beta)$.

应用上述关系, 可得到下述的结果:

(1) $\beta > 2\alpha$情形. 此时, $h_0 = -\alpha < 0 < h_\pi = \alpha < h_2 = \frac{\beta}{2} < h_1$. 在有界相柱面 $S^1 \times (-1,1)$ 上有三族振荡周期轨道 $\{\Gamma_1^h\}$, $\{\Gamma_{2\pm}^h\}$ 和两族旋转周期轨道 $\{\Gamma_{r\pm}^h\}$.

① 对应于 $H(\phi,\eta) = h$, $h \in (-\alpha,\alpha)$, 振荡周期轨道 Γ_1^h 的参数表示为

$$\eta(t) = a\mathrm{cn}(\Delta^{\frac{1}{4}}t, k_1), \qquad (7.6.7)$$

其中 $k_1 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}, b^2 < 0$. Γ_1^h 的周期是 $T_1(k_1) = \dfrac{4K(k_1)}{\Delta^{\frac{1}{4}}}$. 显然, 当 k_1 从 0 变到 1 时, $T_1(k_1)$ 是单调的函数.

② 对应于 $H(\phi,\eta) = \alpha$, 存在两条同宿于鞍点 (这两个点粘合) 的同宿轨道 $\Gamma_{H\pm}^\alpha$. 参数表示为

$$\eta(t) = \pm\frac{2\Omega}{\beta}\mathrm{sech}\,(\Omega t), \qquad (7.6.8)$$

其中 $\Omega = \sqrt{\alpha(\beta - \alpha)}$.

③ 对应于 $H(\phi,\eta)=h,\ h\in\left(\alpha,\dfrac{\beta}{2}\right)$, 旋转周期轨道 $\Gamma^h_{r\pm}$ 的参数表示为

$$\eta(t)=\pm a\mathrm{dn}\left(\frac{\beta}{2}at,k_r\right), \tag{7.6.9}$$

其中 $k_r=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}=\dfrac{1}{k_1},\ b^2>0$. $\Gamma^h_{r\pm}$ 的周期是 $T_r(k_r)=\dfrac{4K(k_r)}{\beta a}$, 当 k_r 增加时, 该周期函数是单调增加的.

④ 对应于 $H(\phi,\eta)=\dfrac{\beta}{2}$, 存在两轨线连接两条直线 $y=\pm1$.

⑤ 对应于 $H(\phi,\eta)=h,\ h\in\left(\dfrac{\beta}{2},\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\beta}\right)$, 两振荡周期轨道 $\Gamma^h_{2\pm}$ 有参数表示式 (7.6.9).

(2) $\beta=2\alpha$情形. 此时, 除了没有两族旋转轨道 $\{\Gamma^h_{r\pm}\}$ 外, 其他的轨道与情形 1 相同.

(3) $\alpha<\beta<2\alpha$情形

① 对应于 $H(\phi,\eta)=h,\ h\in\left(-\alpha,\dfrac{\beta}{2}\right)$, 存在围绕平衡点 (0,0) 的一族振荡周期轨道 $\{\Gamma^h_1\}$, 其参数表示式同 (7.6.7).

② 对应于 $H(\phi,\eta)=h,\ h\in\left(\dfrac{\beta}{2},\alpha\right)$, 存在围绕三个平衡点 $P_\pi(\pm\pi,0)$ 和 $P^\pm_\pi(\pm\pi,\pm\eta_1)$ 的一族振荡周期轨道 $\{\Gamma^h_2\}$, 其参数表示式同 (7.6.7).

③ 对应于 $H(\phi,\eta)=\alpha$, 存在两条呈 "8" 字形的同宿轨道 $\Gamma^\alpha_{2H\pm}$, 它们同宿到鞍点 $P_\pi(\pm\pi,0)$(粘合为同一点), 并分别包围平衡点 $P^+_\pi(\pm\pi,\eta_1)$ 和 $P^-_\pi(\pm\pi,-\eta_1)$. 这两个同宿轨道的参数表示式同 (7.6.8).

④ 对应于 $H(\phi,\eta)=h,\ h\in\left(\alpha,\dfrac{1}{2\beta}(\alpha^2+\beta^2)\right)$, 存在两族振荡周期轨道 $\{\Gamma^h_{3\pm}\}$, 它们围绕平衡点 $P^\pm_\pi(\pm\pi,\pm\eta_1)$, 其参数表示式同 (7.6.9).

(4) $0<\beta\leqslant\alpha$情形 这时平衡点 $P_\pi(\pi,0)$ 是中心. 对应于 $H(\phi,\eta)=h,\ h\in\left(-\alpha,\dfrac{\beta}{2}\right)$ 与 $h\in\left(\dfrac{\beta}{2},\alpha\right)$, 存在两族周期轨道, 它们的参数表示式都与 (7.6.7) 式相同.

7.6.2 扰动系统 (7.6.4) 的 Mel′nikov 分析及数值结果

本节讨论系统 (7.6.4). 假设 (7.6.4) 中的参数满足 $\beta_0>2\alpha_0$ 或 $\alpha_0<\beta_0<2\alpha_0$. 这时在相柱面上存在两呈 "8" 字形的同宿轨道.

对系统 (7.6.4), 沿着 (7.6.3) 的未扰动同宿轨道 $\Gamma^\alpha_{H\pm}$ 计算, 得到同宿分枝的

Mel′nikov 函数为

$$\begin{aligned}M(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty}\{[-\alpha_0\sqrt{1-\eta^2}\sin\phi]\\&\quad\cdot[\gamma_0+\beta_1\eta+(\gamma_1+\alpha_1\eta(1-\eta^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\phi)\cdot\sin(\omega(t+t_0))]\\&\quad+[\beta_0\eta+\alpha_0\eta(1-\eta^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\phi][\alpha_1\sqrt{1-\eta^2}\sin\phi\sin(\omega(t+t_0))]\}dt\\&=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\alpha_1\beta_0}{\alpha_0}\eta^2-\gamma_1\eta\right)\sqrt{\Omega^2-\frac{\beta_0^2}{4}\eta^2\sin\omega tdt}\right)\cos\omega t_0\\&=\frac{2\pi\omega\Omega}{\beta_0}\left[\frac{\alpha_1\omega}{\alpha_0\sinh\dfrac{\pi\omega}{2\Omega}}-\frac{\gamma_1}{\cosh\dfrac{\pi\omega}{2\Omega}}\right]\cos\omega t_0\equiv J\cos\omega t_0.\end{aligned}\tag{7.6.10}$$

我们只考虑 $\alpha_0>0,\beta_0>0$ 的情形. 此时, 系统 (7.6.3) 有不同的周期轨道 (见图 7.6.4). 其参数表示式分别由 (7.6.7) 和 (7.6.9) 确定. 例如, 对于图 7.6.4(1) 中得五族周期轨道 $\{\Gamma_1^h\}$, $\{\Gamma_{2\pm}^h\}$ 和 $\{\Gamma_{r\pm}^h\}$, 考虑共振条件

$$T_i(k_i)=\frac{2m\pi}{\omega n}=\frac{mT}{n},\quad i=1,2,r.\tag{7.6.11}$$

这些关系当 $n=1$ 时定义了 $k_i=k_i(m)$. 沿着当 $h=h(k_i(m))$ 时对应的未扰动轨道 Γ_i^h 计算次调和 Mel′nikov 函数, 得到

$$\begin{aligned}M_i^m(t_0)&=\int_0^{mT}(\alpha_1\beta_0\eta_i-\alpha_0\gamma_1)\sqrt{1-\eta_i^2}\sin\phi\sin\omega(t+t_0)dt\\&=\left[\int_0^{mT}\left(\frac{\alpha_1\beta_0}{2\alpha_0}\eta_i^2-\gamma_1\eta_i\right)\cos\omega tdt\right]\cos\omega t_0.\end{aligned}$$

应用 $\{\Gamma_1^h\}$ 和 $\{\Gamma_{r\pm}^h\}$ 即 $\{\Gamma_{2\pm}^h\}$) 的参数表示, 可得

$$M_1^m(t_0)=I_1^m\cos\omega t_0,\tag{7.6.12}$$

其中 $I_1^m=\dfrac{\alpha_1\beta_0a_0^2m\pi}{2k_1^2\alpha_0K(k_1)}\mathrm{csch}\left(\dfrac{m\pi K'(k_1)}{K(k_1)}\right)-\dfrac{2\gamma_1\pi}{k_1}\mathrm{sech}\left(\dfrac{(2m+1)\pi K'(k_1)}{2K(k_1)}\right)$;

$$M_r^m(t_0)=M_2^m(t_0)=I_r^m\cos\omega t_0,\tag{7.6.13}$$

其中 $I_r^m=\dfrac{\alpha_1\beta_0a_0^2m\pi^2}{2\alpha_0K(k_1)}\mathrm{csch}\left(\dfrac{m\pi K'(k_1)}{K(k_1)}\right)-2\gamma_1\pi\mathrm{sech}\left(\dfrac{m\pi K'(k_1)}{K(k_1)}\right)$.

因此, 我们得到下面的结论:

定理 7.6.1 (i) 假设 (7.6.4) 中 $\beta_0>2\alpha_0$ 或 $\alpha_0<\beta_0<2\alpha_0$. 恰当选取参数 α_1,γ_1 和 ω, 使得 $J\neq 0$, 则由 (7.6.10) 式定义的 $M(t_0)$ 有简单零点, 因此, 系统 (7.6.4) 的解在 Smale 马蹄存在意义下是混沌的.

(ii) 假设 (7.6.4) 中 $\alpha_0>0, \beta_0>0$, 选取参数 α_1, γ_1, 使得 $I_1^m \neq 0$ 与 $I_r^m \neq 0$. 则由 (7.6.12) 和 (7.6.13) 式定义的 $M_1^m(t_0)$ 和 $M_2^m(t_0)$ 有简单零点, 因此, 系统 (7.6.4) 分别从周期轨道 $\{\Gamma_1^h\}$, $\{\Gamma_{2\pm}^h\}$ 和 $\{\Gamma_{r\pm}^h\}$ 分枝出 m 阶次调和周期解.

考虑系统 (7.6.3) 的两同宿轨道 $\Gamma_{H\pm}^{\alpha_0}$ 附近扰动系统某些轨道的动力学行为. 图 7.6.5(1) 给出了系统 (7.6.4) 在初值 $\phi(0)=0$, $\eta(0)=0.88$ 和参数 $\alpha_0=1, \beta_0=3, \varepsilon=0.1, \gamma_1=1.2, \omega=1.25, \beta_1=1, \alpha_1=\gamma_0=0$ 下的相轨线. 图 7.6.5(2) 给出了相应的 Poincaré 映射 (画出 4000 个点); 图 7.6.5(3) 给出了系统 (7.6.4) 在初值 $\phi(0)=0$, $\eta(0)=0.87$, 参数 $\alpha_0=1, \beta_0=3, \varepsilon=0.1, \gamma_1=1.15, \omega=1.25, \beta_1=0.88, \alpha_1=\gamma_0=0$ 下的相轨线. 图 7.6.5(4) 为相应的 Poincaré 映射 (画出 6000 个点).

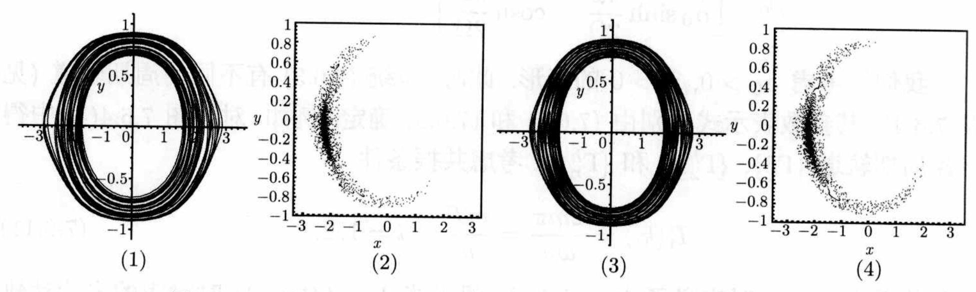


图 7.6.5 系统 (7.6.4) 的两条轨道的相图和其 Poincaré 映射

最后, 考虑当 $\varepsilon=0$ 时, 系统 (7.6.3) 两呈“8”字形的同宿轨道附近 (7.6.4) 的轨道的动力学性质. 图 7.6.6(1) 给出了系统 (7.6.4) 在初值 $\phi(0)=\pi$, $\eta(0)=0.2$ 和参数 $\alpha_0=5, \beta_0=5.25, \varepsilon=0.1, \gamma_1=1.2, \omega=1.25, \beta_1=1, \alpha_1=\gamma_0=0$ 下的相轨线. 图 7.6.6(2) 给出了系统 (7.6.4) 在初值 $\phi(0)=\pi$, $\eta(0)=0.2$ 和参数 $\alpha_0=5, \beta_0=5.5, \varepsilon=0.1, \gamma_1=1.2, \omega=1.25, \beta_1=1, \alpha_1=\gamma_0=0$ 下的相轨线.

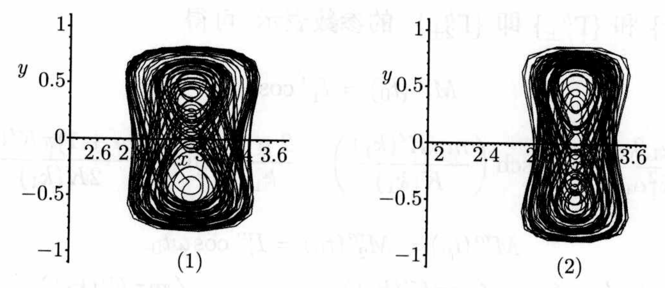


图 7.6.6 系统 (7.6.4) 的两轨道的相图

7.7 大 Rayleigh 数 Lorenz 方程的周期解和同宿分枝

众所周知, 1963 年, 美国气象学家 Lorenz 在《大气科学》发表“确定性的非周

期流”文章, 他指出, 描述大气环流中的对流运动的方程 (Lorenz 方程)

$$\frac{dx}{dt}=\sigma(y-x),\quad \frac{dy}{dt}=\gamma x-y-xz,\quad \frac{dz}{dt}=xy-bz \tag{7.7.1}$$

存在敏感地依赖于初始条件的解, 产生“蝴蝶效应”. 某些单极直流发电机的数学模型, 例如 Moffatt 的模型

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\gamma(y-x),\\ \dfrac{dy}{dt}=mx-(1+m)y+xz,\\ \dfrac{dz}{dt}=g[1+mx^2-(1+m)xy]\end{cases} \tag{7.7.2}$$

也可化为 Lorenz 方程的形式 (E. Knobloch, 1981). 关于 Lorenz 方程的动力学性质研究涉及对湍流的理解这一困难问题, 因此非常引人注目.

若参数 $r\gg\sigma$, 即 Rayleigh 数足够大，1979 年, Robbins(1979) 曾研究过系统 (7.7.1) 的周期解存在性，作变换：

$$w=\gamma-z,\quad x=y,\quad y=z,$$

并取 $b=1$, (7.7.1) 可化为以下形式：

$$\dot{w}=\gamma-zy-w,\quad \dot{z}=wy-z,\quad \dot{y}=\sigma(z-y), \tag{7.7.3}$$

再引入尺度变换：

$$t\to\varepsilon t,\quad w\to\frac{w}{\varepsilon^2\sigma},\quad z\to\frac{z}{\varepsilon^2\sigma},\quad y\to\frac{y}{\varepsilon},\quad \varepsilon=\frac{1}{\sqrt{\gamma\sigma}},$$

则 (7.7.1) 变为以下的 Robbins 模型：

$$\begin{cases}\dfrac{dw}{dt}=-zy+\varepsilon(1-w),\\ \dfrac{dz}{dt}=wy-\varepsilon z,\\ \dfrac{dy}{dt}=z-\varepsilon\sigma y.\end{cases} \tag{7.7.4}$$

上面的小参数 ε 依赖于 σ, $\tau=\varepsilon t$ 也与 σ 有关. 与上述变换不同, Sparrow 采用另一个变换

$$x=\frac{\xi}{\varepsilon},\quad y=\frac{\eta}{\varepsilon^2\sigma},\quad z=\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\tilde{z}}{\sigma}+1\right),\quad \tau=\frac{t}{\varepsilon},\quad \varepsilon=\frac{1}{\sqrt{\gamma}},$$

将 (7.7.1) 化为以下更一般的形式 (省略了新变量中的 ∼):

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{d\tau}=-\eta-\varepsilon\sigma\xi,\\ \dfrac{d\eta}{d\tau}=-\xi z-\varepsilon\eta,\\ \dfrac{dz}{d\tau}=\xi\eta-\varepsilon b(z+\sigma).\end{cases}\tag{7.7.5}$$

用平均法, Sparrow(1982) 研究过系统 (7.7.5) 的周期解问题, 并写在他的著名著作之中. Robbins 与 Sparrow 的工作被后来出版的许多著作所引用, 例如, 李炳熙 (1984), Sachdev(1991) 等. 实际上，他们的结论是很不完善的. 用第 6 章慢变系统理论, 可以对上述两个模型的研究获得完整的结果, 以下介绍李继彬、张建铭 (1993) 的工作.

首先注意到, 当 $\varepsilon=0$ 时, 未扰动系统 $(7.7.4)_0$ 和 $(7.7.5)_0$ 的平衡点分别填满了 w 轴和 y 轴或 η 轴. 但当 $\varepsilon\neq 0$ 时, 扰动系统 (7.7.4) 和 (7.7.5) 分别仅有三个平衡点, 其坐标分别为: $(w,z,y)=(1,0,0)$, $(\varepsilon^2\sigma,\alpha,\varepsilon\sigma\alpha)$, $(\varepsilon^2\sigma,-\varepsilon\sigma\alpha,-\alpha)$ 以及 $(\xi,\eta,z)=(-\sigma,0,0)$, $(\xi_+^0,\varepsilon\sigma\xi_+^0,-\varepsilon^2\sigma)$, $(\xi_-^0,\varepsilon\sigma\xi_-^0,-\varepsilon^2\sigma)$, 其中 $\alpha=[(1-\varepsilon^2\sigma)/\sigma]^{1/2}$, $\xi_\pm^0=[(1-\varepsilon^2)b]^{1/2}$. 平衡点 $(1,0,0)$ 与 $(-\sigma,0,0)$ 是鞍点.

当 $\varepsilon=0$ 时, 系统 $(7.7.4)_\varepsilon$ 可化为三维 Hamilton 系统:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}w\\z\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-z\\0&0&w\\z&-w&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\y\end{bmatrix}=J\begin{bmatrix}\partial H/\partial w\\ \partial H/\partial z\\ \partial H/\partial y\end{bmatrix},\tag{7.7.6}$$

其中 Hamilton 函数为

$$H(w,z,y)=w+\frac{1}{2}y^2=A.\tag{7.7.7}$$

此外, 系统 (7.7.6) 还存在 Casimir 函数:

$$C(w,z,y)=w^2+z^2=B^2.\tag{7.7.8}$$

按照广义 Hamilton 系统的理论, 三维系统 (7.7.4) 与 (7.7.5) 可在辛叶 (7.7.8) 上约化为二维的 Hamilton 系统. 事实上, 对于固定的 $B>0$, 变量代换:

$$\begin{cases}w=(B+\rho)\cos(\theta-\pi),\\ z=(B+\rho)\sin(\theta-\pi),\\ y=y,\end{cases}\tag{7.7.9}$$

使 (7.7.4) 变为辛叶 (7.7.8) 上的如下系统:

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = -\varepsilon(B + \rho + \cos\theta), \\ \dfrac{d\theta}{dt} = y + \varepsilon\dfrac{\sin\theta}{B+\rho}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -(B+\rho)\sin\theta - \varepsilon\sigma y, \end{cases} \tag{7.7.10}$$

其中 $|\rho/B| \ll 1$. 类似地, 对于系统 (7.7.5), 按照变量代换:

$$z = (B+\rho)\cos\theta, \quad \eta = (B+\rho)\sin\theta, \quad \xi = -y, \tag{7.7.11}$$

该系统可化为

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = -\varepsilon[b\sigma\cos\theta + (B+\rho)(b-1)\cos^2\theta + B + \rho], \\ \dfrac{d\theta}{dt} = y + \dfrac{\varepsilon}{B+\rho}[(b-1)(B+\rho)\cos\theta + b\sigma]\sin\theta, \\ \dfrac{dy}{dt} = B + \rho\sin\theta - \varepsilon\sigma y. \end{cases} \tag{7.7.12}$$

显然, 系统 $(7.7.10)_\varepsilon$ 和 $(7.7.12)_\varepsilon$ 都是具有一个慢变量 ρ 的扰动摆系统. 这里, 我们已建立了大 Rayleigh 数 Lorenz 模型和扰动摆方程之间的联系.

当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统 $(7.7.10)_0$ 与 $(7.7.12)_0$ 是具有如下 Hamilton 函数的 Hamilton 系统:

$$H(\theta, y) = \frac{1}{2}y^2 - B\cos\theta = A. \tag{7.7.13}$$

容易看出, 当 $-B < A < B$ 时, $(7.7.10)_0$ 有振动型周期轨道 $\{\Gamma_0^k\}$:

$$\begin{cases} \theta_0(t,k) = 2\arcsin[k\mathrm{sn}(\sqrt{B}t, k)], \\ y_0(t,k) = 2k\sqrt{B}\mathrm{cn}(\sqrt{B}t, k), \end{cases} \tag{7.7.14}$$

其中 $k^2 = \dfrac{A+B}{2B}$, $\mathrm{sn}(u,k)$, $\mathrm{cn}(u,k)$ 和 $\mathrm{dn}(u,k)$ 是模为 k 的 Jacobi 椭圆函数.

当 $A = B$ 时, 存在 $(7.7.10)_0$ 的连接点 $(\rho,\theta,y) = (0,\pi,0)$ 的两条同宿轨道 $\{\Gamma_{k\pm}^1\}$, 其参数表示为

$$\begin{cases} \theta_h(t) = \pm 2\arctan(\sinh\sqrt{B}t), \\ y_h(t) = \pm 2\sqrt{B}\mathrm{sech}\sqrt{B}t, \end{cases} \tag{7.7.15}$$

当 $B < A < +\infty$ 时, $(7.7.10)_0$ 存在旋转型周期轨道 $\{\Gamma_{r\pm}^{k_1}\}$, 其中参数表示为

$$\begin{cases} \theta_{r\pm}(t,k_1) = \pm 2\arcsin\left[\mathrm{sn}\left(\dfrac{\sqrt{B}}{k_1}t, k_1\right)\right], \\ y_{r\pm}(t,k_1) = \pm\dfrac{\sqrt{B}}{k_1}\mathrm{dn}\left(\dfrac{\sqrt{B}}{k_1}t, k_1\right), \end{cases} \tag{7.7.16}$$

其中 $k_1 = k^{-1} = \left(\dfrac{2B}{A+B}\right)^{1/2}$. $\{\Gamma_0^k\}$ 和 $\{\Gamma_{r\pm}^{k_1}\}$ 的周期分别是 $T_0(k) = \dfrac{4K(k)}{\sqrt{B}}$ 和 $T_r(k_1) = \dfrac{k_1K(k_1)}{\sqrt{B}}$, 我们用 $K(k)$ 与 $E(k)$ 分别表示第一类与第二类完全椭圆积分. 注意到 $A/B = 2k^2 - 1 = \dfrac{2-k_1^2}{k_1^2}$. 若用作用 — 角度变量 (I,θ), 经过计算知道 $(7.7.10)_0$ 的作用变量是

$$I = \frac{8B}{\pi}\cdot\begin{cases} E(k) - (1-k^2)K(k), & \text{当 } 0 < k < 1 \text{ 时}, \\ \dfrac{1}{2k_1}E(k_1), & \text{当 } 0 < k_1 < 1 \text{ 时}. \end{cases} \tag{7.7.17}$$

现考虑 Robbins 的模型 $(7.7.10)_\varepsilon$. 为研究该系统周期解的存在性, 根据第 6 章的讨论, 只需计算如下的 Mel′nikov 函数:

$$\begin{aligned} M_1(B,\sigma,k) &= \int_{-T/2}^{T/2}\left[\frac{B}{B+\rho}\sin^2\theta(t) - \sigma y^2(t)\right]dt \\ &= -\left[\sigma + \frac{A}{B(B+\rho)}\right]\int_{-T/2}^{T/2} y^2(t)dt \\ &\quad + \frac{1}{2B(B+\rho)}\int_{-T/2}^{T/2} y^4(t)dt. \end{aligned} \tag{7.7.18}$$

$$\begin{aligned} M_3(B,\sigma,k) &= \int_{-T/2}^{T/2}(B+\rho+\cos\theta(t))dt \\ &= \left(B+\rho-\frac{A}{B}\right)T + \frac{1}{2B}\int_{-T/2}^{T/2} y^2(t)dt. \end{aligned} \tag{7.7.19}$$

将 (7.7.14) 和 (7.7.16) 代入以上两式, 得到对应于两类未扰动周期轨道的 Mel′nikov 函数:

$$\begin{aligned} M_1^0(B,\sigma,k) = &-16\sqrt{B}[\sigma(E(k) - (1-k^2)K(k))] \\ &- \frac{1}{3(B+\rho)}[(2k^2-1)E(k) + (1-k^2)K(k)], \end{aligned} \tag{7.7.20}$$

$$M_3^0(B,\sigma,k)=\frac{4}{\sqrt{B}}[B+\rho-(2K^2-1)E(k)+2(E(k)-(1-k^2)K(k)),\tag{7.7.21}$$

$$M_1^r(B,\sigma,k_1)=-\frac{8\sqrt{B}}{k_1}\left[\sigma k_1^2E(k_1)-\frac{(2-k_1^2)E(k_1)-2(1-k_1^2)K(k_1)}{3(B+\rho)}\right],\tag{7.7.22}$$

$$M_3^r(B,\sigma,k_1)=\frac{2k_1}{\sqrt{B}}\left[\left(B+\rho-\frac{2-k_1^2}{k_1^2}\right)K(k_1)+\frac{2E(k_1)}{k_1^2}\right].\tag{7.7.23}$$

对 (7.7.4) 的唯一鞍点, 对应于系统 $(7.7.10)_0$ 的相柱面 $w^2+z^2=1$ 上的两条同宿轨道, 同宿分枝的 Mel'nikov 函数如下:

$$M_0(1,\sigma,1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{1+\rho}\sin^2\theta_h(t)-\sigma y_h(t)\right]dt=8\left(\frac{1}{3(1+\rho)}-\sigma\right).\tag{7.7.24}$$

令 $M_3^0(B,\sigma,k)=0$, $M_3^r(B,\sigma,k_1)=0$, 则有

$$\rho_0=1-B-\frac{2E(k)}{K(k)},\tag{7.7.25}$$

$$\rho_r=\frac{2-k_1^2}{k_1^2}-B-\frac{2E(k_1)}{k_1^2K(k_1)}.\tag{7.7.26}$$

在条件 (7.7.25) 和 (7.7.26) 之下，取 $\rho_0=\rho_r=0$, 并令 $M_1^0(B,\sigma,k)=0$, $M_1^r(B,\sigma,k_1)=0$, 则有

$$\sigma=\sigma_0(k)=\frac{1}{3}\left[\frac{K(k)}{K(k)-2E(k)}\right]\left[\frac{(2k^2-1)E(k)+(1-k^2K(k))}{E(k)-(1-k^2)K(k)}\right],\tag{7.7.27}$$

$$B=B_0(k)=1-\frac{2E(k)}{K(k)},\quad A=A_0=(2k^2-1)B,\tag{7.7.28}$$

$$\sigma=\sigma_r(k_1)=\frac{1}{3}\frac{K(k_1)}{E(k_1)}\left[\frac{(2-k_1^2)K(k_1)-2(1-k_1^2)K(k_1)}{(2-k_1^2)K(k_1)-2E(k_1)}\right],\tag{7.7.29}$$

$$B=B_r(k_1)=\frac{(2-k_1^2)K(k_1)-2E(k_1)}{k_1^2K(k_1)},\quad A=A_r=\frac{2-k_1^2}{k_1^2}B_r.\tag{7.7.30}$$

由条件 $B_0>0$ 得估计 $k>k_0\approx 0.91$, 其中 k_0 满足 $K(k_0)=2E(k_0)$. 因为 $(2-k^2)K(k)-2E(k)=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{4K}\mathrm{sn}^2u\mathrm{cn}^2udu>0$, 所以，对 $k_1\in(0,1), B_r>0$, 经过计算可得

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to 1}\sigma_0(k)=\frac{1}{3},\quad \lim_{k\to k_0}\sigma_0(k)=\infty,\\&\lim_{k\to 1}B_0(k)=\frac{1}{3},\quad \lim_{k\to k_0}B_0(k)=0,\end{aligned}\tag{7.7.31}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{k_1\to 1}\sigma_r(k)=\frac{1}{3},\quad \lim_{k_1\to 0}\sigma_r(k)=1,\\&\lim_{k_1\to 1}B_r(k)=1,\quad \lim_{k_1\to 0}B_r(k_1)=0,\end{aligned}\tag{7.7.32}$$

于是可以画出函数 $\sigma_0=\sigma_0(k)$ 和 $\sigma_r=\sigma_r(k)$ 的图形 (图 7.7.1).

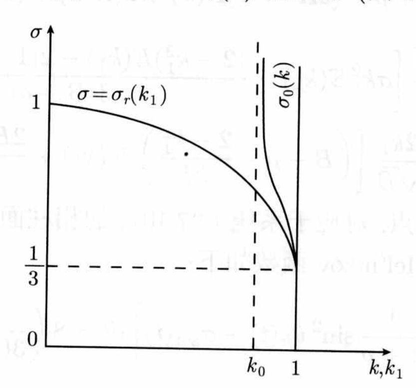


图 7.7.1　$\sigma_0(k)$ 和 $\sigma_r(k)$ 的图, $0<k<1$

根据第 6 章的定理以及图 7.7.1, 我们得到如下结果:

定理 7.7.1　(i) 对于任何实数 $k\in(k_0,1)$, 如果参数 $\sigma=\sigma_0(k)$ 由 (7.7.27) 确定, 则在相柱面 $w^2+z^2=B_0(k)$ 上的摆方程 $(7.7.10)_0$ 的振动周期轨道 Γ_0^k 近旁, 存在 $(7.7.10)_\varepsilon$ 的一条稳定周期轨道 L_0^k.

(ii) 对于任何实数 $k_1\in(0,1)$, 如果参数 $\sigma=\sigma_r(k_1)$ 由 (7.7.29) 确定, 则在相柱面 $w^2+z^2=B_r^2(k_1)$ 上, 系统 $(7.7.10)_0$ 的两条对称旋转型轨道 $\Gamma_\pm^{k_1}$ 近旁, 存在 $(7.7.10)_\varepsilon$ 的两条不稳定周期轨道 $L_{r+}^{k_1}$ 和 $L_{r-}^{k_1}$.

(iii) 如果 $\sigma=1/3$, 则在相柱面 $w^2+z^2=1$ 上, 系统 $(7.7.10)_0$ 的两条同宿轨道 $\Gamma_{h\pm}^1$ 近旁, 存在连结 $(7.7.10)_\varepsilon$ 的鞍点 $(1,0,0)$ 的两条同宿轨道 $L_{h\pm}^1$.

(iv) 下面的极限关系成立:

当 $k\to1$ 时, $\sigma_0(k)\to\dfrac{1}{3}$, $L_0^k\to L_{h\pm}^1$;

当 $k_1\to1$ 时, $\sigma_1(k_1)\to\dfrac{1}{3}$, $L_{r+}^{k_1}\to L_{h+}^1$, $L_{r-}^{k_1}\to L_{h-}^1$.

(v) 参看图 7.7.1, 如果 $\sigma\in\left(\dfrac{1}{3},1\right)$, 则两种类型的周期轨道 L_0^k 与 $L_{r\pm}^{k_1}$ 可能共存, 若 $\sigma>1$, 则仅存在振动型周期轨道 $L_0^k, k\in(k_0,1)$.

注 1　由 (7.7.31) 和 (7.7.32) 可看出 $\max\limits_{k,k_1}(B_0(k),B_r(k_1))=1$, $(7.7.10)_\varepsilon$ 的所有分枝周期轨道都位于三维相空间的一个有限区域内. 当 $k_1\to1, k\to1$ 时, 这些周期轨道都进入柱面 $w^2+z^2=1$ 的邻域内并且最终趋于两条同宿轨道.

定理 7.7.1 的证明　用作用–角度变量形式来改写 $M_i^0(B,\sigma,k)$ 和 $M_i^r(B,\sigma,k_1)$ $(i=1,3)$, 得到

$$M_1^0(I,\rho) = -\frac{2\pi}{\sqrt{B}}\left(\sigma + \frac{1}{3(B+\rho)}\right)I + \frac{32k^2\sqrt{B}}{3(B+\rho)}E(k),$$
$$M_3^0(I,\rho) = \frac{1}{\sqrt{B}}\left[\frac{\pi}{B}I + 4(B+\rho-(2k^2-1))K(k)\right],$$
$$M_1^r(I,\rho) = -\frac{2\pi}{\sqrt{B}}\left(\sigma - \frac{2-k_1^2}{3(B+\rho)k_1^2}\right)I - \frac{16\sqrt{B}(1-k_1^2)}{3(B+\rho)k_1^3}K(k_1),$$
$$M_3^r(I,\rho) = \frac{1}{\sqrt{B}}\left[\frac{\pi}{B}I + 2k_1\left(B+\rho-\frac{2-K_1^2}{k_1^2}\right)K(k_1)\right].$$

考虑到 $\dfrac{dI_k}{dk} = \dfrac{8Bk}{\pi}K(k), \dfrac{dI_r(k_1)}{dk_1} = -\dfrac{4BK(k_1)}{\pi k_1^2}$, 则有

$$\frac{\partial M_1^0}{\partial I} = -\frac{2\pi}{\sqrt{B}}\left[\sigma + \frac{1}{B+\rho} - \frac{2E(k)}{(B+\rho)K(k)}\right],$$
$$\frac{\partial M_1^0}{\partial \rho} = \frac{2\pi}{\sqrt{B}}\left[\frac{1}{3(B+\rho)^2} + \frac{32k^2\sqrt{B}}{3(B+\rho)^2}E(k)\right],$$
$$\frac{\partial M_3^0}{\partial I} = \frac{\pi}{B\sqrt{B}}\left[-1 + \frac{B+\rho-(2k^2-1)\pi}{16Bk^2(1-k^2)K(k)}I\right],$$
$$\frac{\partial M_3^0}{\partial \rho} = \frac{4}{\sqrt{B}}K(k).$$

用以上四个公式细致地计算可以证明, 当 $\sigma = \sigma_0(k), \rho = 0$ 时, Jacobi 行列式

$$\left.\frac{\partial(M_1^0(I,\rho), M_3^0(I,\rho))}{\partial(I,\rho)}\right|_{(\sigma_r(k_1),\rho_0=0)} \neq 0.$$

类似地,

$$\left.\frac{\partial(M_1^r(I,\rho), M_3^r(I,\rho))}{\partial(I,\rho)}\right|_{(\sigma_r(k_1),\rho_r=0)} \neq 0.$$

另一方面, 对 Mel′nikov 函数 $M_0(1,\sigma,1) = M_0(\sigma)$,

$$\frac{\partial(M_0(\sigma))}{\partial\sigma} = -1 \neq 0.$$

因此根据第 6 章的定理, 定理 7.7.1 的存在性结论正确, 周期轨道的稳定性证明类似于 Robbins (1979).

注 2 一般而言, 不必取 $\rho_0 = \rho_r = 0$. 只要求 $\rho_0 \ll 1$, $|\rho_r| \ll 1$. 利用本节的讨论, 可得到更一般的扰动系统的周期解和同宿轨道的存在性. 实际上, 定理 7.7.1 严格证明了在相柱面 (辛叶) 上的周期解和同宿轨道的存在性.

现在讨论 $b \neq 1$ 的情形, 即研究 Sparrow 模型 (7.7.4) 的约化系统 $(7.7.12)_\varepsilon$, 此

时, Mel′nikov 函数具有以下形式：

$$M_1(B,\sigma,b,k)=\int_{-T/2}^{T/2}\left[-\sigma y^2(t)+\frac{B}{B+\rho}((b-1)(B+\rho)\cos\theta(t)+b\sigma)\sin^2\theta(t)\right]dt,$$

$$M_3(B,\sigma,b,k)=\int_{-T/2}^{T/2}\left[(B+\rho)+b\sigma\cos\theta(t)+(B+\rho)(b-1)\cos^2\theta(t)\right]dt.$$

应用未扰动周期轨道的参数表示 (7.7.14) 和 (7.7.16), 计算上述积分得到以下的公式：

$$M_1^0(B,\sigma,b,k)=\frac{8}{\sqrt{B}}\left[(b-1)Bg_1^0(k)+\frac{b\sigma B}{B+\rho}g_2^0(k)-B\sigma g_3^0(k)\right], \tag{7.7.33}$$

$$M_3^0(B,\sigma,b,k)=\frac{4}{3\sqrt{B}}\left[(B+\rho)f_1^0(k)+b(B+\rho)f_2^0(k)-b\sigma f_3^0(k)\right], \tag{7.7.34}$$

$$M_1^r(B,\sigma,b,k_1)=\frac{4}{k_1\sqrt{B}}\left[(b-1)Bg_1^r(k_1)+\frac{b\sigma B}{B+\rho}g_2^r(k_1)-B\sigma g_3^r(k_1)\right], \tag{7.7.35}$$

$$M_3^r(B,\sigma,b,k_1)=\frac{2}{3k_1^3\sqrt{B}}\left[(B+\rho)f_1^r(k_1)+b(B+\rho)f_2^r(k_1)-b\sigma f_3^3(k_1)\right], \tag{7.7.36}$$

其中

$$\begin{cases} g_1^0(k)=-\dfrac{2}{15}[(16k^4-16k^2+1)E(k)+(8k^2-1)(1-k^2)K(k)],\\ g_2^0(k)=\dfrac{2}{3}[(2k^2-1)E(k)+(1-k^2)K(k)],\\ g_3^0(k)=2[(E(k)-(1-k^2)K(k))]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1^r(k_1)=-\dfrac{2}{15}[(k_1^4-16k_1^2+16)E(k_1)-8(1-k_1^2)(2-k_1)K(k_1)],\\ g_2^r(k_1)=\dfrac{2}{3}k_1^2[(2-k_1^2)E(k_1)-2(1-k_1^2)K(k_1)],\\ g_3^r(k_1)=2k_1^4E(k_1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1^0(k)=6g_2^0(k),\\ f_2^0(k)=-4(2k^2-1)E(k)+(4k^2-1)K(k),\\ f_3^0(k)=3[K(k)-2E(k)]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1^r(k_1)=6k_1^{-2}g_2^r(k_1),\\ f_2^r(k_1)=-4(2-k_1^2)E(k_1)+(3k_1^4-8K_1^2+8)K(k_1),\\ f_3^r(k_1)=3k_1^2[(2-k_1^2)E(k_1)-2E(k_1)]. \end{cases}$$

在 (7.7.33)~(7.7.36) 中取 $\rho=0$ 并令 $M_1^0=M_3^0=0$, $M_1^r=M_3^r=0$, 略去 f_i 和 g_i 中的上标, 可得

$$b=\frac{Bf_1}{\sigma f_3-Bf_2}=\frac{B(g_1+\sigma g_3)}{Bg_1+\sigma g_2}. \tag{7.7.37}$$

这说明参数 σ 满足以下的代数方程:

$$\sigma^2(f_3g_3)-\sigma(f_1g_2+f_3g_2+f_2g_3B)-Bg_1(f_1+f_2)=0. \tag{7.7.38}$$

为了研究这个方程的解, 注意 f_i 和 g_i 具有下述性质:

对于 $k\in(k_0,1)$,

$$g_1^0(k)<0,\ g_2^0(k)>0,\ g_3^0(k)>0,\ f_2^0(k)>0,\ f_3^0(k)>0;$$

对于 $k_1\in(0,1)$,

$$g_1^r(k_1)<0,\ g_2^r(k_1)>0,\ g_3^r(k_1)>0,\ f_2^r(k_1)>0,\ f_3^r(k_1)>0,$$

其中 $k\approx 0.91, \arcsin k_0\approx 65.5^\circ$, k_0 满足 $K(k_0)=2E(k_0)$. 因此, 由前面的关系可知, 对于 $k\in(k_0,1)$ 和 $k_1\in(0,1)$, (7.7.38) 的判别式

$$\begin{aligned}\Delta(k,B)&=(f_1g_2-f_3g_2+f_2g_3B)^2+4Bg_1g_3f_3(f_1+f_2)\\&=(f_1g_2-f_3g_2-f_2g_3B)^2+4Bf_2g_3(f_2g_2+g_1f_3)>0.\end{aligned}$$

又因 $f_2g_2+f_3g_1>0$, 故方程 (7.7.37) 有两个实解:

$$\sigma=\sigma_\pm(k,B)=\frac{(f_1g_2-f_3g_2+Bf_2g_3)\pm\sqrt{\Delta(k,B)}}{2f_3g_3}. \tag{7.7.39}$$

当 $k\in(k_0,1)$ 和 $k_1\in(0,1)$ 时, 易证

$$\begin{cases}\lim\limits_{k\to1}\dfrac{f_1^0(k)}{f_3^0(k)}=\lim\limits_{k_1\to1}\dfrac{f_1^r(k_1)}{f_3^r(k_1)}=0,\\ \lim\limits_{k\to1}\dfrac{f_2^0(k)}{f_3^0(k)}=\lim\limits_{k_1\to1}\dfrac{f_2^r(k_1)}{f_3^r(k_1)}=1,\\ \lim\limits_{k\to1}g_1^0(k)=\lim\limits_{k_1\to1}g_1^r(k_1)=-\dfrac{2}{15},\\ \lim\limits_{k\to1}g_2^0(k)=\lim\limits_{k_1\to1}g_2^r(k_1)=\dfrac{2}{3},\\ \lim\limits_{k\to1}g_3^0(k)=\lim\limits_{k_1\to1}g_3^r(k_1)=2;\end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1^0(k_0) = -\dfrac{2}{15}(2k_0^2-1)E(k_0), \quad g_2^0(k_0) = \dfrac{2}{3}E(k_0), \\ g_3^0(k_0) = 2(2k_0^2-1)E(k_0), \quad f_1^0(k_0) = 4E(k_0), \\ f_2^0(k_0) = 2E(k_0), \quad f_3^0(k_0) = 0, \\ f_1^0 + f_2^0 = 3K(k), \quad f_1^r + f_2^r = 3k_1^4 K(k). \end{cases}$$

当 $0<k<1$ 时, 根据 $K(k)$ 和 $E(k)$ 的幂级数展开式, 函数 g_i^r 和 f_i^r 可以表示为

$$\begin{cases} g_1^r(k_1) = -\pi\left(\dfrac{61}{128}k_1^8 + \cdots\right), \quad g_2^r(k_1) = \pi\left(\dfrac{1}{8}k_1^6 + \cdots\right), \\ g_3^r(k_1) = \pi k_1^4\left(1 - \dfrac{1}{4}k_1^2 + \cdots\right), \quad f_1^r(k_1) = \pi\left(\dfrac{3}{4}k_1^6 + \cdots\right), \\ f_2^r(k_1) = \pi\left(\dfrac{3}{4}k_1^4 + \cdots\right), \quad f_3^r(k_1) = \pi\left(\dfrac{3}{16}k_1^6 + \cdots\right). \end{cases}$$

注意到 $f_3>0$, 由以上表达式得

$$\begin{aligned} \sigma^{0,r}(1,B) &= \lim_{k,k_1\to 1}\sigma(k,B) \overset{\text{def}}{=} \sigma_\pm^{0,r}(1,B) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(B+\frac{1}{15}\right) \pm \left|B-\frac{1}{15}\right|\right], \end{aligned}$$

即当 $B>\dfrac{1}{15}$ 时,

$$\lim_{k,k_1\to 1}\sigma_+^{0,r}(k,B) = B, \quad \lim_{k,k_1\to 1}\sigma_-^{0,r}(k,B) = \frac{1}{15}.$$

而当 $B \leqslant \dfrac{1}{15}$ 时,

$$\lim_{k,k_1\to 1}\sigma_+^{0,r}(k,B) = \frac{1}{15}, \quad \lim_{k,k_1\to 1}\sigma_-^{0,r}(k,B) = B.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to k_0}\sigma_+^0(k,B) = +\infty, \\ &\lim_{k\to k_0}\sigma_-^0(k,B) = \frac{3B(2k_0^2-1)}{10+15B(2k_0^2-1)}, \\ &\lim_{k_1\to 0}\sigma_+^r(k,B) = +\infty, \\ &\lim_{k_1\to 0}\sigma_-^r(k,B) = 0. \end{aligned}$$

下面研究参数 b, 因为 b 是一个正实数且 $Bf_1 > 0$, (7.7.37) 表明当且仅当 $\sigma > (f_2/f_3)B$ 时 $b > 0$, 由 (7.7.39) 可知 $\sigma_-^{0,r} < (f_2, f_1)B$, 因此不能取 $\sigma_-^{0,r}$ 之值. 换言之,

$$b = b_+^{0,r}(k,B) = \frac{Bf_1^{0,r}}{\sigma_+^{0,r} f_3^{0,r} - Bf_2^{0,r}}. \tag{7.7.40}$$

注意到

$$\underset{k_1\to 0}{\sigma_+^0}(k,B)f_3^0 = \frac{2[2+3(2k_0^2-1)B]E(k_0)}{3(2k_0^2-1)},$$

由上面的计算可知, 当 $B > \dfrac{1}{15}$ 时,

$$\lim_{k\to k_0} b_+^0(k,B) = 3B(2k_0-1),$$

$$\lim_{k\to k_0} b_-^0(k,B) = \frac{1}{4(15B-1)}.$$

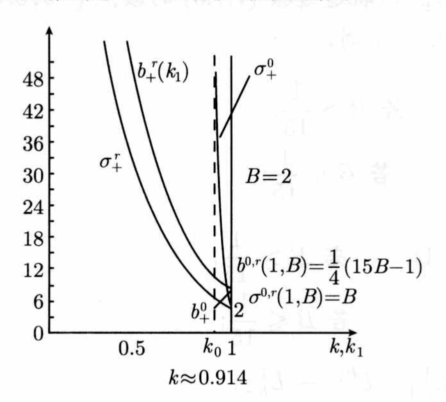
当 $B \leqslant \dfrac{1}{15}$ 时, $\lim\limits_{k,k_1\to 1} b_+^{0,r}(k,B) = 0$, 并且 $\lim\limits_{k_1\to 0} b_+^r(k_1,B) = +\infty$.

容易证明: 如果 $B > \dfrac{1}{3(2k_0^2-1)} \approx 0.508$, 则有

$$B < 3B(2k_0^2-1) < \frac{1}{4(15B-1)},$$

即 $B < b_+^0(k_0,B) < b_+^0(1,B)$, 以及 $b_+^{0,r} > 1$.

综合上述讨论, 对于固定的 B, 通过计算 f_i, g_i 与 k 和 k_1 有关的 σ 和 b 的参数表示可完全确定. 例如, 利用微机的帮助, 对于 $B > \dfrac{1}{15}$ 和 $B < \dfrac{1}{15}$ 两种情况, 可以画出如图 7.7.2 的参数曲线图.



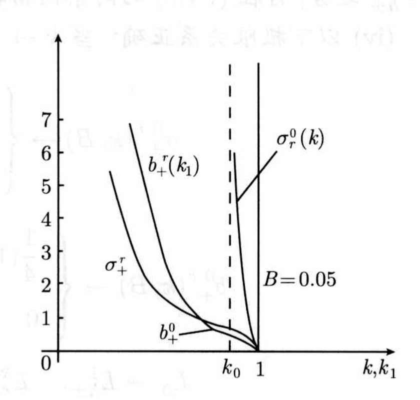


图 7.7.2 参数曲线图

最后考虑相柱面 $\eta^2 + z^2 = B^2 = \sigma^2$ 上同宿分枝问题. 对应于未扰动系统 $(7.7.10)_0$ 的同宿轨道, Mel′nikov 函数为

$$
\begin{aligned}
&M_0(B,\sigma,b,1)\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-\sigma y_h^2(t)+\frac{B}{B+\rho}((b-1)(B+\rho)\cos\theta_h(t)+b\sigma)\sin^2\theta_h(t)\right]dt\\
&=\frac{8}{\sqrt{B}}\left[-\frac{2}{15}(b-1)B+\frac{2b\sigma B}{3(B+\rho)}-2B\sigma\right].
\end{aligned}\tag{7.7.41}
$$

在上式中, 取 $\rho=0$ 和 $B=\sigma$ 并令 $M_0=0$, 得到

$$
\sigma=(4b+1)/15. \tag{7.7.42}
$$

因为 $\partial M_0/\partial b\neq 0$, 由第 6 章的定理可知, (7.7.42) 确定了同宿轨道分枝的参数值.

总结以上的讨论并应用图 7.7.2 的结果, 我们得到如下结论, 其证明与定理 7.7.1 的证明类似.

定理 7.7.2 (i) 对于固定的 $B>0$ 以及任何实数 $k\in(k_0,1)$, 如果参数 $\sigma=\sigma_+^0(k,B)$ 和 $b=b_+^0(k,B)$ 由 (7.7.39) 和 (7.7.40) 确定, 则在相柱面 $\eta^2+z^2=B^2$ 上的摆方程 $(7.7.12)_0$ 的振动型轨道 Γ_0^k 近旁, 存在系统 (7.7.5) 的一条稳定周期轨道 L_0^k.

(ii) 对于固定的 $B>0$ 以及任何实数 $k_1\in(0,1)$, 如果参数 $\sigma=\sigma_+^r(k,B)$ 和 $b=b_+^r(k,B)$ 由 (7.7.39) 和 (7.7.40) 确定, 则在相柱面 $\eta^2+z^2=B^2$ 上系统 $(7.7.12)_0$ 的两条对称旋转轨道 $\Gamma_{r\pm}^{k_1}$ 近旁, 存在 (7.7.5) 的两条不稳定周期轨道 $L_{r+}^{k_1}$ 和 $L_{r-}^{k_1}$.

(iii) 若 $\sigma=\dfrac{4}{15}b+\dfrac{1}{15}$, 则在相柱面 $\eta^2+z^2=\sigma^2$ 上系统 $(7.7.12)_0$ 的两条同宿轨道 $\Gamma_{h\pm}^1$ 近旁, 存在 (7.7.5) 的两条同宿轨道 $L_\pm^1$, 该轨道连接 (7.7.5) 的鞍点 $(-\sigma,0,0)$.

(iv) 以下极限关系正确: 当 $k\to 1$ 与 $k_1\to 1$ 时,

$$
\sigma_+^{0,r}(k,B)\to\begin{cases}B, & 若\ B>\dfrac{1}{15},\\[2mm] \dfrac{1}{15}, & 若\ B\leqslant\dfrac{1}{15};\end{cases}
$$

$$
b_+^{0,r}(k,B)\to\begin{cases}\dfrac{1}{4}(15B-1), & 若\ B>\dfrac{1}{15},\\[2mm] 0, & 若\ B\leqslant\dfrac{1}{15};\end{cases}
$$

$$
L_0^k\to L_{h\pm}^1,\quad L_{r+}^{k_1}\to L_{h+}^1\quad L_{r-}^{k_1}\to L_{h-}^1.
$$

(v) 仅当 $b\in\left(3B(2k_0^2-1),\dfrac{15B-1}{4}\right)$, $B>1/15$ 或 $b\in(0,3B(2k_0^2-1))$, $B\leqslant$

$1/15$ 时, 系统 (7.7.5) 有扰动的振动型周期轨道; 仅当 $b > (1/4)(15B-1), B > 1/15$ 或 $b > 0, B \leqslant 1/15$ 时, 系统 (7.7.5) 存在两条扰动的旋转周期轨道. 因此对同样的参数对 (b,σ), 若 $b(1,B) > b(k_0,B)$, 即 $B > (27-24k_0^2)^{-1} \approx 0.14$, 两种类型的周期轨道不可能共存.

注 3 (i) 定理 7.7.2 的结论 (iii)表明 Sparrow(1982) 所给出的参数平面 (b,σ) 划分是不精确的. 直线 $\sigma = \frac{4}{15}b + \frac{1}{15}$ 在周期轨道存在区域之外, 但在这条直线近旁, 存在 (7.7.5) 的周期轨道.

(ii) 定理 7.7.2 的结论 (v) 不同于 Sparrow 的结果.

(iii) 注意到 (7.7.5) 的奇点 $(-\sigma,0,0)$ 在相柱面 $\eta^2+z^2=\sigma^2$ 上, 并且对 (7.7.5) 的两类周期轨道, 参数 $\sigma > B$, 这意味着 (7.7.5) 的所有周期轨道都位于相柱面 $\eta^2+z^2=\sigma^2$ 之内, 若 B 增加, σ 也增加.

7.8 两个自由度 Hamilton 系统的混沌性质

考虑有两个自由度的 Hamilton 系统

$$H^\varepsilon(p_1,q_1,p_2,q_2) = F_1(p_1,q_1) + F_2(q_2,p_2) + \varepsilon H(q_1,q_2,p_1,p_2). \tag{7.8.1}$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, (7.8.1) 为一完全可积系统. 对 $F_2(q_2,q_2)$, 假设存在作用—角度变换

$$\begin{cases} I_2 = I_2(q_2,p_2), & \theta_2 = \theta_2(q_2,p_2), \\ q_2 = q_2(I_2,\theta_2), & p_2 = p_2(I_2,\theta_2), \end{cases} \tag{7.8.2}$$

能把系统 (7.8.1) 化为

$$H^\varepsilon(q_1,p_1,I_2,\theta_2) = F_1(q_1,p_1) + F_2(I_2,\theta_2) + \varepsilon H'(q_1,p_1,\theta_2,I_2). \tag{7.8.3}$$

如果 $F_1(q_1,p_1)$ 在相平面 (q_1,p_1) 上, 存在一条同宿轨道, 其对应的 Hamilton 量为 H_0, 而且在 $0 < h < h_0$ 时存在一族包含在同宿轨道内的闭轨道族. 那么我们可以引进如下 Mel′nikov 函数

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{F_1, H^1\}(t-t_0)dt, \tag{7.8.4}$$

其中 $\{F_1,H^1\}$ 是关于 $(q_{10}(t),p_{10}(t))$ 的 Poisson 括号, $(q_{10}(t),p_{10}(t))$ 对应于 $(F_1(q_1,p_1))$ 的同宿轨道参数方程. 则当 (7.8.1) 的 Mel′nikov 函数 $M(t_0)$ 存在简单零点时, 对于充分小的 ε, 系统 (7.8.1) 对每一个满足 Hamilton 量大于 h_0 的曲面, 存在马蹄, 即 (7.8.1) 存在混沌解.

1. 带有平方非线性的两个自由度 Hamilton 系统

电子迴旋加速器的振荡、弹簧摆的运动、船舶的运动、流体分界面的运动、旋转轴的运动、壳和复合板的振动、结构在受载静平衡位置附近的振动、柱的纵向和横向的耦合振动等大量非线性振动问题, 都可归结为带平方非线性的自由振动.

考虑带有平方非线性两个自由度 Hamilton 系统

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = \alpha_1 u_1^2 + \varepsilon(2\alpha_2 u_1 u_2 + \alpha_3 u_2^2), \\ \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = \varepsilon(\alpha_2 u_1^2 + 2\alpha_3 u_1 u_2 + \alpha_4 u_2^2), \end{cases} \tag{7.8.5}$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$, 不失一般性, 设所有参数都大于零. (7.8.5) 的 Hamilton 量为

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 u_1^2 - \frac{\alpha_1}{3}u_1^3 + \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 u_2^2 \\ & -\varepsilon(\alpha_2 u_1^2 u_2 + \alpha_3 u_2^2 u_1 + \frac{\alpha_4}{3}u_2^3), \end{aligned} \tag{7.8.6}$$

其中 $v_1 = \dot{u}_1, v_2 = \dot{u}_2$. 作变换 $(u_2, v_2) \to (I, \theta)$,

$$\begin{cases} u_2 = \sqrt{\dfrac{2I}{\omega_2}}\sin\theta, \\ v_2 = \omega\sqrt{\dfrac{2I}{\omega_2}}\cos\theta. \end{cases} \tag{7.8.7}$$

(7.8.6) 在 (u_1, v_1, I, θ) 变量下成为

$$H = F(u_1, v_1) + G(I) + \varepsilon H', \tag{7.8.8}$$

其中

$$\begin{aligned} & F_1(u_1, v_1) = \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}\omega^2 u_1^2 - \frac{\alpha_1}{3}u_1^3, \\ & G(I) = \omega_2 I, \\ & H' = -\left(\alpha_2\sqrt{\frac{2I}{\omega_2}}u_1^2\sin\theta + \alpha_3\frac{2I}{\omega_3}u_1\sin^2\theta + \frac{\alpha_4}{3}\left(\frac{2I}{\omega}\right)^{3/2}\sin^3\theta\right). \end{aligned}$$

这样 (7.8.6) 的无扰动系统为

$$H = F_1(u_1, v_1) + G(I). \tag{7.8.9}$$

在 (u_1, v_1) 相平面上, $F_1(u_1, v_1)$ 存在中心 (0,0), 双曲鞍点 $\left(\dfrac{\omega_1^2}{\alpha_1}, 0\right)$ 且有一条连结双曲鞍点的同宿轨道 Γ, Γ 对应的 Hamilton 量为

$$H = \frac{\omega_1^6}{6\alpha_1^2}. \tag{7.8.10}$$

当 $0 < H_K < \omega_1^6/6\alpha_1^2$ 时, 在 Γ 内部存在一族以 H_k 为参数的周期轨道. Γ 关于 t 的解为

$$\begin{cases} u_{10} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\omega_1^2}{\alpha_1}\mathrm{th}^2\left(\dfrac{\omega_2}{\alpha}t\right) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_1^2}{\alpha_1}, \\ v_{10} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\omega_1^3}{\alpha_1}\mathrm{sech}\left(\dfrac{\omega_1}{\alpha}t\right)\mathrm{th}\left(\dfrac{\omega_1}{2}\right). \end{cases} \tag{7.8.11}$$

对应于 $G(\Gamma)$ 的相平面上存在一族以 $\omega_2 I$ 为参数的周期轨道.

为此, 可以计算 (7.8.5) 沿同宿轨道的 Mel′nikov 函数

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{F, H\}(t - t_0)dt. \tag{7.8.12}$$

如果取 (7.8.5) 的 Hamilton 量满足如下条件

$$h > \omega_1^6/2\alpha_1^2. \tag{7.8.13}$$

则 (7.8.12) 就成为

$$\begin{aligned} M(t_0) = &\frac{2\alpha_2}{\omega_2}\sqrt{2(h - \omega_1^6/6\alpha^2)}\int_{-\infty}^{+\infty} u_{10}(t - t_0)v_{10}(t - t_{10})\sin\omega_2 tdt \\ &+ \frac{2\alpha_3}{\omega_2}(h - \omega_1^6/6\alpha_1^2)\int_{-\infty}^{+\infty} v_{10}(t - t_0)\sin^2\omega_2 tdt \\ = &\frac{2\pi\omega_2\alpha_2}{\alpha_1^2}\sqrt{2(h - \omega_1^6/6\alpha_1^2)}\left(\frac{3}{2}\omega_1^2 - 6\right)\mathrm{csch}\left(\frac{\pi\omega_2}{\omega_1}\right)\cos\omega_2\tau_0 \\ &+ \frac{48\pi\alpha_3}{\alpha_1}(h - \omega_1^6/6\alpha_1^2)\mathrm{csch}\left(\frac{2\pi\omega_2}{\omega_1}\right)\sin\alpha\omega_2 t_0. \end{aligned} \tag{7.8.14}$$

(7.8.14) 的表达式为振荡型, 因而 $M(t_0)$ 对于各种参数值存在简单零点. 由此可知, 当 ε 充分小时, 系统 (7.8.5) 对每一个满足 $h > \omega_1^6/6\alpha_1^2$ 的能量面, 存在马蹄, 也就是说 (7.8.5) 存在混沌解.

2. 带有立方非线性的两个自由度 Hamilton 系统

伸长量比较大的弦、梁、膜和板的振动, 动力隔振系统, 动力消振器, 球摆, 向心摆和双摆的运动以及非线性弹簧相连的质量的运动等许多问题都可归结为立方非线性系统的自由振动.

考虑带有立方非线性的两个自由度 Hamilton 系统:

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 = \alpha_1 u_1^3 + \varepsilon(3\alpha_2 u_1^2 u_2 + \alpha_3 u_1 u_2^2 + \alpha_4 u_2^3), \\ \ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 = \varepsilon(\alpha_2 u_1^3 + \alpha_3 u_1^2 u_2 + 3\alpha_4 u_1 u_2^2 + \alpha_5 u_2^2), \end{cases} \tag{7.8.15}$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$, 其他参数可假定都大于零. 记 (7.8.15) 的等价系统为

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = v_1, \\ \dot{v}_1 = -\omega_1^2 u_1 + \alpha_1 u_1^3 + \varepsilon(3\alpha_2 u_1^2 u_2 + \alpha_3 u_1 u_2^2 + \alpha_4 u_2^3), \\ \dot{u}_2 = v_2, \\ \dot{v}_2 = -\omega_2^2 u_2 + \varepsilon(\alpha_2 u_1^3 + \alpha_3 u_1^2 u_2 + 3\alpha_4 u_1 u_2^2 + \alpha_5 u_2^2). \end{cases} \tag{7.8.16}$$

则 (7.8.16) 的 Hamilton 量为

$$\begin{aligned} H = &\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 u_1^2 - \frac{\alpha_1}{4}u_1^4 + \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 u_2^2 \\ &-\varepsilon(\alpha_2 u_1^3 u_2 + \frac{\alpha_3}{2}u_1^2 u_2^2 + \alpha_4 u_2^3 u_1 + \frac{\alpha_5}{4}u_2^4). \end{aligned} \tag{7.8.17}$$

对 (u_2, v_2) 作如下辛变换:

$$\begin{cases} u_2 = \sqrt{\dfrac{2I}{\omega_2}}\sin\theta, \\ v_2 = \omega_2\sqrt{\dfrac{2I}{\omega}}\cos\theta. \end{cases} \tag{7.8.18}$$

(7.8.1) 在 (u_1, v_1, I, θ) 的变量下成为

$$H = F(u_1, v_1) + G(I) + \varepsilon H'(u_1, v_1, I, \theta), \tag{7.8.19}$$

其中,

$$\begin{aligned} &F(u_1, v_1) = \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 u_1^2 - \frac{\alpha_1}{4}u_1^4, \\ &G(I) = \omega_2 I, \\ &H'(u_1, v_1, I, \theta) = -\left(\alpha_2\sqrt{\frac{2I}{\omega_2}}u_1^3\sin\theta + \frac{\alpha_3 I}{\omega_2}u_1^2\sin^2\theta\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \alpha_4\left(\frac{2I}{\omega_2}\right)^{3/2}u_1\sin^3\theta + \frac{\alpha_5 I^2}{\omega_2^2}\sin^4\theta\right). \end{aligned}$$

(7.8.19) 的无扰动系统为

$$H = F(u_1, v_1) + G(I). \tag{7.8.20}$$

在 (u_1, v_1) 相平面上, $F(u_1, v_1)$ 有中心 (0,0) 以及双曲鞍点 $\left(\dfrac{\omega_1}{\sqrt{\alpha_1}}, 0\right), \left(-\dfrac{\omega_1}{\sqrt{\alpha_1}}, 0\right)$. 并且存在连接此两条异宿轨道, 它们对应的 Hamilton 量为 $H = \omega_1^4/4\alpha_1$, 其参数方程为

$$\begin{cases} u_{10} = \pm\dfrac{\omega_1}{\sqrt{\alpha_1}}\text{th}\left(\dfrac{\omega_1}{\sqrt{2}}t\right), \\ v_{10} = \pm\dfrac{\omega_1^2}{\sqrt{2\alpha_1}}\text{sech}^2\left(\dfrac{\omega_1}{\sqrt{2}}t\right). \end{cases} \tag{7.8.21}$$

当 $0 < H_k < \omega_1^4/4\alpha_1$ 时, 在由二条异宿轨道组成的异宿圈内存在一族包围 (0,0) 以 H_k 为参数的周期轨道族.

在 $G(I)$ 对应相平面上存在着一族以 $\omega_2 I$ 为参数的周期轨道. 当 (7.8.17) 的 Hamilton 量取成 $h > \omega_1^4/4\alpha_1$ 时, 此时的 Mel′nikov 函数为

$$\begin{aligned} M_\pm(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\{F, H'\}(t-t_0)dt \\ &= \frac{2\alpha_2}{\omega_2}\sqrt{2(h-\omega_1^4/4\alpha_1)}\int_{-\infty}^{+\infty}u_{10}^2(t-t_0)v_{10}(t-t_0)\sin\omega_2 tdt \\ &\quad+\frac{2\alpha_3}{\omega_2^2}(h-\omega_1^4/4\alpha_1)\int_{-\infty}^{+\infty}u_{10}(t-t_0)v_{10}(t-t_0)\sin^2\omega_2 tdt \\ &\quad+\frac{\alpha_4}{\omega_2^3}[2(h-\omega_1^4/4\alpha_1)]^{3/2}\int_{-\infty}^{+\infty}v_{10}(t-t_0)\sin^3\omega_2 tdt. \end{aligned} \tag{7.8.22}$$

经计算可得

$$\begin{aligned} M_\pm(t_0) = &\mp\frac{4\pi\omega_2^2\alpha_2}{\alpha_1\sqrt{\alpha_1}}\sqrt{h-\omega_1^4/4\alpha_1}\text{csch}\left(\frac{\sqrt{2}\pi\omega_2}{2\omega_1}\right)\sin\omega_2 t_0 \\ &+\frac{4\pi\alpha_3}{\alpha_1}(h-\omega_1^4/4\alpha_1)\text{csch}\left(\frac{\sqrt{2}\pi\omega_2}{\omega_1}\right)\sin 2\omega_2 t_0 \\ &\pm\frac{3\pi\alpha_4}{\omega_2^2\sqrt{\alpha_1}}(h-\omega_1^4/4\alpha_1)^{3/2}\text{csch}\left(\frac{\sqrt{2}\pi\omega_2}{2\omega_1}\right)\sin\omega_2 t_0 \\ &\mp\frac{3\pi\alpha_4}{\omega_2^2\sqrt{\alpha_1}}(h-\omega_1^4/4\alpha_1)^{3/2}\text{csch}\left(\frac{3\sqrt{2}\pi\omega_2}{2\omega_1}\right)\sin 3\omega_2 t_0. \end{aligned} \tag{7.8.23}$$

$M(t_0)$ 为振荡型. 因而对一般参数值, $M(t_0)$ 存在简单零点, 由此可见对于充分小的 ε, 系统 (7.8.16) 对每一个 $h > \omega_1^4/4\alpha_1$ 的能量面都存在马蹄, 因此 (7.8.16) 的解中蕴含了混沌性质.

为方便读者计算 Mel′nikov 积分, 作为本章的附录, 我们引用万世栋和李继彬 (1986) 的文章供参考.

附录　Jacobi 椭圆函数有理式的 Fourier 级数

1. 引言和记号

非线性动力系统的混沌与奇怪吸引子的研究, "在我们这个令人瞠目的抽象化时代里, 吹进了清新的具体化之风." 除了计算机实验之外, Mel′nikov 方法对于自治可积系统周期扰动的混沌性质研究, 是少有的精确分析方法之一. 由于无扰动可积系统的闭轨线族常常需用 Jacobi 椭圆函数有理式表示, 例如, 一切三次及部分四次代数闭曲线族, 其参数方程必可用椭圆函数确定. 因此, 计算 Mel′nikov 函数时, 常常涉及 Jacobi 椭圆函数 $\mathrm{sn}(u,k)$, $\mathrm{cn}(u,k)$, $\mathrm{dn}(u,k)$ 的有理函数与 $\sin n\omega t, \cos n\omega t$ 之乘积的积分, 即上述有理函数的 Fourier 级数的系数计算. 在 Byrd 等 (1971) 手册中未有这方面结果. Langebartel(1980) 针对地球卫星轨道, 地–月轨道理论与双星系统研究需要, 曾给出一组计算公式, 但因该文对参数 (α^2 和 β) 限制过窄, 满足不了应用要求. 考虑到这类积分计算技巧较高, 工作量大, 为避免重复性劳动, 现将作者们在研究中计算积累的上述文献中未有的结果整理发表, 以供应用数学与力学研究工作者参考.

以下对记号作一些说明. 关于第一、二、三类完全椭圆积分, Jacobi 椭圆函数的记号与 Byrd 等 (1971) 的书中相同. 为简化起见, 记

$$W_0 = \frac{\pi K'}{2K}, \quad W = \frac{\pi(K'-u_0)}{2K}, \quad W_1 = \frac{\pi(K'-u_0/2)}{2K}, \tag{1}$$

u_0 的意义见后面的公式中定义,

$$\begin{aligned} A(z,n) &= \exp(nz) + (-1)^n \exp(-nz), \\ B(z,n) &= \exp(nz) + (-1)^{n+1} \exp(-nz). \end{aligned} \tag{2}$$

2. Fourier 级数展开式

兹按五种类型录出作者们计算所得 Fourier 展式如下:

I. 有关 $\mathrm{sn}(u,k), \mathrm{cn}(u,k), \mathrm{dn}(u,k)$ 的幂函数.

I.1.1　$$\mathrm{sn}^2 u = \frac{K-E}{k^2 K} - \frac{\pi^2}{k^2K^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{csch}(2nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K}.$$

I.1.2　$$\mathrm{sn}^3 u = \frac{\pi}{8k^3K^3}\sum_{n=1}^{\infty}[4K^2(1+k^2)-(2n+1)^2\pi^2] \cdot \mathrm{csch}((2n+1)W_0)\sin\frac{(2n+1)\pi u}{2K}.$$

I.1.3 $$\mathrm{sn}^4u=\frac{(2+k^2)K-2(1+k^2)E}{3k^4K}+\frac{\pi^2}{3k^4K^4}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n\pi}{K}\right)^2+6n+(4-2k^2)\right]\cdot\mathrm{csch}2nW_0\cdot\cos\frac{n\pi u}{K}.$$

I.2.1 $$\mathrm{cn}^2u=\frac{E-k'^2K}{k^2K}+\frac{\pi}{k^2K^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{csch}(2nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K}.$$

I.2.2 $$\mathrm{cn}^3u=\frac{\pi}{8k^3K^3}\sum_{n=1}^{\infty}[(2n+1)^2\pi^2-4K^2(1-2k^2)]\cdot\mathrm{sech}((2n+1)W_0)\cos\frac{(2n+1)\pi u}{2K}.$$

I.2.3 $$\mathrm{cn}^4u=\frac{(2-3k^2)k'^2K+2(2k^2-1)E}{3k^4K}+\frac{\pi^2}{3k^4K^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n\pi}{K}\right)^2+4(2-k^2)\right]\cdot\mathrm{csch}(2nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K}.$$

I.3.1 $$\mathrm{dn}^2u=\frac{E}{K}+\frac{\pi^2}{K^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{csch}(2nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K}.$$

I.3.2 $$\mathrm{dn}^3u=\frac{\pi(2-k^2)}{4K}+\frac{\pi}{2K}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{n\pi}{K}\right)^2+2-k^2\right)\mathrm{sech}(2nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K}.$$

I.3.3 $$\mathrm{dn}^4=\frac{2(2-k^2)E-(1-k^2)K}{3K}+\frac{\pi^2}{6K^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left[(\frac{n\pi}{K})^2+4(2-k^2)\right]\cdot\mathrm{csch}(2nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K}.$$

I.3.4 $$\frac{1}{\mathrm{dn}^2u}=\frac{E}{k'^2K}+\frac{\pi^2}{k'^2K^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\mathrm{csch}(2nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K}.$$

I.3.5 $$\frac{1}{\mathrm{dn}^3u}=\frac{(2-k^2)\pi}{4k'^3K}+\frac{\pi}{2k'^3K}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\left(\frac{n\pi}{K}\right)^2+2-k^2\right]\cdot\mathrm{sech}(2nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K}.$$

I.3.6 $$\frac{1}{\mathrm{dn}^4u}=\frac{2(2-k^2)E-(1-k^2)K}{3k'^4K}+\frac{\pi^2}{6k'^4K^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left[\left(\frac{n\pi}{K}\right)^2+4(2-k^2)\right]\mathrm{csch}(2nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K}.$$

II. 有关 $\dfrac{1}{(1\pm\beta\mathrm{sn}u)^l}$ 的函数, $l=1,2$.

情况 1. $0<\beta<k, u_0$ 满足方程 $\mathrm{dn}(u_0,k)=\dfrac{k'}{\sqrt{1-\beta^2}}, 0<u_0<K$.

II.1.1 $$\frac{1}{1\pm\beta\mathrm{sn}u}=\frac{\Pi(\beta^2,k)}{K}+\frac{\beta\pi}{K\sqrt{(1-\beta^2)(k^2-\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi u_0}{2K}\cdot\mathrm{csch}(nW_0)\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right).$$

II.2.1 $$\frac{1}{(1\pm\beta\mathrm{sn}u)^2}=\frac{c_0}{4K}-\frac{\beta^2\pi}{K(1-\beta^2)(k^2-\beta^2)}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{csch}(nW_0)\left[\frac{n\pi}{2K}\cos\frac{n\pi u_0}{2K}-\frac{(2k^2-\beta^2-k^2\beta^2)}{\beta\sqrt{(1-\beta^2)(k^2-\beta^2)}}\sin\frac{n\pi u_0}{2K}\right]\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right),$$

其中

$$c_0=\frac{4}{(1-\beta^2)(k^2-\beta^2)}[(1-\beta^2)(2k^2-\beta^2-k^2\beta^2)\Pi(\beta^2,k)-\beta^2E+(\beta^2-k^2)E].$$

II.3.1 $$\frac{\mathrm{cn}u}{1\pm\beta\mathrm{sn}u}=\frac{\pi}{K\sqrt{k^2-\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi u_0}{2K}\mathrm{sech}(nW_0)\cdot\left(\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\pm\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right).$$

II.4.1 $$\frac{\mathrm{cn}u}{(1\pm\beta\mathrm{sn}u)^2}=-\frac{\beta\pi}{K\sqrt{1-\beta^2}}(k^3-\beta^2)\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sech}(nW_0)\cdot\left(\frac{n\pi}{2K}\cos\frac{n\pi u_0}{2K}-\frac{k^2\sqrt{1-\beta^2}}{\beta\sqrt{k^2-\beta^2}}\sin\frac{n\pi u_0}{2K}\right)\cdot\left(\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\pm\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right).$$

II.5.1 $$\frac{\mathrm{dn}u}{1\pm\beta\mathrm{sn}u}=\frac{\pi}{K\sqrt{1-\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\mathrm{sech}(nW_0)\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{2}\cdot\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{u}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right).$$

II.6.1 $$\frac{\mathrm{dn}u}{(1\pm\beta\mathrm{sn}u)^2}=\frac{\beta\pi}{K(1-\beta^2)(\sqrt{k^2-\beta^2})}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sech}(nW_0)\left(\frac{n\pi}{2K}\sin\frac{n\pi u_0}{2K}+\frac{\sqrt{k^2-\beta^2}}{\beta\sqrt{1-\beta^2}}\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\right)\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right).$$

II.7.1 $$\frac{\mathrm{cn}u\mathrm{dn}u}{1\pm\beta\mathrm{sn}u}=\frac{\pi}{2\beta K}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{csch}(nW_0)\left\{2\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\left[1+(-1)^n-2\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\cos\frac{n\pi}{2}\right]\sin\frac{n\pi u}{2K}\right\}.$$

II.8.1
$$\frac{\mathrm{cn}u\mathrm{dn}u}{(1\pm\beta\mathrm{sn}u)^2}=\frac{\pi}{K\sqrt{(1-\beta^2)(k^2-\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi u_0}{2K}\mathrm{csch}(nW_0)\cdot\left(\pm\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}-\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right).$$

情况 2. $k<\beta<1, u_0$ 满足方程 $\mathrm{dn}(u_0,k')=\dfrac{k}{\beta}, 0<u_0<K'$.

II.1.2
$$\frac{1}{1\pm\beta\mathrm{sn}u}=\frac{\Pi(\beta^2,k)}{K}+\frac{\beta\pi}{K\sqrt{(1-\beta^2)(\beta^2-k^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\sinh\frac{n\pi u_0}{2K}\cdot\mathrm{csch}(nW_0)\left(\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right).$$

II.2.2
$$\frac{1}{(1\pm\beta\mathrm{sn}u)^2}=\frac{c_0}{4K}+\frac{\beta^2\pi}{K(1-\beta^2)(k^2-\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\cosh\frac{n\pi u_0}{2K}\mathrm{csch}(nW_0)\cdot\left[\frac{n\pi}{2K}+\frac{\beta^2-2k^2+k^2\beta^2}{\beta\sqrt{(1-\beta^2)(\beta^2-k^2)}}\right]\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right),$$

其中 c_0 与 II.2.1 相同.

II.3.2
$$\frac{\mathrm{cn}u}{1\pm\beta\mathrm{sn}u}=\frac{\pi}{K(\sqrt{\beta^2-k^2})}\sum_{n=1}^{\infty}\sinh\frac{n\pi u_0}{2K}\mathrm{sech}(nW_0)\cdot\left(\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\pm\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right).$$

II.4.2
$$\frac{\mathrm{cn}u}{(1\pm\beta\mathrm{sn}u)^2}=\frac{\pi}{K(\sqrt{\beta^2-k^2})\sqrt{1-\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sech}(nW_0)\left[\frac{n\pi}{2K}\cosh\frac{n\pi u_0}{2K}-\frac{k\sqrt{1-\beta^2}}{\beta\sqrt{\beta^2-k^2}}\sinh\frac{n\pi u_0}{2K}\right]\left(\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\pm\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right).$$

II.5.2
$$\frac{\mathrm{dn}u}{1\pm\beta\mathrm{sn}u}=\frac{\pi}{K\sqrt{1-\beta^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\cosh\frac{n\pi u_0}{2K}\mathrm{sech}(nW_0)\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right).$$

II.6.2
$$\frac{\mathrm{dn}u}{(1\pm\beta\mathrm{sn}u)^2}=\frac{\beta\pi}{K(1-\beta^2)\sqrt{\beta^2-k^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{sech}(nW_0)\left[\frac{n\pi}{2K}\sinh\frac{n\pi u_0}{2K}+\frac{\sqrt{\beta^2-k^2}}{\beta\sqrt{1-\beta^2}}\cosh\frac{n\pi u_0}{2K}\right]\left(\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right).$$

II.7.2
$$\frac{\mathrm{cn}u\mathrm{dn}u}{1\pm\beta\mathrm{sn}u}=\frac{\pi}{2\beta K}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{csch}(nW_0)\left\{2\cosh\frac{n\pi u_0}{2K}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\left[1+(-1)^n-2\cosh\frac{n\pi u_0}{2K}\cos\frac{n\pi}{2}\right]\sin\frac{n\pi u}{2K}\right\}.$$

II.8.2 $$\frac{\mathrm{cn}u\mathrm{dn}u}{(1\pm\beta\mathrm{sn}u)^2}=\frac{\pi}{K\sqrt{(1-\beta^2)(\beta^2-k^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{csch}(nW_0)\sinh\frac{n\pi u_0}{2K}\cdot\left[\pm\cos\frac{n\pi}{2K}\cos\frac{n\pi u}{2K}-\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right].$$

情况 3. $1<\beta<+\infty$, u_0 满足方程 $\mathrm{cn}(u_0,k)=\dfrac{k'}{\sqrt{\beta^2-k^2}}$, $0<u_0<K$.

II.1.3 $$\frac{1}{1\pm\beta\mathrm{cn}u}=\frac{\Pi(\beta^2,k)}{K}-\frac{\beta\pi}{K\sqrt{(\beta^2-1)(\beta^2-k^2)}}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{n\pi u_0}{2K}\mathrm{ctnh}(nW_0)\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right).$$

II.3.3 $$\frac{\mathrm{cn}u}{1\pm\beta\mathrm{sn}u}=\frac{\pi}{K\sqrt{\beta^2-k^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\tanh(nW_0)\cdot\left(\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\pm\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right).$$

II.5.3 $$\frac{\mathrm{dn}u}{1\pm\beta\mathrm{sn}u}=-\frac{\pi}{K\sqrt{\beta^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi u_0}{2K}\tanh(nW_0)\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi u}{2K}\right).$$

II.7.3 $$\frac{\mathrm{cn}u\mathrm{dn}u}{1\pm\beta\mathrm{sn}u}=\frac{\pi}{2\beta K}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{csch}(nW_0)\left\{2\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\cosh(nW_0)\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\cos\frac{n\pi u}{2K}\mp\left[(-1)^n+1-2\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\cosh(nW_0)\cos\frac{n\pi}{2}\right]\sin\frac{n\pi u}{2K}\right\}.$$

III. 有关 $\dfrac{1}{(1\pm\beta\mathrm{cn}u)^l}$ 的函数, $l=1,2$.

情况 1. $0<\beta<1, u_0$ 满足方程 $\mathrm{cn}(u_0,k')=\beta, 0<u_0<K'$.

关于 $\dfrac{1}{(1\pm\beta\mathrm{cn}u)}, \dfrac{1}{(1\pm\beta\mathrm{cn}u)^2}, \dfrac{\mathrm{sn}u}{(1\pm\beta\mathrm{cn}u)}, \dfrac{\mathrm{dn}u}{(1\pm\beta\mathrm{cn}u)}, \dfrac{\mathrm{cn}u\mathrm{dn}u}{(1\pm\beta\mathrm{cn}u)}$ 的公式见文献 (Langebartel, 1980).

II.4.1 $$\frac{\mathrm{sn}u}{(1\pm\beta\mathrm{cn}u)^2}=\frac{\mp\pi}{K(1-\beta^2)(k^2+k'^2\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{A(W_0,n)}\cdot\left\{\frac{n\pi\beta\sqrt{1-\beta^2}}{2K}A(W;\mp n)-\frac{k^2(1-\beta^2)^2}{\sqrt{k^2+k'^2\beta^2}}B(W;\mp n)\right\}\cdot\sin\frac{n\pi u}{2K}.$$

II.6.1 $$\frac{\mathrm{dn}u}{(1\pm\beta\mathrm{cn}u)^2}=\frac{\pi}{2K(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}(k^2+k'^2\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\mp\frac{\pi}{K(1-\beta^2)(k^2+k'^2\beta)}$$

$$\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n\pi\beta\sqrt{k^2+k'^2\beta^2}}{2K}B(W;\mp n)\mp\frac{k^2+k'^2\beta^2}{1-\beta^2}A(W;\mp n)\right]$$
$$\cdot\frac{\cos(n\pi u/2K)}{A(W_0,n)}.$$

II.8.1 $$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{dn}u}{(1\pm\beta\mathrm{cn}u)^2}=\frac{\pi^2}{2K^2\sqrt{(1-\beta^2)(k^2+k'^2\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nB(W,\mp n)}{A(W_0,n)}\sin\frac{n\pi u}{2K}.$$

情况 2. $1<\beta<\infty, u_0$ 满足方程 $\mathrm{cn}(u_0,k)=\dfrac{1}{\beta}, 0<u_0<K$.

III.1.2 $$\frac{1}{1\pm\beta\mathrm{cn}u}=\frac{\pi}{(1-\beta^2)K}-\frac{\beta\pi}{K\sqrt{(\beta^2-1)(k^2+k'^2\beta^2)}}$$
$$\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A(W_0,\mp n)}{B(W_0,n)}\sin\frac{n\pi u_0}{2K}\cos\frac{n\pi u}{2K}.$$

III.3.2 $$\frac{\mathrm{sn}u}{1\pm\beta\mathrm{cn}u}=\pm\frac{\pi}{K\sqrt{k^2+k'^2\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(W,\mp n)}{A(W_0,n)}\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\sin\frac{n\pi u}{2K}.$$

III.5.2 $$\frac{\mathrm{dn}u}{1\pm\beta\mathrm{cn}u}=\pm\frac{\pi}{K\sqrt{\beta^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(W,\mp n)}{A(W_0,n)}\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\sin\frac{n\pi u}{2K}.$$

III.7.2 $$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{dn}u}{1\pm\beta\mathrm{cn}u}=\pm\frac{\pi}{K\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n-A(W,\mp n)}{B(W_0,n)}\cos\frac{n\pi u_0}{2K}\sin\frac{n\pi u}{2K}.$$

IV. 有关 $\dfrac{1}{(1\pm\beta\mathrm{dn}u)^l}$ 的函数, $l=1,2$.

情况 1. $0<\beta<1, u_0$ 满足方程 $\mathrm{dn}(u_0,k')=\dfrac{k}{\sqrt{1-k'^2\beta^2}}, 0<u_0<K'$.

IV.1.1 $$\frac{1}{1\pm\beta\mathrm{dn}u}=\frac{c_0}{2K}+\frac{2\beta\pi}{K\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\sinh\frac{n\pi u_0}{K}\mathrm{csch}(4nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K},$$

其中 $c_0=\dfrac{2}{1-\beta^2}\Pi\left(\dfrac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)-\dfrac{\beta\pi}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}$.

IV.2.1 $$\frac{1}{(1+\mathrm{dn}u)^2}=\frac{c_0}{2K}+\frac{2\beta\pi}{K(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n\beta\pi}{K}\cosh\frac{n\pi u_0}{K}\right.$$
$$\left.-\frac{2-\beta^2-k'^2\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}\frac{n\pi u_0}{K}\right\}\mathrm{csch}(4nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K},$$

其中 $$c_0=\frac{2(\beta^2E-K)}{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}+\frac{2(2-2\beta^2+k^2\beta^2)}{(1-\beta^2)^2(1-k'^2\beta^2)}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)$$
$$+\frac{\beta\pi(2-2\beta^2+\beta^2k^2)}{[(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)]^{\frac{3}{2}}}-\frac{2k\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}(1-k'^2\beta^2)}\arctan\frac{\beta k}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

IV.3.1 $$\frac{1}{1-\beta\mathrm{dn}u}=\frac{c_0}{2K}+\frac{2\beta\pi}{K\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\sinh(4nW_1)\mathrm{csch}(4nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K},$$

其中 $c_0=\dfrac{2}{1-\beta^2}\Pi\left(\dfrac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)+\dfrac{\beta\pi}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}$.

IV.4.1 $$\frac{1}{(1-\beta\mathrm{du})^2}=\frac{c_0}{2K}+\frac{2\beta\pi}{K\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n\beta\pi}{K}\cosh(4nW_1)+\frac{2-\beta^2-k'^2\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}\sinh(4nW_1)\right\}\mathrm{csch}(4nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K},$$

其中 $$c_0=\frac{2(\beta^2E-K)}{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}+\frac{2(2-2\beta^2+\beta^2k^2)}{(1-\beta^2)^2(1-k'^2\beta^2)}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)-\frac{\beta\pi(2-2\beta^2+\beta^2k^2)}{[(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)]^{\frac{3}{2}}}+\frac{2k\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}(1-k'^2\beta^2)}\arctan\frac{\beta k}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

IV.5.1 $$\frac{\mathrm{sn}u}{1+\beta\mathrm{dn}u}=\frac{2\pi}{kK\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\cosh\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}\cdot\mathrm{csch}(2(2n-1)W_0)\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

IV.6.1 $$\frac{\mathrm{sn}u}{(1+\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{\pi}{kK(1-k'^2\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{[(-1)^n-1]n\beta\pi}{2K\sqrt{1-\beta^2}}\sinh\frac{n\pi u_0}{2K}+\frac{[(-1)^n+1]}{\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\cosh\frac{n\pi u_0}{2K}\right\}\mathrm{csch}(2nW_0)\sin\frac{n\pi u}{2K}.$$

IV.7.1 $$\frac{\mathrm{sn}u}{1-\beta\mathrm{dn}u}=\frac{2\pi}{kK\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\cosh(2(2n-1)W_1)\mathrm{csch}(2(2n-1)W_0)\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

IV.8.1 $$\frac{\mathrm{sn}u}{(1-\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{\pi}{kK(1-k'^2\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{[1-(-1)^n]n\beta\pi}{2K\sqrt{1-\beta^2}}\sinh(2nW_1)+\frac{1+(-1)^n}{\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\cosh(2nW_1)\right\}\mathrm{csch}(2nW_0)\sin\frac{n\pi u}{2K}.$$

IV.9.1 $$\frac{\mathrm{cn}u}{1+\beta\mathrm{dn}u}=\frac{2\pi}{kK\sqrt{1-\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\sinh\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}\cdot\mathrm{csch}(2(2n-1)W_0)\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

IV.10.1 $$\frac{\mathrm{cn}u}{(1+\beta\mathrm{dn}u)^2}=-\frac{2\pi}{kK(1-\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(2n-1)\beta\pi}{2K\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\cosh\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\sinh\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}\right\}\mathrm{csch}(2(2n-1)W_0)\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

IV.11.1 $$\frac{\mathrm{cn}u}{1-\beta\mathrm{dn}u}=\frac{2\pi}{kK\sqrt{1-\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\sinh(2(2n-1)W_1)\mathrm{csch}(2(2n-1)W_0)$$
$$\cdot\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

IV.12.1 $$\frac{\mathrm{cn}u}{(1-\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{2\pi}{kK\sqrt{1-\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(2n-1)\beta\pi}{2K\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\cosh(2(2n-1)W_1)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\sinh(2(2n-1)W_1)\right\}$$
$$\cdot\mathrm{csch}(2(2n-1)W_0)\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

IV.13.1 $$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{1+\beta\mathrm{dn}u}=\frac{2\pi}{\beta k^2K}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sinh(2nW_0)-\cosh\frac{n\pi u_0}{K}\right]\mathrm{csch}(4nW_0)\sin\frac{n\pi u}{K}.$$

IV.14.1 $$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{(1+\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{2\pi^2}{k^2K\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}n\sinh\frac{n\pi u_0}{K}\mathrm{csch}(4nW_0)\sin\frac{n\pi u}{K}.$$

IV.15.1 $$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{1-\beta\mathrm{dn}u}=\frac{2\pi}{\beta k^2K}\sum_{n=1}^{\infty}[\cosh(2nW_1)-\sinh(2nW_0)]\mathrm{csch}(4nW_0)\sin\frac{n\pi u}{K}.$$

IV.16.1 $$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{(1-\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{2\pi^2}{k^2K\sqrt{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}n\sinh(4nW_1)\mathrm{csch}(4nW_0)\sin\frac{n\pi u}{K}.$$

情况 2. $1<\beta<\frac{1}{k'}$, u_0 满足方程 $\mathrm{dn}(u_0,k)=\frac{1}{\beta}$, $0<u_0<K$.

IV.1.2 $$\frac{1}{1+\beta\mathrm{dn}u}=\frac{c_0}{2K}-\frac{2\beta\pi}{K\sqrt{(\beta^2-1)(1-k'^2\gamma^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi u_0}{K}\cdot\mathrm{csch}(4nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K},$$

其中 $c_0=\frac{2}{1-\beta^2}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)$.

IV.2.2 $$\frac{1}{(1+\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{c_0}{2K}-\frac{2\beta\pi}{K(\beta^2-1)(1-k'^2\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n\beta\pi}{K}\cos\frac{n\pi u_0}{K}\right.$$
$$\left.-\frac{2-\beta^2-k'^2\beta^2}{\sqrt{(\beta^2-1)(1-k'^2\beta^2)}}\sin\frac{n\pi u_0}{K}\right\}\mathrm{csch}(4nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K},$$

其中 $c_0=\frac{2(\beta^2E-K)}{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)}+\frac{2(2-2\beta^2+\beta^2k^2)}{(1-\beta^2)^2(1-k'^2\beta^2)}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)$

$$-\frac{k\beta^2}{(\beta^2-1)^{\frac{3}{2}}(1-k'^2\beta^2)}\ln\frac{\beta k+\sqrt{\beta^2-1}}{\beta k+\sqrt{\beta^2-1}}.$$

IV.3.2 $$\frac{1}{1-\beta\mathrm{dn}u}=\frac{c_0}{2K}-\frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi u_0}{K}\mathrm{ctnh}(4nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K},$$

其中 $c_0=\dfrac{2}{1-\beta^2}\Pi\left(\dfrac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)$.

IV.5.2 $$\frac{\mathrm{sn}u}{1+\beta\mathrm{dn}u}=\frac{2\pi}{kK\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}\cdot\mathrm{csch}(2(2n-1)W_0)\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

IV.6.2 $$\frac{\mathrm{sn}u}{(1+\beta\mathrm{dn}u)^2}=-\frac{2\pi}{kK(1-k'^2\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(2n-1)\beta\pi}{2K\sqrt{\beta^2-1}\sin\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}}-\frac{1}{\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\cos\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}\right\}\mathrm{csch}(2(2n-1)W_0)\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

IV.7.2 $$\frac{\mathrm{sn}u}{1-\beta\mathrm{dn}u}=\frac{2\pi}{kK\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}\cdot\mathrm{ctnh}(2(2n-1)W_0)\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

IV.9.2 $$\frac{\mathrm{cn}u}{1+\beta\mathrm{dn}u}=\frac{2\pi}{kK\sqrt{\beta^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}\cdot\mathrm{csch}(2(2n-1)W_0)\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

IV.10.2 $$\frac{\mathrm{cn}u}{(1+\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{2\pi}{kK(\beta^2-1)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(2n-1)\beta\pi}{2K\sqrt{1-k'^2\beta^2}}\cos\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}-\frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}\sin\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}\right\}\cdot\mathrm{csch}(2(2n-1)W_0)\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

IV.11.2 $$\frac{\mathrm{cn}u}{1-\beta\mathrm{dn}u}=-\frac{2\pi}{kK\sqrt{\beta^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(2n-1)\pi u_0}{2K}\cdot\mathrm{ctnh}(2(2n-1)W_0)\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

IV.13.2 $$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{1+\beta\mathrm{dn}u}=\frac{2\pi}{\beta k^2K}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sinh(2nW_0)-\cos\frac{n\pi u_0}{K}\right\}\mathrm{csch}(4nW_0)\sin\frac{n\pi u}{K}.$$

IV.14.2 $$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{(1+\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{2\pi^2}{k^2K\sqrt{(\beta^2-1)(1-k'^2\beta^2)}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{n\pi u_0}{K}\cdot\mathrm{csch}(4nW_0)\sin\frac{n\pi u}{K}.$$

IV.15.2 $$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{1-\beta\mathrm{dn}u}=\frac{2\pi}{\beta k^2K}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\cos\frac{n\pi u_0}{K}\cosh(2nW_0)-\sinh(2nW_0)\right\}\cdot\mathrm{csch}(4nW_0)\sin\frac{n\pi u}{2K}.$$

情况 3. $\frac{1}{k'}<\beta<\infty, u_0$ 满足方程 $\mathrm{dn}(u_0,k')=\frac{k\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}, 0<u_0<K'$.

IV.1.3 $$\frac{1}{1+\beta\mathrm{dn}u}=\frac{c_0}{2K}+\frac{2\beta\pi}{K\sqrt{(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}}\sum_{n=1}^{\infty}\sinh\frac{n\pi u_0}{K}\mathrm{csch}(4nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K},$$

其中 $c_0=\frac{2}{1-\beta^2}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)+\frac{\beta\pi}{\sqrt{(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}}$.

IV.2.3 $$\frac{1}{(1+\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{c_0}{2K}+\frac{2\beta\pi}{K(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{n\beta\pi}{K}\cosh\frac{n\pi u_0}{K}+\frac{2-\beta^2-k'^2\beta^2}{\sqrt{(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}}\sinh\frac{n\pi u_0}{K}\right\}\mathrm{csch}(4nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K},$$

其中 $$c_0=\frac{2(\beta^2E-K)}{(1-\beta^2)(1-k'\beta^2)}+\frac{2(2-2\beta^2+\beta^2k^2)}{(1-\beta^2)^2(1-k'\beta^2)}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)\cdot\frac{\beta(2\beta k+\sqrt{\beta^2-1})}{(\beta^2-1)^{\frac{3}{2}}(k'\beta^2-1)}-\frac{1}{2k(\beta^2-1)^{\frac{3}{2}}}\ln\frac{\sqrt{\beta^2-1}-\beta k}{\sqrt{\beta^2-1}+\beta k}+\frac{\beta\pi(4-4\beta^2+3\beta^2k^2)}{2[(\beta^2-1)(k'\beta^2-1)]^{\frac{3}{2}}}-\frac{2\beta^3k^2}{[(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)]^{\frac{3}{2}}}\arctan\frac{\beta k}{\sqrt{\beta^2-1}}.$$

IV.3.3 $$\frac{1}{1-\beta\mathrm{dn}u}=\frac{c_0}{2K}+\frac{2\beta\pi}{K\sqrt{(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sinh(4nW_1)\mathrm{csch}(4nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K},$$

其中 $c_0=\frac{2}{1-\beta^2}\Pi\left(\frac{\beta^2k^2}{\beta^2-1},k\right)-\frac{\beta\pi}{\sqrt{(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}}$.

IV.4.3 $$\frac{1}{(1-\beta\mathrm{dn}u)^2}=\frac{c_0}{2K}+\frac{2\beta\pi}{K(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{n\beta\pi}{K}\cosh(4nW_1)-\frac{2-\beta^2-k'^2\beta^2}{\sqrt{(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}\sinh(4nW_1)}\right\}\mathrm{csch}(4nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K},$$

其中 $c_0 = \dfrac{2(\beta^2 E - K)}{(1-\beta^2)(1-k'^2\beta^2)} + \dfrac{2(2-2\beta^2+\beta^2k^2)}{(1-\beta^2)^2(1-k'^2\beta^2)}\Pi\left(\dfrac{\beta^2k^2}{\beta^2-1}, k\right)$

$$\cdot \frac{\beta(2\beta k + \sqrt{\beta^2-1})}{(\beta^2-1)^{\frac{3}{2}}(k'^2\beta^2-1)} + \frac{1}{2k(\beta^2-1)^{\frac{3}{2}}}\ln\frac{\sqrt{\beta^2-1}-\beta k}{\sqrt{\beta^2-1}+\beta k}$$

$$-\frac{\beta\pi(4-4\beta^2+3\beta^2k^2)}{2[(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\beta^3k^2}{[(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)]^{\frac{3}{2}}}\arctan\frac{\beta k}{\sqrt{\beta^2-1}}.$$

IV.5.3 $$\frac{\mathrm{sn}u}{1+\beta\mathrm{dn}u} = \frac{2\pi}{kK\sqrt{K'^2\beta^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\sinh\frac{n\pi u_0}{2K}\mathrm{csch}(2nW_0)\sin\frac{n\pi u}{2K}.$$

IV.6.3 $$\frac{\mathrm{sn}u}{(1+\beta\mathrm{dn}u)^2} = \frac{2\pi}{kK(k'^2\beta^2-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n\beta\pi}{2K\sqrt{\beta^2-1}}\cosh\frac{n\pi u_0}{2K}\right.$$
$$\left. -\frac{1}{\sqrt{K'^2\beta^2-1}}\sinh\frac{n\pi u_0}{2K}\right\}\sin\frac{n\pi}{2}\mathrm{csch}(2nW_0)\sin\frac{n\pi u}{2K}.$$

IV.7.3 $$\frac{\mathrm{sn}u}{1-\beta\mathrm{dn}u} = -\frac{2\pi}{kK\sqrt{K'^2\beta^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\sinh(2nW_1)\mathrm{csch}(2nW_0)\sin\frac{n\pi u}{2K}.$$

IV.8.3 $$\frac{\mathrm{sn}u}{(1-\beta\mathrm{dn}u)^2} = \frac{2\pi}{kK(k'^2\beta^2-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n\beta\pi}{2K\sqrt{\beta^2-1}}\cosh(2nW_1)\right.$$
$$\left. +\frac{1}{\sqrt{k'^2\beta^2-1}}\sinh(2nW_1)\right\}\sin\frac{n\pi}{2}\mathrm{csch}(2nW_0)\sin\frac{n\pi u}{2K}.$$

IV.9.3 $$\frac{\mathrm{cn}u}{1+\beta\mathrm{dn}u} = \frac{2\pi}{kK\sqrt{\beta^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\sinh\frac{n\pi u_0}{2K}\mathrm{csch}(2nW_0)\cos\frac{n\pi u}{2K}.$$

IV.10.3 $$\frac{\mathrm{cn}u}{(1+\beta\mathrm{dn}u)^2} = \frac{2\pi}{kK(\beta^2-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n\beta\pi}{2K\sqrt{K'^2\beta^2-1}}\sinh\frac{n\pi u_0}{2K}\right.$$
$$\left. -\frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}\cosh\frac{n\pi u_0}{2K}\right\}\sin\frac{n\pi}{2}\mathrm{csch}(2nW_0)\cos\frac{n\pi u}{2K}.$$

IV.11.3 $$\frac{\mathrm{cn}u}{1-\beta\mathrm{dn}u} = -\frac{2\pi}{kK\sqrt{\beta^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\cosh(2nW_1)\mathrm{csch}(2nW_0)\cos\frac{n\pi u}{2K}.$$

IV.12.3 $$\frac{\mathrm{cn}u}{(1-\beta\mathrm{dn}u)^2} = \frac{2\pi}{kK(\beta^2-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n\beta\pi}{2K\sqrt{k'^2\beta^2-1}}\sinh(2nW_1)\right.$$
$$\left. +\frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}\cosh(2nW_1)\right\}\sin\frac{n\pi}{2}\mathrm{csch}(2nW_0)\cos\frac{n\pi u}{2K}.$$

IV.13.3 $$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{1+\beta\mathrm{dn}u} = \frac{2\pi}{\beta k^2K}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sinh(2nW_0)-(-1)^n\cosh\frac{n\pi u_0}{K}\right]$$
$$\cdot\mathrm{csch}(4nW_0)\sin\frac{n\pi u}{K}.$$

IV.14.3 $\dfrac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{(1+\beta\mathrm{dn}u)^2}=\dfrac{2\pi^2}{k^2K\sqrt{(\beta^2-1)(k'^2\beta^2-1)}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\sinh\dfrac{n\pi u_0}{K}$

$$\cdot\,\mathrm{csch}(4nW_0)\sin\frac{n\pi u}{K}.$$

IV.15.3 $\dfrac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{1-\beta\mathrm{dn}u}=-\dfrac{2\pi}{\beta k^2K}\sum_{n=1}^{\infty}[\sinh(2nW_0)-(-1)^n\cosh(4nW_1)]$

$$\cdot\,\mathrm{csch}(4nW_0)\sin\frac{n\pi u}{2K}.$$

IV.16.3 $\dfrac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{(1-\beta\mathrm{dn}u)^2}=\dfrac{2\pi^2}{k^2K\sqrt{(\beta^2-1)(K'^2\beta^2-1)}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\sinh(4nW_1)$

$$\cdot\,\mathrm{csch}(4nW_0)\sin\frac{n\pi u}{K}.$$

V. 关于 $\dfrac{1}{(1\pm\beta^2\mathrm{sn}^2u)^l}$ 的函数, $l=1,2$.

对于 $\beta>0$ 的情形, 文献 (Langebartel, 1980) 中曾给出 $\dfrac{1}{(1+\beta^2\sinh^2u)^l}(l=1,2)$ 及其他几个函数的展开式, 本节将进一步给出该文中未有的一些结论. 注意椭圆函数之间有关系

$$1+\beta^2\mathrm{cn}^2u=(1+\beta^2)\left(1-\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\mathrm{sn}^2u\right),$$
$$1+\beta^2\mathrm{dn}^2u=(1+\beta^2)\left(1-\frac{\beta^2}{1-\beta^2k^2}\mathrm{sn}^2u\right),$$

并且

$$\frac{1}{1-\beta^2\mathrm{sn}^2u}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\beta\mathrm{sn}u}+\frac{1}{1+\beta\mathrm{sn}u}\right].$$

因此, 利用文献 (Langebartel, 1980) 的公式, 本文 II~IV 的公式以及以下的结果, 我们容易得到涉及 $(1\pm\beta^2\mathrm{cn}^2u)^{-1},(1\pm\beta^2\mathrm{dn}^2u)^{-1},(l=1,2)$ 形式的 Fourier 展式.

以下假设 $\beta>0,u_0$ 满足 $\mathrm{cn}(u_0,k')=\beta/\sqrt{1+\beta^2},0<u_0<K'$.

V.1 $\dfrac{\mathrm{sn}u}{1+\beta^2\mathrm{sn}^2u}=\dfrac{\pi}{K\sqrt{(1+\beta^2)(k^2+\beta^2)}}$

$$\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\sinh((2n-1)W)\mathrm{csch}((2n-1)W_0)\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

V.2 $\dfrac{\mathrm{sn}u}{(1+\beta^2\mathrm{sn}^2u)^2}=\dfrac{\pi}{2K(1+\beta^2)(k^2+\beta^2)}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{2k^2+(1+k^2)\beta^2}{\sqrt{(1+\beta^2)(k^2+\beta^2)}}\right.$

$$\cdot\cosh((2n-1)W)-\frac{(2n-1)\beta\pi}{2K}$$

$$\left.\cdot\sinh((2n-1)W)\right]\cdot\operatorname{csch}((2n-1)W_0)\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

V.3 $$\frac{\mathrm{cn}u}{(1+\beta^2\mathrm{sn}^2u)^2}=\frac{\pi}{K(1+\beta^2)(k^2+\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(2n-1)\pi\beta\sqrt{1+\beta^2}}{2K}\sinh((2n-1)W)\right.$$
$$\left.+\frac{\beta^4+(1+2k^2\beta^2+2k^2)}{\sqrt{k^2+\beta^2}}\cosh((2n-1)W)\right\}$$
$$\cdot\operatorname{sech}((2n-1)W_0)\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

V.4 $$\frac{\mathrm{dn}u}{1+\beta^2\mathrm{sn}^2u}=\frac{\pi}{2K\sqrt{1+\beta^2}}+\frac{\pi}{K\sqrt{1+\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\cosh(2nW)\operatorname{sech}(2nW_0)\cos\frac{n\pi u}{K}.$$

V.6 $$\frac{\mathrm{dn}u}{(1+\beta^2\mathrm{sn}^2u)^2}=\frac{\pi[\beta^4+(2+k^2)\beta^2+2k^2]}{4K(k^2+\beta^2)\sqrt{(1+\beta^2)^3}}$$
$$+\frac{\pi}{2K(1+\beta^2)(K^2+\beta^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n\beta\pi\sqrt{k^2+\beta^2}}{K}\sinh(2nW)\right.$$
$$\left.+\frac{\beta^4+(2+k^2)\beta^2+2k^2}{\sqrt{1+\beta^2}}\cosh(2nW)\right\}\cos\frac{n\pi u}{K}.$$

V.7 $$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{1+\beta^2\mathrm{sn}^2u}=\frac{\pi}{K\beta\sqrt{k^2+\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sech}(2nW_0)\sinh(2nW)\sin\frac{n\pi u}{K}.$$

V.8 $$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{(1+\beta^2\mathrm{sn}^2u)^2}=\frac{\pi}{2K\beta\sqrt{k^2+\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sech}(2nW_0)$$
$$\cdot\left[\frac{\beta n\pi}{K\sqrt{1+\beta^2}}\cosh(2nW)+\frac{k^2}{\sqrt{k^2+\beta^2}}\sinh(2nW)\right]\sin\frac{n\pi u}{K}.$$

V.9 $$\frac{\mathrm{sn}u\mathrm{cn}u}{(1+\beta^2\mathrm{sn}^2u)^2}=\frac{\pi}{2K\beta\sqrt{1+\beta^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sech}((2n-1)W_0)$$
$$\cdot\left[\frac{\beta n\pi}{2K\sqrt{1+\beta^2}}\cosh((2n-1)W)+\frac{k^2}{\sqrt{1+\beta^2}}\sinh((2n-1)W)\right]$$
$$\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

V.10 $$\frac{\mathrm{cn}u\mathrm{dn}u}{1+\beta^2\mathrm{sn}^2u}=\frac{\pi}{\beta K}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{csch}((2n-1)W_0)\sinh((2n-1)W)\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

V.11 $$\frac{\mathrm{cn}u\mathrm{dn}u}{1+\beta^2\mathrm{sn}^2u}=\frac{\pi}{2\beta K}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{csch}((2n-1)W_0)$$
$$\cdot\left[\frac{n\beta\pi\cosh((2n-1)W)}{2K\sqrt{(1+\beta^2)(k^2+\beta^2)}}+\sinh((2n-1)W)\right]\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2K}.$$

第 8 章　秩一吸引子的概念和混沌动力学

秩一吸引子的概念起源于 Benedicks 和 Carleson (1991) 关于 Hénon 映射的研究以及 Benedicks 和 Young (1993, 1994) 对这些研究工作的发展. Qiudong Wang 和 Lai-Sang Young (2001, 2008, 2010) 系统地把该理论发展成了秩一吸引子理论. 研究秩一吸引子的主要目的在于通过建立非一致双曲映射的理论来研究和分析微分方程的动力学行为. 这个目标分为两步实现: 首先, 根据给定的微分方程, 引入非一致双曲映射的概念和模型, 发展 Hénon 映射的动力学, 建立更广泛的混沌理论. 其次, 应用新的理论去分析具体的微分方程解的性质.

在秩一理论发展之前, Mora 和 Viana (1993) 曾应用 Newhouse (1974) 的理论把 Hénon 映射理论应用于横截同宿相切映射, 具体内容见文献 (Diaz et al., 1996).

8.1　秩一吸引子的概念和混沌动力学理论

8.1.1　可允秩一映射族

对 $m \geqslant 2$, 记 $\mathcal{A} = S \times D^{m-1}$, 其中 S 是单位圆周, D^{m-1} 是 $m-1$ 维单位圆盘. 对微分同胚 $T_{a,b}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, 考虑 2 参数映射族 $\{T_{a,b},\ (a,b) \in (a_0, a_1) \times (0, b_0)\}$. 设 $(x_1, y_1) = T_{a,b}(x, y)$, 于是 $T_{a,b}$ 定义为

$$
\begin{aligned}
x_1 &= F(x,y,a) + bu(x,y,a,b),\\
y_1 &= bv(x,y,a,b),
\end{aligned}
\tag{8.1.1}
$$

其中 $x \in S,\ y \in D^{m-1}$. 假设 $F(x,y,a), u(x,y,a,b), v(x,y,a,b)$ 是 (x,y,a,b) 的 C^3 函数, 且它们的 C^3-范数一致有界于 K_0. 此处 K_0 是与 a, b 无关的常数.

记 $f_a(x) = F(x, 0, a)$, 称 $f_a: S \to S$ 为 $T_{a,b}$ 的一维奇异极限映射. 在 (8.1.1) 中, 取 $b = 0$, 即得 $\{f_a\}$. 对充分小的 b, m-维映射 $T_{a,b}$ 可以看作一维奇异极限 f_a 的开折. 用 $C(a) = \{x : f_a'(x) = 0\}$ 表示 f_a 的临界点集. 假设对所有的 $x \in C(a)$, $|\partial_y F(x,0,a)| \neq 0$, 这意味着在 $C(a)$ 上, 从 f_a 到 $T_{a,b}$ 的开折在 y 方向非退化. 再假设对所有的 $z, z' \in \mathcal{A}$,

$$
\frac{\det(DT_{a,b}(z))}{\det(DT_{a,b}(z'))} < K,
$$

其中 K 是与 b 无关的常数. 这个条件说明切映射在相空间的作用是正则的.

下面对奇异极限映射 $\{f_a\}$ 作一些假设. 首先假设存在 $a_* \in (a_0, a_1)$, 使得 f_{a_*} 是 Misiurewicz 映射. 这个映射是最简单的一维非一致扩张映射 (Misiurewicz, 1981), 它的所有临界点轨道都与临界点集保持一定的距离. 此外, 还要在点 $a = a_*$ 对 f_a 增加参数横截性条件, 即当 a 在 a_* 附近变化时, f_a 的动力学有本质的改变. 这两个条件的精确描述比较繁琐, 有兴趣的读者可参考文献 (Wang et al., 2008). 但重要的是这两个条件都可验证. 例如, 对映射

$$f_a(\theta) = \theta + a + L\Phi(\theta), \tag{8.1.2}$$

假设 $\Phi(\theta)$ 的所有临界点都是非退化的, 则 Wang 和 Young (2002) 已经证明, 对充分大的 L, 存在 a_* 使得 f_{a_*} 是 Misiurewicz 映射, 且在 $a = a_*$ 处满足参数的横截性条件.

满足上面这些条件并有形式 (8.1.1) 的二参数映射族 $T_{a,b}$ 称为可允秩一映射族.

8.1.2 秩一吸引子的存在性

如果一维奇异极限映射 f_a 是一致扩张的, 则 $T_{a,b}$ 就是公理 A 螺线管映射 (Smale, 1967). 此时, $T_{a,b}$ 在 x-方向拉伸, y-方向压缩, 它的像在 x-方向绕几圈后再放回到 $\mathcal{A}$ 中. 如此所得不变集的切空间一定存在两个方向: 一个稳定方向和一个不稳定方向. 这样的吸引子为一致双曲吸引子, 见图 8.1.1(a).

如果 $T_{a,b}$ 是可允秩一映射, 则它的一维奇异极限 f_a 非一致扩张, 见图 8.1.1(b). 它在 x-方向绕圈时只要遇到 f_a 的临界点就反方向绕圈. 这样的吸引子不存在切空间的全局稳定和不稳定方向.

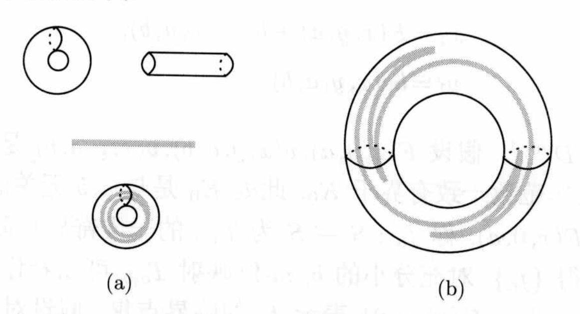


图 8.1.1　(a) 公理 A 螺线管, (b) 秩一吸引子

正是由于切空间不存在全局的稳定和不稳定方向, 图 8.1.1(b) 的可允秩一映射动力学与图 8.1.1(a) 的公理 A 螺线管动力学截然不同. 在秩一吸引子中, 渐近稳定的周期轨道可以与 Smale 马蹄共存. 从测度论的观点来看, 因为渐近稳定的周期轨道有一个正测度的吸引域, 而马蹄的吸引域为零测度集, 故渐近稳定的周期轨道在

数值模拟中直接可观测到, 而马蹄则难以观测. 对图 8.1.1(b) 的可允秩一映射, 是否存在可观测的混沌现象呢? 是否存在这样的秩一映射, 它在某个正测度集上具有正的 Lyapunov 指数? 回答这些问题仅有 Smale 马蹄的知识是不够的.

历史上, 人们首先对 Hénon 映射提出了这样的问题, 但一直到 Benedicks 和 Carleson 对 Hénon 映射的分析出现后, 这些问题才得到了解决. Wang 和 Young (2001) 对可允秩一映射推广了 Benedicks 和 Carleson 的分析, 并得到如下秩一吸引子混沌理论的主要定理.

定理 8.1.1 设 $\{T_{a,b}:(a,b)\in(a_1,a_2)\times(0,b_0)\}$ 是可允秩一映射族, 则存在正测度参数集 $\Delta\subset(a_1,a_2)\times(0,b_0)$, 使得对所有的 $(a,b)\in\Delta$, $T_{a,b}$ 在 $\mathcal{A}$ 中 (在 Lebesgue 测度意义下) 几乎处处的点都有正的 Lyapunov 指数.

秩一吸引子混沌理论的内容包括两部分: 第一部分是去构造满足定理的正测度参数集; 第二部分是通过好参数映射所反映出来的局部动力学性质来研究秩一吸引子的全局混沌动力学.

8.1.3 好参数集的归纳构造

设 $\{T_{a,b}\}$ 为可允秩一映射族, 对 $T=T_{a,b}$, 用 $\Omega=\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty}T^n(\mathcal{A})$ 表示 T 的吸引子. Wang 和 Young (2001) 通过精细的归纳过程构造正测度的好参数集 Δ 来证明定理 8.1.1. 对 $(a,b)\in\Delta$, 映射 $T=T_{a,b}$ 存在临界集 $\mathcal{C}\subset\Omega$, 且该临界集满足:

(i) $\mathcal{C}$ 中的每一点是局部稳定流形和不稳定流形的二次切点;

(ii) 所有临界点的轨道 $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}T^n(\mathcal{C})$ 是 T 在 Ω 中所有的稳定流形和不稳定流形的切点.

对于好参数映射, 临界集 $\mathcal{C}$ 是一个 Cantor 集, 它位于一维奇异极限的临界点附近. 令 x_0 是 f_{a_*} 的临界点, 对固定的小 $\delta>0$, 记 $Q(x_0)=[x_0-\delta,x_0+\delta]\times D^{m-1}$. 对于不同的临界点 $x_0\in\mathcal{C}(a_*)$, 可得到有限个这样的柱形. 在 T 的每一次作用下都用有限个更细更短的小柱形去替代前面的每一个柱形, 最终得到 Cantor 集 $\mathcal{C}$, 见图 8.1.2.

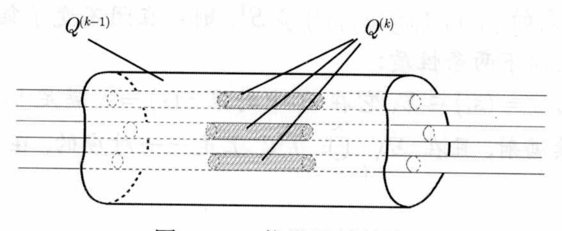


图 8.1.2 临界区域结构

好参数集与临界集 $\mathcal{C}$ 的构造都是一步一步归纳得到. 每一步始于暂时的好参数集和一些小临界柱形 $Q^{(k-1)}$. 下一步在每个 $Q^{(k-1)}$ 内构造新的临界柱形 $Q^{(k)}$ 时

要去掉一些参数, 这些参数破坏局部稳定流形与不稳定流形的二次相切性质. Wang 和 Young 证明, 每一步替代后去掉的参数集测度呈指数下降. 最后得到一个正测度的参数集, 使得映射有如上定义的临界集.

以上描述的参数归纳过程和定理 8.1.1 的证明比较长, 详细内容见文献 (Wang et al., 2001, 2008, 2010).

8.1.4 秩一吸引子的混沌动力学

通过上节的逐步归纳过程我们得到了一类新的混沌吸引子. 这类混沌吸引子是一类真正的非一致双曲吸引子. 它的稳定方向和不稳定方向在切映射下不是保持不变, 而是稳定方向会变成不稳定方向, 不稳定方向也会变成稳定方向. Wang 和 Young (2001) 所建立的秩一理论, 提供我们在几何动力学结构上全面地理解混沌秩一吸引子. 记 $T = T_{a,b}$, 其中 $(a, b) \in \Delta$ 为好参数. 令 $\Omega = \bigcap_{n=0}^{+\infty} T^n(\mathcal{A})$ 为混沌吸引子, $\mathcal{C}$ 为 T 的临界集. 下面介绍三个定理, 这些定理的二维证明见文献 (Wang et al., 2001), 高维的证明见文献 (Wang et al., 2008, 2010).

1. 双曲结构和符号动力学

定理 8.1.2 对任给的 $\varepsilon > 0$,

$$\Lambda_\varepsilon = \{z = (x, y) \in \Omega, d(T^n(z), \mathcal{C}) \geqslant \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

是 Ω 的一致双曲不变子集.

定理 8.1.2 说明临界集 $\mathcal{C}$ 是导致 Ω 中非一致双曲性的真正原因.

下面对 Ω 中的轨道进行编码. 令 $x_1 < x_2 < \cdots < x_q < x_{q+1} = x_1$ 为 f_{a_*} 的临界点, $\mathcal{C}_i$ 为 $\mathcal{C}$ 中靠近 $(x_i, 0) \in \mathcal{A}$ 的那部分. 令 $\Sigma_q = \prod\limits_{-\infty}^{\infty} \{1, 2, \cdots, q\}$ 为 q 个符号的符号空间, $\sigma : \Sigma_q \to \Sigma_q$ 为移位映射.

定理 8.1.3 (a) 不变子集 $\Omega \backslash \mathcal{C}$ 可以分割成互不相交的 q 部分: $A_1, A_2, \cdots, A_q$. 其中点 $z \in A_i$ $(i = 1, 2, \cdots, q)$ 既落在 $\mathcal{C}_i$ 的右边, 也落在 $\mathcal{C}_{i+1}$ 的左边;

(b) 假设对任意的 j, $f_{a_*}([x_j, x_{j+1}]) \not\supseteq S^1$, 则存在闭不变子集 $\Sigma \subset \Sigma_q$, 使得映射 $\pi : \Sigma \to \Omega$ 满足以下两条性质:

(b$_1$) 对任意的 $s = (s_i) \in \Sigma$, 它在 Ω 中的像 $\pi(s) = z$ 满足 $\forall i$, $T^i z \in \bar{A}_{s_i}$;

(b$_2$) π 是连续满射, 且在 $\Sigma \backslash \bigcup\limits_{i=-\infty}^{\infty} T^i\mathcal{C}$ 上是一一对应的, 在 $\bigcup\limits_{i=-\infty}^{\infty} T^i\mathcal{C}$ 上是二对一的.

2. 统计性质

在混沌秩一吸引子上的点, 个别轨道以几乎随机的方式跳来跳去, 每个轨道的发展趋向几乎完全不可预测. 然而, $\mathcal{A}$ 中几乎所有 (在 Lebesgue 测度意义下) 轨道

的渐近分布是有统计规律的. 确切地说, 首先把 $\mathcal{A}$ 分解为若干互不相交的子区域的集合. 对 $\mathcal{A}$ 中从任一初始点经过 T 的有限次迭代后得到有限个点组成的轨道, 我们通过数在每个子区域上属于该轨道点的个数来为每次分解定义一个历史记录(并对每次分割的结果绘出直方图). 然后取两种极限: 一种极限是令迭代次数趋于无穷, 从而 T 的轨道的点的个数趋于无穷; 另一种极限是加细区域的分割, 使得小区域的最大直径趋于零. 原则上, 在任何一个或两个极限过程中, 不存在任何的原因能预知上述的历史记录会收敛.

但是, 对于混沌秩一吸引子, 对 $\mathcal{A}$ 中几乎所有 (在 Lebesgue 测度意义下) 轨道而言, 不仅上述的历史记录会收敛, 而且它们收敛于有限个数的概率分布. 这些极限分布就是 T 的 Sinai-Ruelle-Bowen(SRB) 测度.

定理 8.1.4 映射 T 至少存在一个, 至多 q 个, 遍历 SRB 测度, 其中 q 是一维奇异极限映射 f_a 的临界点个数.

文献 (Young, 2002) 给出了更多关于 SRB 测度理论的内容. 除了定理 8.1.4 之外, 混沌秩一吸引子还具有中心极限定理、指数混合率以及大方差准则等很好的动力学性质 (Young, 1998; Wang et al., 2010).

8.2 在常微分方程中的应用

秩一吸引子混沌理论在用具体的微分方程作为模型的工程系统中有许多应用. 本节介绍三个实例.

8.2.1 有同宿轨道的系统的周期扰动

如第 6, 7 章所述, 在一定的扰动参数条件下, 周期扰动的二维自治系统同宿到鞍点的同宿轨道, 可能产生稳定流形和不稳定流形横截相交, 从而产生同宿缠结以及混沌动力学. 同时也存在参数值, 使得稳定流形和不稳定流形扰动后分开. 图 8.2.1 显示了时间 T 映射的两种情况, 其中 T 为受迫力的周期.

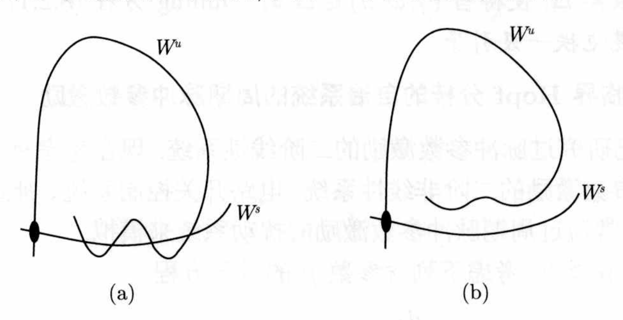


图 8.2.1 (a) 不变流形的同宿相交; (b) 不相交的不变流形

早期的研究者只考虑出现图 8.2.1(a) 的同宿缠结, 通过稳定流形和不稳定流形的横截相交来证明混沌性质的存在, 而不考虑图 8.2.1(b) 的情形.

Afraimovich 和 Shilnikov (1977) 研究了图 8.2.1(b) 的混沌性. 他们建议用返回映射研究同宿轨道的周期扰动动力学. 该返回映射是扩张相空间中同宿轨道邻域内的返回映射. 他们发现, 如果扰动频率充分大, 那么在图 8.2.1 的情形 (b), 扰动系统也存在马蹄动力学.

在 Afraimovich 和 Shilnikov 研究的基础上, Wang 和 Ott (2011) 严格推导了具有同宿到鞍点的同宿轨道的系统在周期扰动下的返回映射表达式. 他们证明当鞍点是耗散的而且非共振时, 返回映射是一族秩一映射, 其一维奇异极限具有下列形式:

$$f_a(\theta) = \theta + a + \frac{\omega}{\beta}\ln M(\theta),$$

其中 ω 是外力频率, β 是鞍点的不稳定特征值, $M(\theta)$ 为 Mel'nikov 函数, 常数 a 为

$$a = \frac{\omega}{\beta}\ln\mu^{-1} + K,$$

其中 μ 是扰动参数, K 是由方程确定的常数. 如果 Mel'nikov 函数 $M(\theta)$ 满足 $\min_\theta M(\theta) > 0$ (此即图 8.2.1 的情形 (b)), 且 $M(\theta)$ 的所有临界点非退化, 则当外力频率充分大时, 返回映射是一族可允秩一映射. 因此存在参数 μ 的正测度集, 使得扰动方程出现混沌的秩一吸引子.

考虑 Duffing 方程:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + (\lambda - \gamma q^2)\frac{dq}{dt} - q + q^3 = \mu\sin\omega t. \tag{8.2.1}$$

当 $\mu = 0$ 时, 易证对充分小的 $\lambda_0 > 0$, 存在 $\gamma = \gamma_0$, 使得方程 (8.2.1) 有同宿到鞍点的同宿轨道 ℓ_0. Wang 和 Ott (2011) 证明的下列定理说明, 在 ℓ_0 的邻域内存在直接可观测的全局混沌吸引子.

定理 8.2.1 *对上述给定的参数 $\lambda_0 > 0, \gamma_0$ 和同宿轨道 ℓ_0, 在 $(\gamma_0, \infty, 0)$ 附近存在正测度参数集 Δ, 使得当 $(\gamma, \omega, \mu) \in \Delta$ 时, Duffing 方程 (8.2.1) 在 ℓ_0 的开邻域内存在唯一的混沌秩一吸引子.*

8.2.2 具有超临界 Hopf 分枝的自治系统的周期脉冲参数激励

在 3.2 节已研究过脉冲参数激励的二阶线性系统. 现在考虑有 Hopf 分枝极限环的周期脉冲参数激励的二阶非线性系统. 电路开关控制系统、神经科学、生态学的数学模型, 常常通过周期脉冲参数激励的扰动系统来模拟.

设 $x \in \mathbb{R}^m, m \geqslant 2$. 考虑下列含参数 μ 的微分方程:

$$\frac{dx}{dt} = A_\mu x + f_\mu(x), \tag{8.2.2}$$

其中 A_μ 是 $m \times m$ 矩阵, 向量值函数 $f_\mu(x)$ 关于 x 至少是 2 阶. 假设在 $\mu = 0$ 附近, 矩阵 A_μ 有一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = a(\mu) \pm \omega(\mu)\sqrt{-1}$, 满足 $a(0) = 0, \omega(0) \neq 0$. A_μ 的其他 $m-2$ 个特征值均具有负实部. 在 $x = 0$ 处, 方程 (8.2.2) 有局部中心流形 W^c, 其上诱导的方程可用复变量表示为下列规范型:

$$\dot{z} = (a(\mu) + i\omega(\mu))z + k_1(\mu)z^2\bar{z} + k_2(\mu)z^3\bar{z}^2 + \cdots, \tag{8.2.3}$$

这里, $k_1(\mu)$, $k_2(\mu)$ 是复数. 当 $\mathrm{Re}(k_1(0)) \neq 0$ 时方程 (8.2.2) 将从平衡点 $x = 0$ 产生小振幅的周期解, 称为 Hopf 分枝. 当 $\mathrm{Re}(k_1(0)) < 0$ 时, 称为超临界 Hopf 分枝; 当 $\mathrm{Re}(k_1(0)) > 0$ 时, 称为次临界 Hopf 分枝.

对方程 (8.2.2) 增加周期脉冲扰动得到下列新方程:

$$\frac{dx}{dt} = A_\mu x + f_\mu(x) + \varepsilon\Phi(x)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT), \tag{8.2.4}$$

其中 ε 表示外力的强度, $\Phi(x)$ 满足 $\Phi(0) = 0$, $\delta(t)$ 为 δ-函数.

对小的 μ 值, 在稳定周期解邻域内计算时间 T 映射. 计算结果表明, 该时间 T 映射是一族秩一映射, 它的一维奇异极限有下列形式:

$$f_a(\theta) = \theta + a + L\phi(\theta),$$

其中 $a \approx \omega(0)T \bmod (2\pi)$; $\phi(\theta) = \phi_0(\theta) + \mathcal{O}(\sqrt{\mu}) + \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\phi_0(\theta)$ 由 A_0 和 $D\Phi(0)$ 确定; $L \approx \varepsilon \cdot \tau$ 且

$$\tau = \left|\frac{\mathrm{Im}(k_1(0))}{\mathrm{Re}(k_1(0))}\right|.$$

通常, Wang 和 Young (2003) 分四步对方程 (8.2.4) 证明混沌秩一吸引子的存在性.

(i) 计算 $\phi_0(\theta)$, 再验证它的所有临界点非退化;

(ii) 计算 (8.2.3) 的规范型, 得到系数 $k_1(0)$. 选取使得 τ 大的方程;

(iii) 令 μ 和 ε 充分小, 使得 $\phi(\theta)$ 近似于 $\phi_0(\theta)$, 同时要求 $L = \tau \cdot \varepsilon$ 充分大.

(iv) 得出结论: 存在周期 T 的正测集, 使得方程 (8.2.4) 出现混沌的秩一吸引子.

对于具体的如图 8.2.2(a) 所示的 Chua 氏电路系统, 通过周期地打开和合上开关产生周期脉冲内扰动. 按以上四步分析电路微分方程, 探索出现混沌秩一吸引子的参数范围. 再在实验室重建电路, 选取参数范围内的参数模拟, 可得到图 8.2.2(b) 的结果.

Oksasoglu 和 Wang (2008) 将上述理论应用于分析 Chua 氏电路, 并由 Demirkol, Ozoguz 和 Akgul (2009) 完成了电路制作.

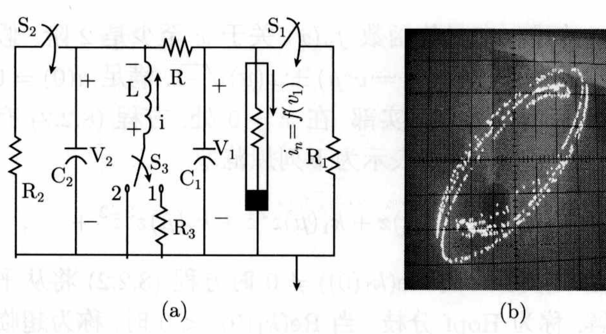


图 8.2.2 (a) Chua 氏电路, (b) 混沌秩一吸引子

8.2.3 存在极限环的自治系统的周期脉冲参数激励

对 $x \in \mathbb{R}^2$, 假设方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{8.2.5}$$

存在渐近稳定的周期解, $f(x)$ 是 C^4 函数. 方程 (8.2.5) 在周期脉冲参数激励 $\varepsilon P_{T,p}(t) \cdot \Phi(x)$ 下有模型方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \varepsilon P_{T,p}(t)\Phi(x), \tag{8.2.6}$$

其中

$$P_{T,p}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_p(t - nT) \tag{8.2.7}$$

是 T-周期脉冲函数,

$$P_p(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}, & 0 < t \leqslant p; \\ 0, & p < t < T. \end{cases} \tag{8.2.8}$$

$\Phi(x)$ 为描述内力的函数. 可以证明方程 (8.2.6) 的时间 T 映射在适当的条件下是可允秩一映射 (Oksasoglu et al., 2008). 因此系统 (8.2.6) 也存在混沌秩一吸引子.

考虑平面系统 (Chen et al., 2009)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2Bxy + \varepsilon(x + ax^2), \\ \dot{y} &= 1 - 2Ax - By^2. \end{aligned} \tag{8.2.9}$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统 (8.2.9) 有三个平衡点 $O_1\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{B}}\right)$, $O_2\left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{B}}\right)$, $O_3\left(\dfrac{1}{2A}, 0\right)$, 其中 O_1, O_2 为鞍点, O_3 为中心. 方程 (8.2.9) 存在由连接鞍点 O_1, O_2 的两条异宿轨道 ℓ_1 和 ℓ_2 构成的异宿环, 其中

$$\ell_1 = \left\{ \left(\frac{1}{A}\mathrm{sech}^2(t_0 - t), \frac{1}{\sqrt{B}} \tanh(t_0 - t) \right) : t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\ell_2 = \left\{ \left(0, -\frac{1}{\sqrt{B}}\tanh(t_0 - t)\right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

根据 (6.4.21) 式, 对自治系统

$$I(\varepsilon) : \dot{X} = f_0(X) + \varepsilon f_1(X, \varepsilon), \quad X \in \mathbb{R}^2,$$

假设当 $\varepsilon = 0$ 时, $I(0)$ 有一个顺时针方向的异宿环. 考虑 Mel'nikov 函数

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} (f_0(\ell_1) \wedge f_1(\ell_1, 0)) e^{-\int_0^t \operatorname{div} f_0(\ell_1(\tau)) d\tau} dt.$$

如果 $\varepsilon M < 0$ 且 $I(\varepsilon)$ 有一个不稳定焦点, 则对充分小的 ε, $I(\varepsilon)$ 存在稳定的极限环.

对于方程 (8.2.9), 当 $A = 1$, $B = 1$ 时 $M = \dfrac{4}{3} + \dfrac{16a}{15}$. 中心 $O_3\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$变为焦点 $O_3'(x', y')$. 由于发散量 $\operatorname{div}F(O_3') = \varepsilon(1 + a) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. 所以对 $\varepsilon < 0$ 以及 $-\dfrac{5}{4} < a < -1$, 有 $\varepsilon M < 0$ 且 $\operatorname{div}F(O_3') > 0$. 因此, 系统 (8.2.9) 存在一个稳定的极限环, 见图 8.2.3.

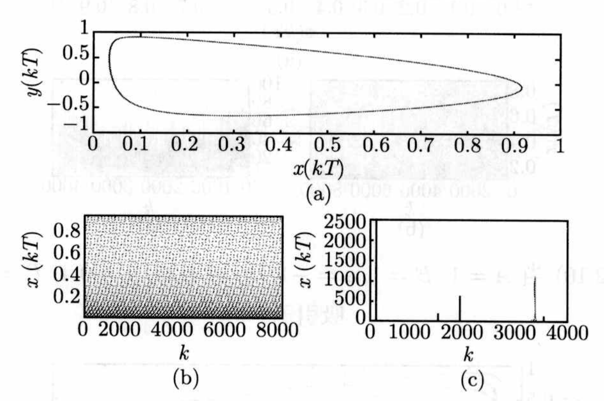


图 8.2.3 方程 (8.2.9) 当 $A = 1$, $B = 1$, $\varepsilon = -1$, $a = -1.23$ 时的极限环

考虑方程 (8.2.9) 的周期扰动系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2Bxy + \varepsilon(x + ax^2) - \mu\Phi(x)P_{T,p}(t), \\ \dot{y} &= 1 - 2Ax - By^2, \end{aligned} \tag{8.2.10}$$

其中 $P_{T,p}(t)$ 同 (8.2.7) 式, $\Phi(x) = x$.

为了模拟 (8.2.10) 的秩一混沌吸引子, 先固定参数 $A = 1$, $B = 1$, $\varepsilon = -1$, $a = -1.23$, $p = 0.5$, $\mu = 0.4$. 观察 (8.2.10) 的时间 T 映射, 当 T 变化时通过数值计算, 我们得到如图 8.2.4~ 图 8.2.6 所示的秩一混沌吸引子. 其中 (a) 是相图 $(x(kT), y(kT))$, (b) 是 $x(kT)$ 的时间序列, (c) 是 $x(kT)$ 的 Fourier 频谱.

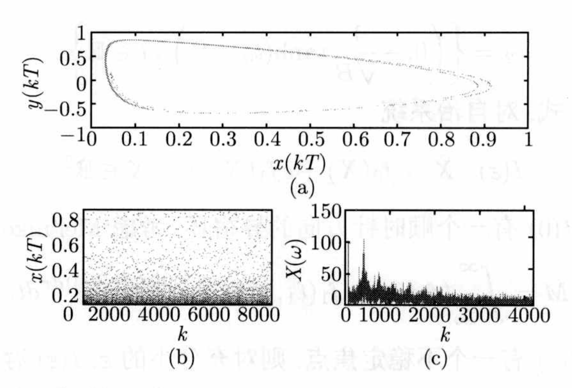


图 8.2.4　方程 (8.2.10) 当 $A=1$, $B=1$, $\varepsilon=-1$, $a=-1.23$, $\mu=0.4$, $T=30$ 时的秩一混沌吸引子

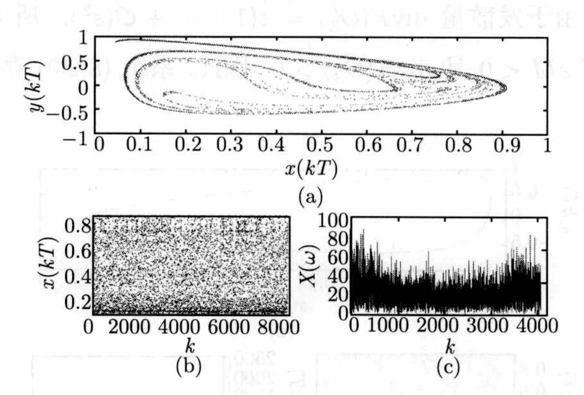


图 8.2.5　方程 (8.2.10) 当 $A=1$, $B=1$, $\varepsilon=-1$, $a=-1.23$, $\mu=0.4$, $T=10$ 时的秩一混沌吸引子

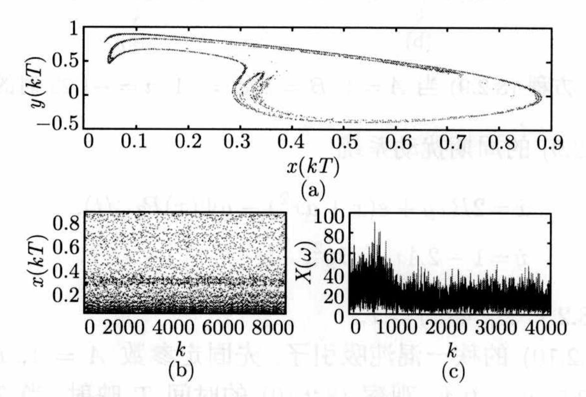


图 8.2.6　方程 (8.2.10) 当 $A=1$, $B=1$, $\varepsilon=-1$, $a=-1.23$, $\mu=0.4$, $T=8$ 时的秩一混沌吸引子

第 9 章　耗散鞍点的同宿缠结动力学

第 6 章中所介绍的 Mel′nikov 方法和第 7 章中的应用例子面对的是可积系统的周期扰动系统. 它为可积系统的双曲鞍点的稳定流形和不稳定流形在小扰动下是否同宿缠结而导致 Smale 马蹄和符号动力学行为的存在提供了简洁和直接判定, 并具有精确的数学分析的可计算性.

然而, 该方法并未考虑扰动强度 ε 的尺度变化对系统混沌性质的影响. 关于同宿缠结的动力学结构的了解, 仅仅证明 Smale 马蹄的存在性是远远不够的. 事实上, 马蹄理论无法对大量的数值模拟中出现的混沌图作出圆满的解释. 一般来说, 出现在数值计算中的动力学结构应有 Lebesgue 正测度的吸引域. 但 Smale 马蹄的吸引域是 Lebesgue 零测度集. 因此, 数值计算中出现的混沌图很可能并不对应于 Smale 马蹄.

近二十年来, 对于一致双曲映射的研究充分表明了在一般情况下混沌的动力学结构远比 Smale 马蹄复杂. SRB 测度理论、Newhouse 的同宿相切理论和前一章中介绍的秩一混沌理论所揭示的动力学都远比 Smale 马蹄的存在更为深刻和完整.

本章介绍由 Qiudong Wang 和 Ali Oksasoglu (2008, 2011) 所发展的同宿缠结理论. 该理论为非一致双曲映射理论在具体微分方程中的应用提供了新的途径, 对同宿缠结的整体动力学结构给出了更为精细和系统、完整的描述.

9.1　基本方程和返回映射

本节研究自治微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-\alpha x+f(x,y),\\ \frac{dy}{dt}&=\beta y+g(x,y),\end{aligned}\tag{9.1.1}$$

其中 $f(x,y),g(x,y)$ 是 $V\subset\mathbf{R}^2$ 上的解析函数, 满足 $f(0,0)=g(0,0)=\partial_x f(0,0)=\partial_y f(0,0)=\partial_x g(0,0)=\partial_y g(0,0)=0$.

兹假设

(H1) (i) $0<\beta<\alpha$, 且 α 与 β 不可通约, 即不存在正整数 m,n, 使得 $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{m}{n}$;

(ii) (9.1.1) 存在同宿到鞍点 $O(0,0)$ 的同宿轨道 $\ell=\{(a(t),b(t)):t\in\mathbf{R}\}$.

(H1)(i) 说明平衡点 $(0,0)$ 是非共振的耗散鞍点. $-\alpha,\beta$ 为它的两个特征值, 相

应的单位特征向量为 $\xi_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对 (9.1.1) 加周期扰动, 得到

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\alpha x + f(x,y) + \mu P(x,y,t), \\ \frac{dy}{dt} &= \beta y + g(x,y) + \mu Q(x,y,t), \end{aligned} \tag{9.1.2}$$

其中 $P(x,y,t), Q(x,y,t)$ 满足:

(H2) $P(x,y,t), Q(x,y,t)$ 是 $V \times \mathbf{R}$ 上只含关于 (x,y) 的二次和二次以上项的解析函数, 是时间 t 的解析周期函数, 即 $\exists T > 0$, 使得 $\forall (x,y) \in V$, $P(x,y,t) = P(x,y,t+T)$, $Q(x,y,t) = Q(x,y,t+T)$.

记同宿轨道 ℓ 的单位切向量为

$$\tau_\ell(t) = \left| \frac{d\ell(t)}{dt} \right|^{-1} \frac{d\ell(t)}{dt} \triangleq (u,v),$$

$\tau_\ell^\perp(t) = (v,-u)$ 表示单位法向量. 易知

$$\lim_{t\to-\infty} \tau_\ell(t) = \xi_\beta, \quad \lim_{t\to+\infty} \tau_\ell(t) = -\xi_{-\alpha}.$$

类似于 6.4 节 (6.4.21) 式, 定义 Mel′nikov 函数

$$\mathcal{W}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} [(P(\ell(t), t+\theta), Q(\ell(t), t+\theta)) \cdot \tau_\ell^\perp(t)] e^{-\int_0^t E_\ell(s)ds} dt, \tag{9.1.3}$$

其中

$$E_\ell(t) = \tau_\ell^\perp(t) \begin{pmatrix} -\alpha + \partial_x f(\ell(t)) & \partial_y f(\ell(t)) \\ \partial_x g(\ell(t)) & \beta + \partial_y g(\ell(t)) \end{pmatrix} \tilde{\tau}_\ell^\perp(t) \tag{9.1.4}$$

表示同宿轨道在时刻 t 的法向扩张率.

注 (9.1.3) 所定义的 Mel′nikov 函数 $\mathcal{W}(\theta)$ 与关于 Hamilton 扰动系统的 Mel′nikov 函数 (6.4.21) 之间的关系推导可参考本章附录.

记 $m = \min_{\theta\in(0,T]} \mathcal{W}(\theta)$, $M = \max_{\theta\in(0,T]} \mathcal{W}(\theta)$. 假设

(H3) (i) $\mathcal{W}(\theta)$ 是 Morse 函数, 即其所有临界点都是非退化的;

(ii) $\mathcal{W}(\theta)$ 的零点非退化, 即如果 $\mathcal{W}(\theta_0) = 0$, 则 $\mathcal{W}'(\theta_0) \neq 0$;

(iii) $m < 0 < M$.

在假设 (H1)~(H3) 下, 为研究方程 (9.1.2) 的动力学, 需要引进下面定义的返回映射.

考虑方程 (9.1.2) 的扭扩系统：

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\alpha x + f(x,y) + \mu P(x,y,\theta),\\
\frac{dy}{dt} &= \beta y + g(x,y) + \mu Q(x,y,\theta),\\
\frac{d\theta}{dt} &= 1.
\end{aligned}
\tag{9.1.5}
$$

称空间 (x,y,θ) 为扭扩相空间.

以 ε 为半径作点 $(0,0)$ 的小邻域 U_ε. 在 $U_{\frac{\varepsilon}{4}}$ 外作同宿轨道 ℓ 的邻域 D, 令 $\sigma^\pm$ 为 $U_\varepsilon \cap D$ 中分别垂直于同宿轨道的小线段, 记

$$\mathcal{U}_\varepsilon = U_\varepsilon \times S^1, \quad \boldsymbol{D} = D \times S^1, \quad \Sigma^\pm = \sigma^\pm \times S^1.$$

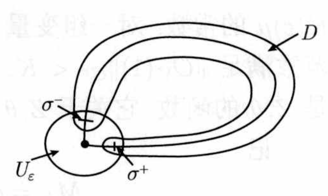


图 9.1.1 同宿环的邻域

如图 9.1.1. 记 $-L_-, L_+$ 分别为同宿轨道上距离鞍点 $\dfrac{\varepsilon}{2}$ 处的时刻, 即 $|\ell(-L_-) - (0,0)| = \dfrac{\varepsilon}{2}$, $|\ell(L_+) - (0,0)| = \dfrac{\varepsilon}{2}$. 返回映射是从 Σ^- 回到 Σ^- 的映射.

命题 9.1.1 *存在坐标变换* $\mathcal{L}_\mu : (x,y) \to (X,Y)$,

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(X,Y) \\ G(X,Y) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \tilde{F}(X,Y,\theta) \\ \tilde{G}(X,Y,\theta) \end{pmatrix},
\tag{9.1.6}
$$

使得方程 (9.1.5) *在* $\mathcal{U}_\varepsilon$ *内可线性化为*

$$\frac{dX}{dt} = -\alpha X, \quad \frac{dY}{dt} = \beta Y, \quad \frac{d\theta}{dt} = 1. \tag{9.1.7}$$

在扭扩相空间 (X,Y,θ) 中, 令

$$\Sigma^- = \{(X,Y,\theta) : Y = \varepsilon, |X| < \mu, \theta \in S^1\},$$

$$\Sigma^+ = \{(X,Y,\theta) : X = \varepsilon, |Y| < K_1(\varepsilon)\mu, \theta \in S^1\}.$$

再作 X,Y 的变量变换

$$\mathbb{X} = \mu^{-1} X, \quad \mathbb{Y} = \mu^{-1} Y.$$

上面的讨论中涉及两个小尺度参数 ε, μ 和常数 K_1. 选取小 ε 的目的是为了在邻域 U_ε 内使方程 (9.1.5) 线性化. 而 μ 是扰动强度, 恒设

$$\mu \ll \varepsilon \ll 1. \tag{9.1.8}$$

至于常数 K, 其表示与相变量、时间以及 μ 无关的常量, 在不同的场合 K 代表的值是不同的. 在某些必要的情况下, 我们也会用 $K_1, K_2, \cdots$ 等表示不同的 K 值. 与 ε 有关的常量记作 $K_1(\varepsilon), K_2(\varepsilon)$ 等.

为了便于推导返回映射, 需要引进新参数 $h = \ln \mu^{-1}$. 把所有 μ 的函数看作 h 的函数. 这样, 扰动项相对于 h 求导后还是扰动项. 这是因为 $\partial_h F(\mu) = -\mu \partial_\mu F(\mu)$.

我们还要对符号 $\mathcal{O}$ 作如下说明：一个好的返回映射表达式中必然包含显项和隐项, 隐项通常是误差项. 误差项估计得好与不好, 直接影响映射的动力学分析.

我们用 $\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(\varepsilon), \mathcal{O}(\mu)$ 分别表示满足 $|\mathcal{O}(1)| < K$, $|\mathcal{O}(\varepsilon)| < K\varepsilon$, $|\mathcal{O}(\mu)| < K(\varepsilon)\mu$ 的常数. 对一组变量 V, $\mathcal{O}_V(1), \mathcal{O}_V(\varepsilon), \mathcal{O}_V(\mu)$ 是关于 V 的函数, 它们的 C^r-范数满足 $\|\mathcal{O}_V(1)\|_{C^r} < K$, $\|\mathcal{O}_V(\varepsilon)\|_{C^r} < K\varepsilon$, $\|\mathcal{O}_V(\mu)\|_{C^r} < K(\varepsilon)\mu$. 例如, $\mathcal{O}_{Z,\theta}(\mu)$ 是 Z, θ 的函数, 它关于 Z, θ 的 C^r-范数满足 $\|\mathcal{O}_{Z,\theta}(\mu)\|_{C^r} < K(\varepsilon)\mu$.

记

$$M_+ = e^{\int_0^{L_+} E_\ell(s)ds}, \qquad M_- = e^{\int_{-L_-}^0 E_\ell(s)ds}.$$

定理 9.1.1 设返回映射 $\mathcal{R}: \Sigma^- \to \Sigma^-$ 为 $(\theta_1, \mathbb{X}_1) = \mathcal{R}(\theta, \mathbb{X})$, 则

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta + \boldsymbol{a} - \frac{1}{\beta} \ln \mathbb{F}(\theta, \mathbb{X}, \mu) + \mathcal{O}_{\theta,\mathbb{X},h}(\mu), \\ \mathbb{X}_1 &= \boldsymbol{b}[\mathbb{F}(\theta, \mathbb{X}, \mu)]^{\frac{\alpha}{\beta}}. \end{aligned} \tag{9.1.9}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{1}{\beta}\left(\ln \mu^{-1} + \ln \frac{\varepsilon}{(1+\mathcal{O}(\varepsilon))M_+}\right) + (L_- + L_+), \\ \boldsymbol{b} &= (\mu\varepsilon^{-1})^{\frac{\alpha}{\beta}-1}[(1+\mathcal{O}(\varepsilon))M_+]^{\frac{\alpha}{\beta}} \end{aligned} \tag{9.1.10}$$

为常数.

$$\mathbb{F}(\theta, \mathbb{X}, \mu) = \mathcal{W}(\theta) + M_-(1+\mathcal{O}(\varepsilon))\mathbb{X} + \mathbb{E}(\theta) + \mathcal{O}_{\theta,\mathbb{X},h}(\mu), \tag{9.1.11}$$

其中 $\mathcal{W}(\theta)$ 是 (9.1.3) 式定义的 Mel′nikov 函数, 且

$$\mathbb{E}(\theta) = ((M_+)^{-1} + M_-)\mathcal{O}_\theta(1). \tag{9.1.12}$$

为了分析返回映射 $\mathcal{R}$ 的动力学, 兹作以下几点说明：

(i) 因为 $\dfrac{\alpha}{\beta} - 1 > 0$, 所以当 $\mu \to 0$ 时, $\boldsymbol{b} \to 0$. 因此二维映射 $\mathcal{R}$ 是下列一维映射的开折：

$$f_h(\theta) = \theta + \boldsymbol{a} - \frac{1}{\beta}\ln(\mathcal{W}(\theta) + \mathbb{E}(\theta)).$$

(ii) $M_+ \sim \varepsilon^{-\frac{\beta}{\alpha}}$, $M_- \sim \varepsilon^{\frac{\alpha}{\beta}}$.

根据邻域 U_ε 内线性映射解 $X = X_0e^{-\alpha t}$, $Y = Y_0e^{\beta t}$ 知道, 当 $t = -L_-$ 时 $Y = \varepsilon$, 当 $t = L_+$ 时 $X = \varepsilon$. 所以

$$\varepsilon \sim e^{-\beta L_-} \sim e^{-\alpha L_+}.$$

又由 $\lim\limits_{t\to+\infty} E_\ell(t) = \beta$, $\lim\limits_{t\to-\infty} E_\ell(t) = -\alpha$ 得

$$M_+ = e^{\int_0^{L_+} E_\ell(s)ds} \sim e^{\beta L_+} = e^{-\alpha L_+\cdot\frac{\beta}{-\alpha}} \sim \varepsilon^{-\frac{\beta}{\alpha}},$$

$$M_- = e^{\int_{-L_-}^0 E_\ell(s)ds} \sim e^{-\alpha L_-} = e^{-\beta L_-\cdot\frac{\alpha}{\beta}} \sim \varepsilon^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

而

$$\frac{\partial \mathbb{F}(\theta,\mathbb{X},\mu)}{\partial \mathbb{X}} \approx M_- \gg \mathcal{O}(\mu),$$

所以二维映射 $\mathcal{R}$ 是一维映射 f_μ 在 $\mathbb{X}$-方向的非退化开折.

(iii) $\boldsymbol{a} \approx \dfrac{1}{\beta}\ln\mu^{-1} + \mathcal{K}$, 其中

$$\mathcal{K} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{\beta}\ln[|\ell(t)|e^{-\beta t}] + \frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty}(\beta - E_\ell(s))ds$$

是常数. 所以当 $\mu \to 0$ 时, $\boldsymbol{a} \to +\infty$.

(iv) $\mathbb{E}(\theta) \sim \varepsilon^{\frac{\alpha}{\beta}}\mathcal{O}_\theta(1)$.

定理 9.1.1 中的公式 $\mathcal{R}$ 是推导本节主要结果的的基础. 定理 9.1.1 的详细证明见 9.4 节.

9.2 动力学结果

记环面 $\Sigma^- = S^1 \times I$, 其中 S^1 为圆周, 区间 $I = [-1,1]$. 用变量 θ 和 $\mathbb{X}$ 分别表示 S^1 以及 I 上的点, 并且 θ 为水平方向, $\mathbb{X}$ 为垂直方向. Σ^- 由若干区域组成, 区域的边界由

$$\mathbb{F}(\theta,\mathbb{X},\mu) = 0 \tag{9.2.1}$$

决定. 因为 $\mathcal{W}(\theta)$ 的所有零点非退化, 则对充分小的 ε, (9.2.1) 式的解是 Σ^- 中有限条互不相交的几乎垂直曲线. 这些几乎垂直曲线把 Σ^- 分成有限个竖条, 其中每一个竖条上 $\mathbb{F} = \mathbb{F}(\theta,\mathbb{X},\mu)$ 的符号相同, 并且沿着 θ 的方向在不同的竖条上 $\mathbb{F}$ 的符号交替变化. 记 $\mathbb{F} > 0$ 的竖条为 U, $\mathbb{F} < 0$ 的竖条为 V. (9.1.9) 式中的对数函数要求返回映射 $\mathcal{R}$ 定义在 U 上.

记 $U = \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i$. 则 $\mathcal{R}$ 对每一个 U_i 的作用如下: 垂直方向压缩, 水平方向拉伸,

并向两端无限延伸. 然后折叠绕环面 Σ^- 无穷多次, 如图 9.2.1.

把 μ 看作参数, 记返回映射为 $\mathcal{R}_\mu$, 且

$$\Omega_\mu = \{(\theta, \mathbb{X}) \in U : \mathcal{R}_\mu^n(\theta, \mathbb{X}) \in U, \forall n \geqslant 0\}, \quad \Lambda_\mu = \bigcap_{n\geqslant 0} \mathcal{R}_\mu^n(\Omega_\mu). \tag{9.2.2}$$

则 $\mathcal{R}_\mu$ 的同宿缠结几何动力学结构都体现在 Λ_μ 中. 显然, 对充分小的所有 μ, Λ_μ 含有一个无穷符号的马蹄, 该马蹄包含了 Smale 马蹄以及它的各种变化. 无穷符号马蹄存在于所有的同宿缠结中.

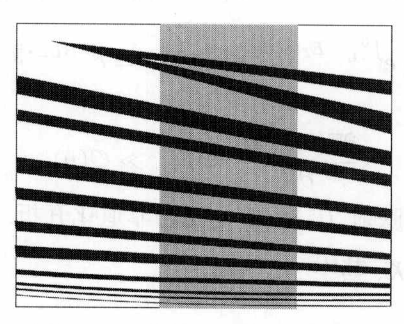


图 9.2.1　映射 $\mathcal{R}$ 的动力学结构

Λ_μ 的结构敏感依赖于折叠部分在 Σ^- 中的位置. 如果所有竖条 U_i $(i=1,\cdots,k)$ 的折叠部分落在 V 内部, 那么同宿缠结简化为一个无穷符号的马蹄. 如果折叠部分落在 U_i 内部, 那么同宿缠结会出现强吸引的周期解或 Newhouse 汇以及与同宿切有关的似 Hénon 吸引子. 由返回映射 $\mathcal{R}_\mu$ 的表达式 (9.1.9) 知道, 当 $\mu \to 0$ 时, 所有 $\mathcal{R}_\mu(U_i)$ $(i = 1,\cdots,k)$ 的折叠部分相对固定地以常速率 (关于 $\boldsymbol{a} \sim \ln \mu^{-1}$) 向 $\theta = +\infty$ 作水平移动, 无穷次横穿 U 和 V. 因此, $\mathcal{R}_\mu$ 的动力学可归结为如下三类主要现象:

(a) 如果 $\mathcal{R}_\mu(U_i)$ $(i = 1,\cdots,k)$ 的折叠部分全含在 V 内部时, 整个同宿缠结就简化为一个无穷符号马蹄.

(b) 对一维映射

$$f_h(\theta) = \theta + \boldsymbol{a} - \frac{1}{\beta}\ln(\mathcal{W}(\theta) + \mathbb{E}(\theta)),$$

当 $\mu \to 0$ 时存在无穷多的 μ 值, 使得 $f(\theta_c) = \theta_c$, 其中 $\theta_c = \theta_c(\mu)$ 是 f 的临界点, 即 $f'(\theta_c(\mu)) = 0$. 这些同宿缠结出现强吸引的周期解.

(c) 当 $\mu \to 0$ 时, 存在无穷多个 μ 值使得马蹄的周期鞍点的不稳定流形与稳定流形同宿相切. 则在每一个 μ 值附近存在无穷多个 Newhouse 周期汇和似 Hénon 吸引子. 见图 9.2.2.

因此, 当 $\mu \to 0$ 时, 方程 (9.1.5) 的同宿缠结动力学结构敏感依赖于 μ 值, 但存在一个固定的动力学模式. 这个模式在每个长度为 T 的区间上关于参数 $\boldsymbol{a} \sim \ln \mu^{-1}$

重复出现. 当 $\mu \to 0$ 时, 现象 (a)~(c) 快速交替出现. 扰动函数 $P(x,y,t)$ 和 $Q(x,y,t)$ 主要通过 Mel′nikov 函数影响同宿缠结动力学结构. Mel′nikov 函数决定了 Σ^- 中竖条的个数以及竖条在 $\mathcal{R}$ 作用下的折点个数.

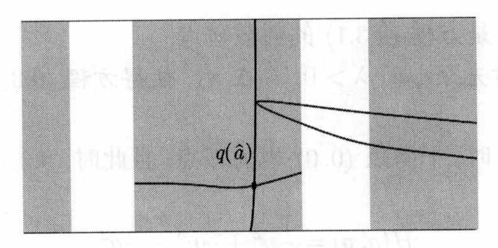


图 9.2.2 横穿地同宿相切

对于上述现象 (a)~(c), 严格的同宿缠结动力学叙述如下: 对方程 (9.1.5), 假设 (H1)~(H3), 且 Mel′nikov 函数 $\mathcal{W}(\theta)$ 有两个临界点.

定理 9.2.1 存在趋向于 0 的 μ 序列, 记作

$$1 \gg \mu_1^{(r)} > \mu_1^{(l)} > \cdots > \mu_n^{(r)} > \mu_n^{(l)} > \cdots > 0$$

使得 $\forall \mu \in [\mu_n^{(l)}, \mu_n^{(r)}]$, $\mathcal{R}_\mu$ 在不变集

$$\Lambda = \{(\theta, \mathbb{X}) \in U : \ \mathcal{R}_\mu^i(\theta, \mathbb{X}) \in U, \ \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

上拓扑共轭于无穷符号空间的移位映射.

定理 9.2.2 对定理 9.2.1 的 μ 序列, 存在开集 $O \subset [\mu_{n+1}^{(r)}, \mu_n^{(l)}]$, 使得对任意的 $\mu \in O$, Λ_μ 由一个吸引的不动点 (周期汇) 和一个无穷符号马蹄组成.

定理 9.2.3 对定理 9.2.1 的 μ 序列, 存在正 Lebesgue 测度集 $\Delta \subset [\mu_{n+1}^{(r)}, \mu_n^{(l)}]$, 使得对任意的 $\mu \in \Delta$, 相应的同宿缠结 Λ_μ 为具有 SRB 测度的奇异吸引子.

这里暂时不证明定理 9.2.1~9.2.3. 在下一章的异宿缠结中将给出更一般的定理及其证明.

9.3 具体例子及数值结果

本节通过具体例子说明如何应用 9.2 节的定理去研究具体的微分方程, 并给出数值结果.

对平面上的二阶微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= p,\\ \frac{dp}{dt} &= q - q^2 - (\lambda - \gamma q^2)p,\end{aligned} \qquad (9.3.1)$$

其中 λ,γ 为参数. 首先, 平衡点 $(0,0)$ 是鞍点, 特征值为 $-\alpha,\beta$,

$$\alpha=\frac{\sqrt{\lambda^2+4}+\lambda}{2},\quad \beta=\frac{\sqrt{\lambda^2+4}-\lambda}{2}.$$

故当 $\lambda\neq 0$ 时, $(0,0)$ 是方程 (9.3.1) 的耗散鞍点.

命题 9.3.1 对充分小的 $\lambda>0$, 存在 γ_λ, 使得方程 (9.3.1) 有同宿轨道 ℓ_λ 经过鞍点 $(0,0)$.

证 当 $\lambda=\gamma=0$ 时, 平衡点 $(0,0)$ 也为鞍点, 且此时 (9.3.1) 为 Hamilton 系统, Hamilton 量

$$H(q,p)=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{3}q^3-\frac{1}{2}q^2.$$

令 $H(q,p)=0$, 解得

$$q_0(t)=\frac{6e^{-t}}{(1+e^{-t})^2},\quad p_0(t)=\frac{6e^{-t}(e^{-t}-1)}{(1+e^{-t})^3}.$$

即 $\ell_0(t)=\{(q_0(t),p_0(t)):t\in\mathbf{R}\}$ 为过鞍点 $(0,0)$ 的同宿轨道. 视 λ 为扰动参数, 方程 (9.3.1) 可改写为

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt}&=p,\\ \frac{dp}{dt}&=q-q^2-\lambda\left(1-\frac{\gamma}{\lambda}q^2\right)p,\end{aligned}\tag{9.3.2}$$

计算同宿轨道 $\ell_0(t)$ 上的 Mel′nikov 函数,

$$\mathcal{W}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\gamma}{\lambda}q_0^2(t)\right)p_0^2(t)dt.$$

因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}q_0^2(t)p_0^2(t)dt\neq 0,$$

所以对 $\lambda>0$, 存在 γ_λ, 使得 $\mathcal{W}=0$, 即 (9.3.1) 有同宿轨道 ℓ_λ. □

在此基础上考虑 (9.3.1) 的时间扰动:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt}&=p,\\ \frac{dp}{dt}&=q-q^2-(\lambda-\gamma q^2)p+\mu q^2\sin 2\pi\omega t.\end{aligned}\tag{9.3.3}$$

根据命题 9.3.1, 设 $\ell_\lambda(t)=\{(q_\lambda(t),p_\lambda(t)):t\in\mathbf{R}\}$. 在 t 时刻, 同宿轨道 $\ell_\lambda(t)$ 的切向量和法向量

$$\tau(t)=\frac{(q_\lambda'(t),p_\lambda'(t))}{\sqrt{(q_\lambda'(t))^2+(p_\lambda'(t))^2}},\quad \tau^\perp(t)=\frac{(p_\lambda'(t),-q_\lambda'(t))}{\sqrt{(q_\lambda'(t))^2+(p_\lambda'(t))^2}}.$$

法向扩张率

$$E(t)=\frac{(p'_\lambda(t),-q'_\lambda(t))}{(q'_\lambda(t))^2+(p'_\lambda(t))^2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-2q_\lambda+2\gamma q_\lambda p_\lambda & \gamma q_\lambda^2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p'_\lambda(t)\\ -q'_\lambda(t)\end{pmatrix}. \tag{9.3.4}$$

Mel′nikov 函数

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\theta)&=\int_{-\infty}^{\infty}[0,q_\lambda^2(t)\sin 2\pi\omega(t+\theta)]\cdot\frac{(p'_\lambda(t),-q'_\lambda(t))}{\sqrt{(q'_\lambda(t))^2+(p'_\lambda(t))^2}}e^{-\int_0^t E(s)ds}dt\\&=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q_\lambda^2(t)q'_\lambda(t)}{\sqrt{(q'_\lambda(t))^2+(p'_\lambda(t))^2}}\sin 2\pi\omega(t+\theta)e^{-\int_0^t E(s)ds}dt\\&=-\sqrt{J_c^2+J_s^2}\sin(2\pi\omega\theta+\varphi),\end{aligned} \tag{9.3.5}$$

其中

$$\begin{aligned}J_c&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q_\lambda^2(t)q'_\lambda(t)}{\sqrt{(q'_\lambda(t))^2+(p'_\lambda(t))^2}}e^{-\int_0^t E(s)ds}\cos 2\pi\omega t dt,\\J_s&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q_\lambda^2(t)q'_\lambda(t)}{\sqrt{(q'_\lambda(t))^2+(p'_\lambda(t))^2}}e^{-\int_0^t E(s)ds}\sin 2\pi\omega t dt,\\\varphi&=\arctan\frac{J_s}{J_c}.\end{aligned} \tag{9.3.6}$$

引理 9.3.1 *存在充分小的 $\lambda_0>0$, 使得对任意的 $0<\lambda<\lambda_0$, $\sqrt{J_c^2+J_s^2}\neq 0$.*

证 当 $\lambda=0$ 时, (9.3.3) 为 Hamilton 扰动系统:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt}&=\frac{\partial H(p,q)}{\partial p},\\\frac{dp}{dt}&=-\frac{\partial H(p,q)}{\partial q}+\mu q^2\sin 2\pi\omega t.\end{aligned} \tag{9.3.7}$$

对 (9.3.7), 以前的 Mel′nikov 函数

$$M(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}p_0(t)q_0^2(t)\sin 2\pi\omega(t+\theta)dt.$$

经过计算

$$M(\theta)=\frac{24\pi^3\omega^2e^{-2\pi^2\omega}(4+20\pi^2\omega^2+16\pi^4\omega^4)}{5(e^{-4\pi^2\omega}-1)}\cos 2\pi\omega\theta.$$

对于 Hamilton 扰动系统, 两个 Mel′nikov 函数之间成立关系

$$\mathcal{W}(\theta)=\frac{M(\theta)}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial H(\ell(0))}{\partial p}\right)^2+\left(\dfrac{\partial H(\ell(0))}{\partial q}\right)^2}}=\frac{2}{3}M(\theta)=J_s\cos 2\pi\omega\theta, \tag{9.3.8}$$

其中

$$J_s = \frac{48\pi^3\omega^2 e^{-2\pi^2\omega}(4+20\pi^2\omega^2+16\pi^4\omega^4)}{15(e^{-4\pi^2\omega}-1)}.$$

即当 $\lambda = 0$ 时, $J_s^2 + J_c^2 \neq 0$. 因此, 对充分小的 $\lambda \neq 0$, 也有 $J_s^2 + J_c^2 \neq 0$. □

至此已验证方程 (9.3.3) 满足条件 (H1)~(H3). 此时 Mel′nikov 函数 (9.3.8) 有两个临界点.

数值结果

以下运用四阶 Runge-Kutta 法和 C 语言数值模拟去寻找同宿缠结中的可观测的动力学结构.

1. 具体过程

取定初值 $(q_0, p_0) = (0.01, 0)$. 任意取小参数 λ_0, 例如 $\lambda_0 = 0.5$. 先用四阶 Runge-Kutta 法求解未扰动方程 (9.3.1), 得到满足命题 9.3.1 的 γ_0. 参数 γ_0 一般精确到小数点后 12 位. 再让扰动参数 μ 从 10^{-3} 阶变化到 10^{-8} 阶. 在一个周期 [0,T) 内变化初始时间 t_0, 观测 1000 个解的数值结果.

2. 观测到下列三类现象

$I(A)$ 代表马蹄的过渡缠结 (对应定理 9.2.1). 这时, 所有的数值解都离开同宿环邻域. 在相应的同宿缠结中没有吸引域是 Lebesgue 正测度的吸引子.

$I(B)$ 表现为渐近稳定周期轨道的稳定动力学–周期汇 (对应定理 9.2.2), 见图 9.3.1.

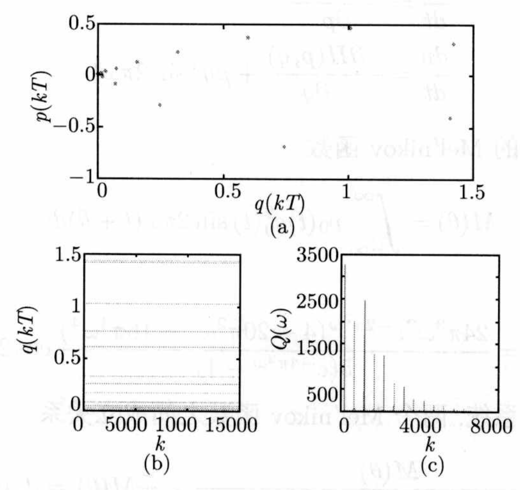


图 9.3.1 方程 (9.3.3) 取 $\mu = 3.3 \times 10^{-5}, t_0 = 0.8$ 时的周期汇

(a) 相图; (b) $q(t)$ 的时间序列; (c) $q(t)$ 的频谱

$I(C)$ 具有 SRB 测度的混沌缠结, 表现为似 Hénon 吸引子 (对应定理 9.2.3), 见图 9.3.2.

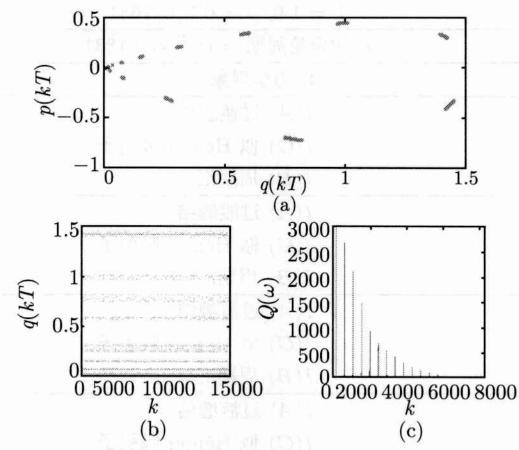


图 9.3.2 方程 (9.3.3) 取 $\mu = 1.46 \times 10^{-6}, t_0 = 0.75$ 时的似 Hénon 吸引子

(a) 相图; (b) $q(t)$ 的时间序列; (c) $q(t)$ 的频谱

3. 周期性

除了观测到上述三类现象以外, 我们还观测到, 随着参数 μ 的变小, 这三类现象组成的动力学模式呈现周期性, 周期由 $\dfrac{\mu_2}{\mu_1} = e^{\beta T}$ 决定, 其中 β 为鞍点的不稳定特征值, T 为扰动函数的周期. 表 9.3.1 给出了动力学现象转变的 μ 值.

表 9.3.1 动力学模式的周期性

$\lambda = 0.5$, $\gamma = 0.577028548901$		
$T = 1.0$, $\beta = 0.78077641$		
μ 的理论周期 $= e^{\beta T} \approx 2.1831$		
μ	动力学现象	实际比率
7.1000×10^{-3}	$I(A)$ 过渡缠结	
3.6100×10^{-3}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	
3.5000×10^{-3}	$I(B)$ 周期汇	
3.3000×10^{-3}	$I(A)$ 过渡缠结	2.1515
1.6800×10^{-3}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	2.1488
1.6500×10^{-3}	$I(B)$ 周期汇	2.1212
1.4900×10^{-3}	$I(A)$ 过渡缠结	2.2147
7.7500×10^{-4}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	2.1677
7.6000×10^{-4}	$I(B)$ 周期汇	2.1710
7.2800×10^{-4}	$I(A)$ 过渡缠结	2.0467
3.5700×10^{-4}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	2.1708
3.5500×10^{-4}	$I(B)$ 周期汇	2.1408

续表

$\lambda=0.5,\ \gamma=0.577028548901$		
$T=1.0,\ \beta=0.78077641$		
μ 的理论周期 $=e^{\beta T}\approx 2.1831$		
μ	动力学现象	实际比率
3.3500×10^{-4}	$I(A)$ 过渡缠结	2.1731
1.6350×10^{-4}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	2.1835
1.6000×10^{-4}	$I(B)$ 周期汇	2.2187
1.5000×10^{-4}	$I(A)$ 过渡缠结	2.2333
7.5050×10^{-5}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	2.1785
7.3000×10^{-5}	$I(B)$ 周期汇	2.1918
7.1000×10^{-5}	$I(A)$ 过渡缠结	2.1127
3.4000×10^{-5}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	2.2073
3.3400×10^{-5}	$I(B)$ 周期汇	2.1856
3.2200×10^{-5}	$I(A)$ 过渡缠结	2.2049
1.5700×10^{-5}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	2.1656
1.5000×10^{-5}	$I(B)$ 周期汇	2.2266
1.4700×10^{-5}	$I(A)$ 过渡缠结	2.1905
7.1500×10^{-6}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	2.1958
7.0000×10^{-6}	$I(B)$ 周期汇	2.1428
6.7300×10^{-6}	$I(A)$ 过渡缠结	2.1842
3.2700×10^{-6}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	2.1865
3.2500×10^{-6}	$I(B)$ 周期汇	2.1538
3.0500×10^{-6}	$I(A)$ 过渡缠结	2.2065
1.4700×10^{-6}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	2.2245
1.4500×10^{-6}	$I(B)$ 周期汇	2.2414
1.3750×10^{-6}	$I(A)$ 过渡缠结	2.2263
6.5400×10^{-7}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	2.2477
6.5000×10^{-7}	$I(B)$ 周期汇	2.2308

9.4 映射 $\mathcal{R}$ 的具体推导

定理 9.4.1 设返回映射 $\mathcal{R}:\Sigma^-\to\Sigma^-$ 为 $(\theta_1,\mathbb{X}_1)=\mathcal{R}(\theta,\mathbb{X})$, 则

$$\begin{aligned}\theta_1&=\theta+\boldsymbol{a}-\frac{1}{\beta}\ln\mathbb{F}(\theta,\mathbb{X},\mu)+\mathcal{O}_{\theta,\mathbb{X},h}(\mu),\\ \mathbb{X}_1&=\boldsymbol{b}[\mathbb{F}(\theta,\mathbb{X},\mu)]^{\frac{\alpha}{\beta}}.\end{aligned}\tag{9.4.1}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{1}{\beta}\left(\ln\mu^{-1}+\ln\frac{\varepsilon}{(1+\mathcal{O}(\varepsilon))M_+}\right)+(L_-+L_+),\\ \boldsymbol{b}&=(\mu\varepsilon^{-1})^{\frac{\alpha}{\beta}-1}[(1+\mathcal{O}(\varepsilon))M_+]^{\frac{\alpha}{\beta}}\end{aligned}\tag{9.4.2}$$

为常数.

$$\mathbb{F}(\theta, \mathbb{X}, \mu) = \mathcal{W}(\theta) + M_-(1 + \mathcal{O}(\varepsilon))\mathbb{X} + \mathbb{E}(\theta) + \mathcal{O}_{\theta,\mathbb{X},h}(\mu), \tag{9.4.3}$$

其中 $\mathcal{W}(\theta)$ 是 (9.1.3) 式定义的 Mel′nikov 函数, 且

$$\mathbb{E}(\theta) = ((M_+)^{-1} + M_-)\mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{W}_L(\theta) - \mathcal{W}(\theta). \tag{9.4.4}$$

证 新返回映射 $\mathcal{R} : \Sigma^- \to \Sigma^-$ 由 $\mathcal{M} : \Sigma^- \to \Sigma^+$ 和 $\mathcal{N} : \Sigma^+ \to \Sigma^-$ 复合得到. 我们先在同宿环邻域内求 $\mathcal{M}$, 再在鞍点邻域内求 $\mathcal{N}$.

令

$$(x, y) = \ell(s) + \tau_\ell^\perp(s)z. \tag{9.4.5}$$

(9.4.5) 式两边关于 t 求导,

$$\left(\frac{d\ell(s)}{ds} + z\frac{d\tau_\ell^\perp(s)}{ds}\right)\frac{ds}{dt} + \tau_\ell^\perp(s)\frac{dz}{dt} = (F(s, z, t, \mu), G(s, z, t, \mu)), \tag{9.4.6}$$

其中

$$\begin{aligned}
F(s, z, t, \mu) &= -\alpha(a(s) + v(s)z) + f(\ell(s) + \tau_\ell^\perp(s)z) + \mu P(\ell(s) + \tau_\ell^\perp(s)z, t),\\
G(s, z, t, \mu) &= \beta(b(s) - u(s)z) + g(\ell(s) + \tau_\ell^\perp(s)z) + \mu Q(\ell(s) + \tau_\ell^\perp(s)z, t).
\end{aligned}$$

(9.4.6) 两边分别左乘 $\tau_\ell(s)$, $\tau_\ell^\perp(s)$ 得

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \frac{\tau_\ell(s) \cdot (F(s, z, t, \mu), G(s, z, t, \mu))}{\tau_\ell(s) \cdot \left(\dfrac{d\ell(s)}{ds} + z\dfrac{d\tau_\ell^\perp(s)}{ds}\right)},\\
\frac{dz}{dt} &= \tau_\ell^\perp(s) \cdot (F(s, z, t, \mu), G(s, z, t, \mu)).
\end{aligned} \tag{9.4.7}$$

$F(s, z, t, \mu)$, $G(s, z, t, \mu)$ 在 $z = 0$ 处 Taylor 展开,

$$\begin{aligned}
F(s, z, t, \mu) =& -\alpha a(s) + f(\ell(s)) + \mu P(\ell(s), t)\\
&+ (-\alpha + \partial_x f(\ell(s)), \partial_y f(\ell(s))) \cdot \tau_\ell^\perp(s)z\\
&+ \mu(\partial_x P(\ell(s), t), \partial_y P(\ell(s), t)) \cdot \tau_\ell^\perp(s)z + \mathcal{O}_{s,t,h}(z^2),\\
G(s, z, t, \mu) =& \beta b(s) + g(\ell(s)) + \mu Q(\ell(s), t)\\
&+ (\partial_x g(\ell(s)), \beta + \partial_y g(\ell(s))) \cdot \tau_\ell^\perp(s)z\\
&+ \mu(\partial_x Q(\ell(s), t), \partial_y Q(\ell(s), t)) \cdot \tau_\ell^\perp(s)z + \mathcal{O}_{s,t,h}(z^2).
\end{aligned}$$

写成向量形式

$$
\begin{aligned}
&(F(s,z,t,\mu),G(s,z,t,\mu))\\
=&(-\alpha a(s)+f(\ell),\beta b(s)+g(\ell))+\mu(P(\ell,t),Q(\ell,t))\\
&+((-\alpha+\partial_x f(\ell),\partial_y f(\ell))\cdot\tau_\ell^\perp z,(\partial_x g(\ell),\beta+\partial_y g(\ell))\cdot\tau_\ell^\perp z)\\
&+\mu((\partial_x P(\ell,t),\partial_y P(\ell,t))\cdot\tau_\ell^\perp z,(\partial_x Q(\ell,t),\partial_y Q(\ell,t))\cdot\tau_\ell^\perp z)+O_{s,t,h}(z^2).
\end{aligned}
$$

上述 ℓ 均指 $\ell(s)$.

令 $z=\mu Z$, 并注意到 $(-\alpha a(s)+f(\ell),\beta b(s)+g(\ell))=\dfrac{d\ell(s)}{ds}$, 所以

$$
\begin{aligned}
(F(s,z,t,\mu),G(s,z,t,\mu))=&\frac{d\ell(s)}{ds}+\mu(P(\ell,t),Q(\ell,t))\\
&+\mu\begin{pmatrix}-\alpha+\partial_x f(\ell) & \partial_y f(\ell)\\ \partial_x g(\ell) & \beta+\partial_y g(\ell)\end{pmatrix}\cdot\tilde{\tau}_\ell^\perp Z+O_{s,Z,t,h}(\mu^2).
\end{aligned}
$$

由 (9.4.7) 得到

$$
\frac{ds}{dt}=\frac{\tau_\ell(s)\cdot\left[\dfrac{d\ell(s)}{ds}+\mu(P(\ell,t),Q(\ell,t))+\mu\begin{pmatrix}-\alpha+\partial_x f(\ell) & \partial_y f(\ell)\\ \partial_x g(\ell) & \beta+\partial_y g(\ell)\end{pmatrix}\cdot\tilde{\tau}_\ell^\perp Z+\mathcal{O}\right]}{\tau_\ell(s)\cdot\left(\dfrac{d\ell(s)}{ds}+\mu Z\dfrac{d\tau_\ell^\perp(s)}{ds}\right)},
\tag{9.4.8}
$$

其中 $\mathcal{O}$ 表示 $\mathcal{O}_{s,Z,t,h}(\mu^2)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{dZ}{dt}=&\tau_\ell^\perp(s)\cdot(P(\ell,t),Q(\ell,t))+\tau_\ell^\perp(s)\cdot\begin{pmatrix}-\alpha+\partial_x f(\ell) & \partial_y f(\ell)\\ \partial_x g(\ell) & \beta+\partial_y g(\ell)\end{pmatrix}\cdot\tilde{\tau}_\ell^\perp(s)Z\\
&+\mathcal{O}_{s,Z,t,h}(\mu)\\
=&E_\ell(s)Z+\tau_\ell^\perp(s)\cdot(P(\ell,t),Q(\ell,t))+\mathcal{O}_{s,Z,t,h}(\mu).
\end{aligned}
\tag{9.4.9}
$$

由上两式得到

$$
\begin{aligned}
\frac{dt}{ds}=&1+\mathcal{O}_{s,Z,t,h}(\mu),\\
\frac{dZ}{ds}=&E_\ell(s)Z+\tau_\ell^\perp(s)\cdot(P(\ell,t),Q(\ell,t))+\mathcal{O}_{s,Z,t,h}(\mu).
\end{aligned}
\tag{9.4.10}
$$

从 $-L_-$ 到 s 积分 (9.4.10) 的第一式得到

$$
t=t_0+s+L_-+\mathcal{O}_{Z,t_0,h}(\mu).
\tag{9.4.11}
$$

把上述 t 代入 (9.4.10) 第二式,

$$
\frac{dZ}{ds}=E_\ell(s)Z+\tau_\ell^\perp(s)\cdot(P(\ell(s),t_0+s+L_-),Q(\ell(s),t_0+s+L_-))+\mathcal{O}_{s,Z,t_0,h}(\mu).
\tag{9.4.12}
$$

运用常数变易法解得

$$Z = M_+M_-\Phi_L(t_0) + M_+M_-Z_0 + \mathcal{O}_{Z_0,t_0,h}(\mu),$$

其中 Z_0 为初值,

$$\Phi_L(t_0) = \int_{-L_-}^{L_+} \tau_\ell^\perp(s)\cdot[P(\ell(s),t_0+s+L_-),Q(\ell(s),t_0+s+L_-)]e^{-\int_{-L_-}^{s}E_\ell(\tau)d\tau}ds.$$

对 (9.1.3) 定义的 Mel′nikov 函数, 记

$$\mathcal{W}_L(\theta) = \int_{-L_-}^{L_+} [(P(\ell(t),t+\theta),Q(\ell(t),t+\theta))\cdot\tau_\ell^\perp(t)]e^{-\int_0^t E_\ell(s)ds}dt, \tag{9.4.13}$$

易验证

$$M_+M_-\Phi_L(t_0) = M_+\mathcal{W}_L(t_0+L_-).$$

记 $\theta = t$, $\theta_0 = t_0$, 则映射 $\mathcal{M}: \Sigma^- \to \Sigma^+$ 为

$$\begin{aligned} Z &= M_+\mathcal{W}_L(\theta_0+L_-) + M_+M_-Z_0 + \mathcal{O}_{Z_0,\theta_0,h}(\mu),\\ \theta &= \theta_0 + L_+ + L_- + \mathcal{O}_{Z_0,\theta_0,h}(\mu). \end{aligned} \tag{9.4.14}$$

下面在邻域 $\mathcal{U}_\varepsilon$ 内推导线性映射 $\mathcal{N}: \Sigma^+ \to \Sigma^-$. 根据

$$\frac{dX}{dt} = -\alpha X, \quad \frac{dY}{dt} = \beta Y, \quad \frac{d\theta}{dt} = 1$$

和 Σ^+, Σ^- 的定义,

$$\tilde{X} = \varepsilon e^{-\alpha t}, \quad \varepsilon = Ye^{\beta t}, \quad \tilde{\theta} = \theta + t.$$

把 $t = \dfrac{1}{\beta}\ln\dfrac{\varepsilon}{Y}$ 代入 $\tilde{X}$ 及 $\tilde{\theta}$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{X}} &= (\mu\varepsilon^{-1})^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\mathbb{Y}^{\frac{\alpha}{\beta}},\\ \tilde{\theta} &= \theta + \frac{1}{\beta}\ln(\mu\varepsilon^{-1}) - \frac{1}{\beta}\ln\mathbb{Y}. \end{aligned} \tag{9.4.15}$$

为了复合映射 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$, 需要给出环面 Σ^-, Σ^+ 上点的新旧坐标变换. 原坐标点用 (s,Z,θ) 表示, 新坐标点用 (X,Y,θ) 表示. 对 Σ^-, 先找出 s 与 $-L_-$ 的关系, 再给出 Z 与 X 的关系; 对 Σ^+, 先找出 s 与 $-L_+$ 的关系, 再给出 Z 与 Y 的关系.

在 Σ^- 上, 由 (9.1.6) 式得

$$\ell(s) + \tau_\ell^\perp(s)z = \begin{pmatrix} X \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(X,\varepsilon) \\ G(X,\varepsilon) \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} \tilde{F}(X,\varepsilon,\theta) \\ \tilde{G}(X,\varepsilon,\theta) \end{pmatrix}. \tag{9.4.16}$$

特别在 Σ^- 与 ℓ 的交点有

$$\ell(-L_-) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(0,\varepsilon) \\ G(0,\varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{9.4.17}$$

两式相减

$$\ell(s)-\ell(-L_-)+\tau_\ell^\perp(s)z=\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F(X,\varepsilon)-F(0,\varepsilon)\\G(X,\varepsilon)-G(0,\varepsilon)\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}\tilde F(X,\varepsilon,\theta)\\\tilde G(X,\varepsilon,\theta)\end{pmatrix}. \tag{9.4.18}$$

为了求出 s 与 $-L_-$ 的关系, 令

$$\begin{pmatrix}W_1\\W_2\end{pmatrix}=\ell(s)-\ell(-L_-)+\tau_\ell^\perp(s)z-\mu\begin{pmatrix}\tilde F(0,\varepsilon,\theta)\\\tilde G(0,\varepsilon,\theta)\end{pmatrix}. \tag{9.4.19}$$

由 (9.4.18) 得

$$\begin{pmatrix}W_1\\W_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F(X,\varepsilon)-F(0,\varepsilon)\\G(X,\varepsilon)-G(0,\varepsilon)\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}\tilde F(X,\varepsilon,\theta)-\tilde F(0,\varepsilon,\theta)\\\tilde G(X,\varepsilon,\theta)-\tilde G(0,\varepsilon,\theta)\end{pmatrix}. \tag{9.4.20}$$

在 $X=0$ 处 Taylor 展开 $F,G,\tilde F,\tilde G$ 直到 X^2 项,

$$F(X,\varepsilon)-F(0,\varepsilon)=\mathcal{O}(\varepsilon)X+\mathcal{O}_X(1)X^2,$$

$$\tilde F(X,\varepsilon,\theta)-\tilde F(0,\varepsilon,\theta)=\mathcal{O}_\theta(\varepsilon)X+\mathcal{O}_{X,\theta}(1)X^2.$$

因此

$$W_1=(1+\mathcal{O}(\varepsilon)+\mu\mathcal{O}_\theta(\varepsilon))X+\mathcal{O}_{X,\theta,h}(1)X^2, \tag{9.4.21}$$

$$W_2=(\mathcal{O}(\varepsilon)+\mu\mathcal{O}_\theta(\varepsilon))X+\mathcal{O}_{X,\theta,h}(1)X^2. \tag{9.4.22}$$

由 (9.4.21) 式得到

$$X=(1+\mathcal{O}(\varepsilon)+\mu\mathcal{O}_\theta(\varepsilon))W_1+\mathcal{O}_{W_1,\theta,h}(1)W_1^2. \tag{9.4.23}$$

代入 (9.4.22)

$$W_2=(\mathcal{O}(\varepsilon)+\mu\mathcal{O}_\theta(\varepsilon))W_1+\mathcal{O}_{W_1,\theta,h}(1)W_1^2. \tag{9.4.24}$$

下面通过 (9.4.19) 式得到 s 与 $-L_-$ 的关系, 从而得到 W_1 的表示, 代入 (9.4.23) 式得到 X 与 Z 的关系.

令 $\eta=s+L_-$, 则

$$\ell(s)-\ell(-L_-)=\ell'(-L_-)\eta+\mathcal{O}_\eta(1)\eta^2=\begin{pmatrix}a'(-L_-)\\b'(-L_-)\end{pmatrix}\eta+O_\eta(1)\eta^2,$$

$$\begin{aligned}&\tau_\ell^\perp(s)z-\mu\begin{pmatrix}\tilde F(0,\varepsilon,\theta)\\\tilde G(0,\varepsilon,\theta)\end{pmatrix}\\&=\mu[\tau_\ell^\perp(-L_-)Z+(\tau_\ell^\perp)'(-L_-)\eta Z+O_{\eta,Z}(1)\eta^2+O_\theta(1)]\\&=\mu\left[\begin{pmatrix}v(-L_-)\\-u(-L_-)\end{pmatrix}Z+\begin{pmatrix}v'(-L_-)\\-u'(-L_-)\end{pmatrix}\eta Z+O_{\eta,Z}(1)\eta^2+O_\theta(1)\right]\end{aligned}$$

代入 (9.4.19) 式得

$$\begin{aligned} W_1 &= a'(-L_-)\eta + \mu[v(-L_-)Z + v'(-L_-)\eta Z + \mathcal{O}_{\eta,Z}(1)\eta^2 + \mathcal{O}_\theta(1)] + \mathcal{O}_\eta(1)\eta^2, \\ W_2 &= b'(-L_-)\eta - \mu[u(-L_-)Z + u'(-L_-)\eta Z + \mathcal{O}_{\eta,Z}(1)\eta^2 + \mathcal{O}_\theta(1)] + \mathcal{O}_\eta(1)\eta^2. \end{aligned} \tag{9.4.25}$$

代入 (9.4.24),

$$\begin{aligned} &b'(-L_-)\eta - \mu[u(-L_-)Z + u'(-L_-)\eta Z + \mathcal{O}_{\eta,Z}(1)\eta^2 + \mathcal{O}_\theta(1)] + \mathcal{O}_\eta(1)\eta^2 \\ =&(\mathcal{O}(\varepsilon) + \mu\mathcal{O}_\theta(\varepsilon))\{a'(-L_-)\eta + \mu[v(-L_-)Z + v'(-L_-)\eta Z + \mathcal{O}_{\eta,Z}(1)\eta^2 \\ &+\mathcal{O}_\theta(1)] + \mathcal{O}_\eta(1)\eta^2\} + \mathcal{O}_{\eta,Z,\theta,h}(1)\eta^2. \end{aligned} \tag{9.4.26}$$

在 (9.4.26) 中我们只关心 η 的一次项和 μ 的一次项系数, 其他用 $\mathcal{O}(\mu^2)$ 项估计,

$$\begin{aligned} (b'(-L_-) - \mathcal{O}(\varepsilon)a'(-L_-))\eta =& \mu[u(-L_-) + \mathcal{O}(\varepsilon)v(-L_-)]Z \\ &+\mu\mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{\eta,Z,\theta,h}(\mu^2). \end{aligned} \tag{9.4.27}$$

即

$$\eta = \mu\frac{u(-L_-) + \mathcal{O}(\varepsilon)v(-L_-)}{b'(-L_-) - \mathcal{O}(\varepsilon)a'(-L_-)}Z + \frac{\mu\mathcal{O}_\theta(1)}{b'(-L_-) - \mathcal{O}(\varepsilon)a'(-L_-)} + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu^2).$$

代入 (9.4.25) 的第一式,

$$W_1 = \mu Z + \mu\mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu^2).$$

从而由 (9.4.23) 式得

$$\mathbb{X} = (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))Z + \mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu).$$

同理, 在 Σ^+ 上有

$$\mathbb{Y} = (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))Z + \mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu).$$

有了坐标变换, 现在可以复合映射 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_1 =& (\mu\varepsilon^{-1})^{\frac{\alpha}{\beta}-1}\mathbb{Y}^{\frac{\alpha}{\beta}} \\ =& (\mu\varepsilon^{-1})^{\frac{\alpha}{\beta}-1}[(1 + \mathcal{O}(\varepsilon))Z + \mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu)]^{\frac{\alpha}{\beta}} \\ =& (\mu\varepsilon^{-1})^{\frac{\alpha}{\beta}-1}[(1 + \mathcal{O}(\varepsilon))(M_+\mathcal{W}_L(\theta + L_-) + M_+M_-Z + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu)) \\ &+\mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu)]^{\frac{\alpha}{\beta}} \\ =& (\mu\varepsilon^{-1})^{\frac{\alpha}{\beta}-1}[(1 + \mathcal{O}(\varepsilon))M_+]^{\frac{\alpha}{\beta}}[\mathcal{W}_L(\theta + L_-) + M_-Z + (M_+)^{-1}\mathcal{O}_\theta(1) \\ &+\mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu)]^{\frac{\alpha}{\beta}} \\ =& (\mu\varepsilon^{-1})^{\frac{\alpha}{\beta}-1}[(1 + \mathcal{O}(\varepsilon))M_+]^{\frac{\alpha}{\beta}}[\mathcal{W}_L(\theta + L_-) + M_-((1 + \mathcal{O}(\varepsilon))\mathbb{X} + \mathcal{O}_\theta(1) \end{aligned}$$

$$+\mathcal{O}_{\mathbb{X},\theta,h}(\mu)) + (M_+)^{-1}\mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu)]^{\frac{\alpha}{\beta}}$$
$$=(\mu\varepsilon^{-1})^{\frac{\alpha}{\beta}-1}[(1+\mathcal{O}(\varepsilon))M_+]^{\frac{\alpha}{\beta}}[\mathcal{W}_L(\theta+L_-) + (1+\mathcal{O}(\varepsilon))M_-\mathbb{X}$$
$$+((M_+)^{-1}+M_-)\mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{\mathbb{X},\theta,h}(\mu)]^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

令

$$\begin{aligned}
&\mathbb{F}(\theta,\mathbb{X},\mu) = \mathcal{W}(\theta) + M_-(1+\mathcal{O}(\varepsilon))\mathbb{X} + \mathbb{E}(\theta) + \mathcal{O}_{\mathbb{X},\theta,h}(\mu),\\
&\mathbb{E}(\theta) = ((M_+)^{-1}+M_-)\mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{W}_L(\theta) - \mathcal{W}(\theta),\\
&\boldsymbol{b} = (\mu\varepsilon^{-1})^{\frac{\alpha}{\beta}-1}[(1+\mathcal{O}(\varepsilon))M_+]^{\frac{\alpha}{\beta}},
\end{aligned}$$

则

$$\mathbb{X}_1 = \boldsymbol{b}[\mathbb{F}(\theta,\mathbb{X},\mu)]^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

此时,

$$\theta_1 = \theta + \boldsymbol{a} - \frac{1}{\beta}\ln\mathbb{F}(\theta,\mathbb{X},\mu) + \mathcal{O}_{\mathbb{X},\theta,h}(\mu),$$

其中

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{\beta}\left(\ln\mu^{-1} + \ln\frac{\varepsilon}{(1+\mathcal{O}(\varepsilon))M_+}\right) + (L_+ + L_-).$$

定理 9.4.1 得证. □

附录 Mel′nikov 函数 (9.1.3) 与 Mel′nikov 函数 (6.4.21) 的关系

当系统 (9.1.1) 为 Hamilton 系统, 即存在 $H(x,y)$ 使得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} \tag{1}$$

时, 扰动系统 (9.1.2) 为

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} + \mu P(x,y,t), \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} + \mu Q(x,y,t). \tag{2}$$

此时同宿轨道 $\ell(t)$ 的切向量 $\tau_\ell(t) = \dfrac{\ell'(t)}{|\,\ell'(t)\,|} = \dfrac{\left(\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial y}, -\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial x}\right)}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial y}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial x}\right]^2}}$. 扰

动系统沿同宿轨道 $\ell(t)$ 的法向扩张率为

$$
\begin{aligned}
E_\ell(t) &= \tau_\ell^\perp(t)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H(\ell(t))}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 H(\ell(t))}{\partial y^2} \\ -\dfrac{\partial^2 H(\ell(t))}{\partial x^2} & -\dfrac{\partial^2 H(\ell(t))}{\partial y\partial x}\end{pmatrix}\tilde{\tau}_\ell^\perp(t) \\
&= \frac{1}{\left[\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial y}\right]^2+\left[\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial x}\right]^2}\left(-\frac{\partial H(\ell(t))}{\partial x}, -\frac{\partial H(\ell(t))}{\partial y}\right) \\
&\quad\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H(\ell(t))}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 H(\ell(t))}{\partial y^2} \\ -\dfrac{\partial^2 H(\ell(t))}{\partial x^2} & -\dfrac{\partial^2 H(\ell(t))}{\partial y\partial x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial y}\end{pmatrix} \\
&= \frac{\left(\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)^2-\left(\dfrac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right)\dfrac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial H}{\partial x}\dfrac{\partial H}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)}{\left(\dfrac{\partial H}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

所以积分

$$
\begin{aligned}
-\int_0^t E_\ell(s)ds &= -\int_0^t \frac{\left(\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)^2-\left(\dfrac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right)\dfrac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial H}{\partial x}\dfrac{\partial H}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)}{\left(\dfrac{\partial H}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)^2}ds \\
&= \ln\sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2}\,\Bigg|_0^t \\
&= \ln\frac{\sqrt{\left(\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial x}\right)^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial H(\ell(0))}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial H(\ell(0))}{\partial x}\right)^2}}.
\end{aligned}
$$

故

$$
e^{-\int_0^t E_\ell(s)ds} = \frac{\sqrt{\left(\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial x}\right)^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial H(\ell(0))}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial H(\ell(0))}{\partial x}\right)^2}}.
$$

此时, Mel′nikov 函数 (9.1.3) 为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} [(P(\ell(t), t+\theta), Q(\ell(t), t+\theta)) \cdot \tau_\ell^\perp(t)] e^{-\int_0^t E_\ell(s) ds} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[(P(\ell(t), t+\theta), Q(\ell(t), t+\theta)) \cdot \frac{\left(-\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial x}, -\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial y} \right)}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial y}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial x}\right]^2}} \right] \\
&\quad \cdot \frac{\sqrt{\left(\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial H(\ell(t))}{\partial x}\right)^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial H(\ell(0))}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial H(\ell(0))}{\partial x}\right)^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial H(\ell(0))}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial H(\ell(0))}{\partial x}\right)^2}} \\
&\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (P(\ell(t), t+\theta), Q(\ell(t), t+\theta)) \left(-\frac{\partial H(\ell(t))}{\partial x}, -\frac{\partial H(\ell(t))}{\partial y} \right) dt \\
&= \frac{M(\theta)}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial H(\ell(0))}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial H(\ell(0))}{\partial x}\right)^2}},
\end{aligned}
$$

这里 $M(\theta)$ 为 (6.4.21) 定义的 Mel′nikov 函数.

第 10 章　耗散鞍点的异宿缠结动力学

本章推广前一章的理论, 研究异宿缠结的动力学. 和同宿缠结的情形类似, 典型的异宿缠结也包括不含有可观测吸引子的过渡缠结, 代表稳定缠结的周期汇和包含似 Hénon 吸引子的混沌缠结. 异宿缠结和同宿缠结最重要的区别在于这三种典型缠结重复出现的不同模式. 对应于典型同宿缠结重复出现的周期模式, 异宿缠结重复出现的模式是拟周期的. 拟周期性的两个频率由两个鞍点的不稳定特征值决定. 本章取材于文献 (Chen et al., 2011).

10.1　基本方程和返回映射

本章研究自治微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x, y), \tag{10.1.1}$$

其中 $f(x,y), g(x,y)$ 是开邻域 $V \subset \mathbb{R}^2$ 上的解析函数. 假设方程 (10.1.1) 有两个平衡点 $P = (q, p)$ 和 $P^* = (q^*, p^*)$. P 点的特征值为 $\alpha < 0 < \beta$, 单位特征向量为 ξ_α, ξ_β. P^* 点的特征值为 $\alpha^* < 0 < \beta^*$, 单位特征向量为 ξ_{α^*}, ξ_{β^*}. 假设 P, P^* 是耗散非共振的平衡点, 即

(H1) $|\alpha| > \beta, |\alpha^*| > \beta^*$, 且 α 与 β 不可通约, α^* 与 β^* 不可通约.

假设方程 (10.1.1) 有两条异宿轨道 $\ell = \{\ell(t) = (a(t), b(t)), t \in \mathbb{R}\}$ 和 $\ell^* = \{\ell^*(t) = (a^*(t), b^*(t)), t \in \mathbb{R}\}$, 满足 $\lim\limits_{t\to-\infty} \ell(t) = P$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \ell(t) = P^*$, $\lim\limits_{t\to-\infty} \ell^*(t) = P^*$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \ell^*(t) = P$, 见图 10.1.1.

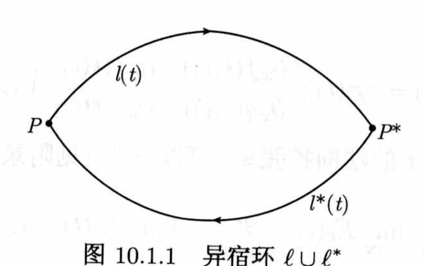


图 10.1.1　异宿环 $\ell \cup \ell^*$

对 (10.1.1) 加周期扰动得到

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) + \mu P(x, y, t), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x, y) + \mu Q(x, y, t), \tag{10.1.2}$$

其中 μ 为扰动参数. $P(x,y,t)$ 和 $Q(x,y,t)$ 是 $V\times\mathbb{R}$ 上的 C^∞ 函数, 满足

(H2) (i) $\exists\, T>0$, 使得

$$P(x,y,t+T)=P(x,y,t),\quad Q(x,y,t+T)=Q(x,y,t).$$

(ii) 对任意的 $t\in\mathbb{R}$, 有

$$P(q,p,t)=P(q^*,p^*,t)=Q(q,p,t)=Q(q^*,p^*,t)=0,$$

$$\partial_x P(q,p,t)=\partial_y P(q,p,t)=\partial_x P(q^*,p^*,t)=\partial_y P(q^*,p^*,t)=0,$$

$$\partial_x Q(q,p,t)=\partial_y Q(q,p,t)=\partial_x Q(q^*,p^*,t)=\partial_y Q(q^*,p^*,t)=0.$$

显然, 条件 (H2)(ii) 表示扰动函数 $P(x,y,t)$, $Q(x,y,t)$ 的幂级数展式至少是 $(x-q,y-p)$ 和 $(x-q^*,y-p^*)$ 的二次和二次以上项.

记异宿轨道 $\ell(t)$, $\ell^*(t)$ 的单位切向量为

$$\tau_\ell(t)=\frac{1}{|\ell'(t)|}\ell'(t),\quad \tau_{\ell^*}(t)=\frac{1}{|(\ell^*)'(t)|}(\ell^*)'(t).$$

则可验证

$$\lim_{t\to-\infty}\tau_\ell(t)=\xi_\beta,\quad \lim_{t\to+\infty}\tau_\ell(t)=-\xi_{\alpha^*},$$

$$\lim_{t\to-\infty}\tau_{\ell^*}(t)=\xi_{\beta^*},\quad \lim_{t\to+\infty}\tau_{\ell^*}(t)=-\xi_\alpha.$$

记 $\tau_\ell^\perp(t)$ 为垂直于 $\tau_\ell(t)$ 的单位法向量.

兹构造异宿轨道 $\ell(t)$ 的 Mel′nikov 函数如下:

$$\mathcal{W}(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}[(P(\ell(t),t+\theta),\ Q(\ell(t),t+\theta))\cdot\tau_\ell^\perp(t)]e^{-\int_0^t E_\ell(s)ds}dt, \tag{10.1.3}$$

其中

$$E_\ell(t)=\tau_\ell^\perp(t)\begin{pmatrix}\partial_x f(\ell(t)) & \partial_y f(\ell(t))\\ \partial_x g(\ell(t)) & \partial_y g(\ell(t))\end{pmatrix}\tilde{\tau}_\ell^\perp(t) \tag{10.1.4}$$

为异宿轨道 $\ell(t)$ 在时刻 t 的法向扩张率. 可以证明 (见附录)

$$\lim_{t\to+\infty}E_\ell(t)=\beta^*,\quad \lim_{t\to-\infty}E_\ell(t)=\alpha.$$

类似地, 构造异宿轨道 $\ell^*(t)$ 的 Mel′nikov 函数

$$\mathcal{W}^*(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}[(P(\ell^*(t),t+\theta),\ Q(\ell^*(t),t+\theta))\cdot\tau_{\ell^*(t)}^\perp]e^{-\int_0^t E_{\ell^*}(s)ds}dt, \tag{10.1.5}$$

其中

$$E_{\ell^*}(t) = \tau_{\ell^*(t)}^{\perp} \begin{pmatrix} \partial_x f(\ell^*(t)) & \partial_y f(\ell^*(t)) \\ \partial_x g(\ell^*(t)) & \partial_y g(\ell^*(t)) \end{pmatrix} \tilde{\tau}_{\ell^*(t)}^{\perp} \tag{10.1.6}$$

也为异宿轨道 $\ell^*(t)$ 在时刻 t 沿法方向 $\tau_{\ell^*}^{\perp}(t)$ 的扩张率, 也有

$$\lim_{t\to+\infty} E_{\ell^*}(t) = \beta, \quad \lim_{t\to-\infty} E_{\ell^*}(t) = \alpha^*.$$

记 $m = \min_{\theta\in[0,T)} \mathcal{W}(\theta)$, $M = \max_{\theta\in[0,T)} \mathcal{W}(\theta)$, $m^* = \min_{\theta\in[0,T)} \mathcal{W}^*(\theta)$, $M^* = \max_{\theta\in[0,T)} \mathcal{W}^*(\theta)$. 假设

(H3) (i) $\mathcal{W}(\theta)$ 和 $\mathcal{W}^*(\theta)$ 分别是 Morse 函数;

(ii) $\mathcal{W}(\theta)$ 和 $\mathcal{W}^*(\theta)$ 的零点均非退化, 即如果 $\mathcal{W}(\theta_0) = 0$, 则 $\mathcal{W}'(\theta_0) \neq 0$; 如果 $\mathcal{W}^*(\theta_0) = 0$, 则 $(\mathcal{W}^*)'(\theta_0) \neq 0$;

(iii) $m, m^* < 0 < M, M^*$.

在假设 (H1)~(H3) 成立的条件下, 以下对方程 (10.1.2) 引进返回映射, 以此作为分析方程 (10.1.2) 动力学行为的主要工具.

引进角变量 $\theta \in S^1 := \mathbb{R}/\{nT\}$. 方程 (10.1.2) 可扭扩为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,y) + \mu P(x,y,\theta), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y) + \mu Q(x,y,\theta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1. \end{aligned} \tag{10.1.7}$$

在扭扩相空间 (x,y,θ) 中, 以 ε 为半径作点 P 的小邻域 $B_\varepsilon(P)$, 以 ε^* 为半径作点 P^* 的小邻域 $B_{\varepsilon^*}(P^*)$. 令 σ, σ^* 分别为 $B_\varepsilon(P)$ 和 $B_{\varepsilon^*}(P^*)$ 中垂直于异宿轨道 $\ell(t)$, $\ell^*(t)$ 的小线段. 记 $\varSigma = \sigma \times S^1$, $\varSigma^* = \sigma^* \times S^1$. 如图 10.1.2 所示.

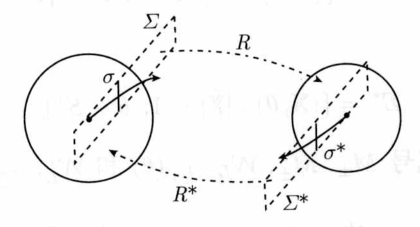


图 10.1.2 扭扩相空间中的 $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^*$

在邻域 $B_\varepsilon(P)$ 中, 记 $-L_-$, L_+^* 分别为异宿轨道 $\ell(t)$ 和 $\ell^*(t)$ 上距离鞍点 P 为 $\frac{\varepsilon}{2}$ 处的时刻, 即

$$|\ell(-L_-) - P| = \frac{1}{2}\varepsilon, \quad |\ell^*(L_+^*) - P| = \frac{1}{2}\varepsilon.$$

同理, 在邻域 $B_{\varepsilon^*}(P^*)$ 中, 记 $-L_-^*$, L_+ 为异宿轨道 $\ell(t)$ 和 $\ell^*(t)$ 上距离鞍点 P^* 为 $\dfrac{\varepsilon^*}{2}$ 处的时刻, 即

$$|\ell^*(-L_-^*) - P^*| = \frac{1}{2}\varepsilon^*, \qquad |\ell(L_+) - P^*| = \frac{1}{2}\varepsilon^*.$$

返回映射 $\mathcal{F} = \mathcal{R}^* \circ \mathcal{R}$ 是从 Σ 回到 Σ 的映射. 如图 10.1.3 所示.

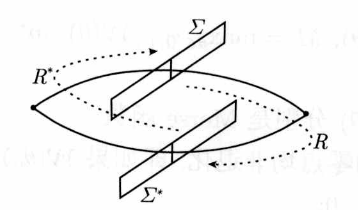


图 10.1.3　返回映射 $\mathcal{F} = \mathcal{R}^* \circ \mathcal{R}$

选取参数 $\varepsilon, \varepsilon^*$, 使得

$$\varepsilon^* = \varepsilon^{\frac{\beta^*}{\beta}}. \tag{10.1.8}$$

由于 $\varepsilon, \varepsilon^*$ 充分小, 方程 (10.1.7) 在邻域 $B_\varepsilon(P)$, $B_{\varepsilon^*}(P^*)$ 中可以线性化. 这样, 上述四个时间 $L_\pm, L_\pm^*$ 只依赖于异宿轨道 ℓ, ℓ^* 以及参数 $\varepsilon, \varepsilon^*$.

对扰动强度 μ, 假设

$$\mu \ll \varepsilon, \quad \varepsilon^* \ll 1. \tag{10.1.9}$$

与 9.1 节相同, 用新参数 $h = \ln \mu^{-1}$ 并用类似的常数 K 和估计项 $\mathcal{O}$.

因为 Σ 是环面, 用 (X, θ) 表示其上的变量, 其中 X 表示 Σ 上的点到 $\ell(-L_-) \times S^1$ 的距离, $\theta \in S^1$. 作尺度变换 $\mathbb{X} = \mu^{-1}X$, 则 Σ 可表示为

$$\Sigma = \{(\mathbb{X}, \theta) : |\mathbb{X}| < 1, \ \theta \in S^1\}.$$

同理, Σ^* 可表示为

$$\Sigma^* = \{(\hat{\mathbb{X}}, \hat{\theta}) : |\hat{\mathbb{X}}| < 1, \ \hat{\theta} \in S^1\}.$$

为方便起见, 引入记号 $M_\pm$, $M_\pm^*$, $\mathcal{W}_{L_-, L_+}(\theta)$ 和 $\mathcal{W}^*_{L_-^*, L_+^*}(\theta)$, 即定义

$$M_+ = e^{\int_0^{L_+} E_\ell(s)ds}, \quad M_- = e^{\int_{-L_-}^0 E_\ell(s)ds};$$

$$M_+^* = e^{\int_0^{L_+^*} E_{\ell^*}(s)ds}, \quad M_-^* = e^{\int_{-L_-^*}^0 E_{\ell^*}(s)ds}.$$

在 Mel′nikov 函数 (10.1.3) 和 (10.1.5) 中, 用 $L_+, -L_-$ 代替积分限 $+\infty, -\infty$ 分别记为 $\mathcal{W}_L(\theta)$ 和 $\mathcal{W}_L^*(\theta)$.

定理 10.1.1 设映射 $\mathcal{R}:\Sigma\to\Sigma^*$ 为 $(\hat{\theta},\hat{\mathbb{X}})=\mathcal{R}(\theta,\mathbb{X})$. 则

$$\begin{aligned}\hat{\theta}&=\theta+\boldsymbol{a}-\frac{1}{\beta^*}\ln\mathbb{F}(\theta,\mathbb{X},\mu)+\mathcal{O}_{\theta,\mathbb{X},h}(\mu),\\ \hat{\mathbb{X}}&=\boldsymbol{b}[\mathbb{F}(\theta,\mathbb{X},\mu)]^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}}.\end{aligned}\tag{10.1.10}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{1}{\beta^*}\left(\ln\mu^{-1}+\ln\frac{\varepsilon^*}{(1+\mathcal{O}(\varepsilon^*))M_+}+\ln(\xi_{\alpha^*}\cdot\xi_{\beta^*}^{\perp})\right)+(L_-+L_+),\\ \boldsymbol{b}&=(\mu(\varepsilon^*)^{-1})^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}[(1+\mathcal{O}(\varepsilon^*))M_+]^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}}\end{aligned}\tag{10.1.11}$$

为常数.

$$\mathbb{F}(\theta,\mathbb{X},\mu)=\mathcal{W}(\theta+L_-)+M_-(1+\mathcal{O}(\varepsilon))(\xi_\alpha\cdot\xi_\beta^{\perp})\mathbb{X}+\mathbb{E}(\theta)+\mathcal{O}_{\theta,\mathbb{X},h}(\mu),\tag{10.1.12}$$

其中 $\mathcal{W}(\theta+L_-)$ 是 (10.1.3) 式定义的 Mel′nikov 函数, 且

$$\mathbb{E}(\theta)=((M_+)^{-1}+M_-)\mathcal{O}_\theta(1)+\mathcal{W}_L(\theta+L_-)-\mathcal{W}(\theta+L_-).\tag{10.1.13}$$

定理 10.1.2 设映射 $\mathcal{R}^*:\Sigma^*\to\Sigma$ 为 $(\theta,\mathbb{X})=\mathcal{R}^*(\hat{\theta},\hat{\mathbb{X}})$. 则

$$\begin{aligned}\theta&=\hat{\theta}+\boldsymbol{a}^*-\frac{1}{\beta}\ln\mathbb{F}^*(\hat{\theta},\hat{\mathbb{X}},\mu)+\mathcal{O}_{\hat{\theta},\hat{\mathbb{X}},h}(\mu),\\ \mathbb{X}&=\boldsymbol{b}^*[\mathbb{F}^*(\hat{\theta},\hat{\mathbb{X}},\mu)]^{-\frac{\alpha}{\beta}},\end{aligned}\tag{10.1.14}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^*&=\frac{1}{\beta}\left(\ln\mu^{-1}+\ln\frac{\varepsilon}{(1+\mathcal{O}(\varepsilon))M_+^*}+\ln(\xi_\alpha\cdot\xi_\beta^{\perp})\right)+(L_-^*+L_+^*),\\ \boldsymbol{b}^*&=(\mu\varepsilon^{-1})^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}[(1+\mathcal{O}(\varepsilon))M_+^*]^{-\frac{\alpha}{\beta}}\end{aligned}\tag{10.1.15}$$

为常数.

$$\mathbb{F}^*(\hat{\theta},\hat{\mathbb{X}},\mu)=\mathcal{W}^*(\hat{\theta}+L_-^*)+M_-^*(1+\mathcal{O}(\varepsilon^*))(\xi_{\alpha^*}\cdot\xi_{\beta^*}^{\perp})\hat{\mathbb{X}}+\mathbb{E}^*(\hat{\theta})+\mathcal{O}_{\hat{\theta},\hat{\mathbb{X}},h}(\mu),\tag{10.1.16}$$

其中 $\mathcal{W}^*(\hat{\theta}+L_-^*)$ 是 (10.1.5) 式定义的 Mel′nikov 函数, 且

$$\mathbb{E}^*(\hat{\theta})=((M_+^*)^{-1}+M_-^*)\mathcal{O}_{\hat{\theta}}(1)+\mathcal{W}_L^*(\hat{\theta}+L_-^*)-\mathcal{W}^*(\hat{\theta}+L_-^*).\tag{10.1.17}$$

为了分析返回映射 $\mathcal{F}=\mathcal{R}^*\circ\mathcal{R}$ 的动力学, 作如下几点说明:

(i) 因为 $|\alpha| > \beta$, $|\alpha^*| > \beta^*$, 所以当 $\mu \to 0$ 时, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}^* \to 0$. 因此对充分小的 μ, 二维映射 $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^*$, $\mathcal{F}$ 分别是下列三个一维奇异极限映射 f_μ, f_μ^*, $F_\mu : S^1 \to S^1$ 的开折, 其中

$$
\begin{aligned}
f_\mu(\theta) &= \theta + \boldsymbol{a} - \frac{1}{\beta^*}\ln(\mathcal{W}(\theta + L_-) + \mathbb{E}(\theta)),\\
f_\mu^*(\theta) &= \theta + \boldsymbol{a}^* - \frac{1}{\beta}\ln(\mathcal{W}^*(\theta + L_-^*) + \mathbb{E}^*(\theta)),\\
F_\mu &= f_\mu^* \circ f_\mu.
\end{aligned}
\tag{10.1.18}
$$

(ii) 在定理 10.1.1 和 10.1.2 中, 如果固定 $\varepsilon, \varepsilon^*$, 则当 $\mu \to 0$ 时, $\boldsymbol{a} \approx \dfrac{h}{\beta^*} \to \infty$, $\boldsymbol{a}^* \approx \dfrac{h}{\beta} \to \infty$, 其中 $h = \ln \mu^{-1}$.

(iii) $M_+ \sim (\varepsilon^*)^{\frac{\beta^*}{\alpha^*}}$, $M_- \sim \varepsilon^{-\frac{\alpha}{\beta}}$, $M_+^* \sim \varepsilon^{\frac{\beta}{\alpha}}$, $M_-^* \sim (\varepsilon^*)^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}}$.

根据

$$
\frac{\partial}{\partial \mathbb{X}}\mathbb{F}(\theta, \mathbb{X}, \mu) \approx M_-(\xi_\alpha \cdot \xi_\beta^\perp), \quad \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbb{X}}}\mathbb{F}^*(\theta, \hat{\mathbb{X}}, \mu) \approx M_-^*(\xi_{\alpha^*} \cdot \xi_{\beta^*}^\perp)
$$

和 $M_-, M_-^* \gg \mathcal{O}(\mu)$ 可知, 返回映射 $\mathcal{F}_\mu$ 是一维映射 $F_\mu = f_\mu^* \circ f_\mu$ 在 $\mathbb{X}$-方向的非退化开折.

(iv) 由 $M_\pm$, $M_\pm^*$ 的定义得到

$$
\boldsymbol{a} \approx \frac{1}{\beta^*}\ln \mu^{-1} + \mathcal{K}, \quad \boldsymbol{a}^* \approx \frac{1}{\beta}\ln \mu^{-1} + \mathcal{K}^*,
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K} &= C - \frac{1}{\beta^*}\ln(\xi_{\alpha^*} \cdot \xi_{\beta^*}^\perp) + \frac{1}{\beta^*}\int_0^{+\infty}(\beta^* - E_\ell(t))dt,\\
\mathcal{K}^* &= C^* - \frac{1}{\beta}\ln(\xi_\alpha \cdot \xi_\beta^\perp) + \frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty}(\beta - E_{\ell^*}(t))dt,\\
C &= \lim_{t \to -\infty}\frac{1}{\beta}\ln e^{-\beta t}|\ell(t) - P|,\\
C^* &= \lim_{t \to -\infty}\frac{1}{\beta^*}\ln e^{-\beta^* t}|\ell^*(t) - P^*|
\end{aligned}
\tag{10.1.19}
$$

是由未扰动系统 (10.1.1) 决定的四个常数.

(v) 当 $\varepsilon, \varepsilon^* \to 0$ 时可以证明

$$
\|\mathcal{W}(\theta) - \mathcal{W}_{L_-, L_+}(\theta)\|_{C^r}, \quad \|\mathcal{W}^*(\theta) - \mathcal{W}^*_{L_-^*, L_+^*}(\theta)\|_{C^r} \to 0.
$$

所以 $\mathbb{E}(\theta)$, $\mathbb{E}^*(\hat{\theta})$ 分别是 $\mathcal{W}(\theta)$, $\mathcal{W}^*(\hat{\theta})$ 的 C^r-小扰动.

10.2 动力学结果

记环面 $\Sigma = S^1 \times I$. 用 θ 表示 $S^1 = \mathbb{R}/\{nT\}$ 上的点, $\mathbb{X}$ 表示区间 $I = [-1,1]$ 上的点. 称 θ 为水平方向, $\mathbb{X}$ 为垂直方向.

易知映射 $\mathcal{R}$ 只定义在 Σ 的一个子集上. 因为从 Σ 上出发的解到达邻域 $B_{\varepsilon^*}(P^*)$ 后, 部分解通过不稳定流形到达 Σ^*, 而其余解通过另一不稳定流形离开 $\ell \cup \ell^*$ 的邻域, 见图 10.2.1.

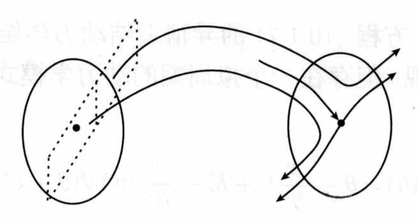


图 10.2.1 $\mathcal{R}$ 在 Σ 上的定义域

假设 $\mathcal{R}$ 定义在 $U \subset \Sigma$ 上, 即 $U = \{(\theta, \mathbb{X}) \in \Sigma : \mathbb{F}(\theta, \mathbb{X}, \mu) > 0\}$. 则 U 的边界由方程

$$\mathbb{F}(\theta, \mathbb{X}, \mu) = \mathcal{W}(\theta + L_-) + M_-(1 + \mathcal{O}(\varepsilon))(\xi_\alpha \cdot \xi_\beta^\perp)\mathbb{X} + \mathbb{E}(\theta) + \mathcal{O}_{\theta,\mathbb{X},h}(\mu) = 0$$

决定. 解上述方程得

$$\mathbb{X} = \frac{1}{M_-(1 + \mathcal{O}(\varepsilon))(\xi_\alpha \cdot \xi_\beta^\perp)}(\mathcal{W}(\theta + L_-) + \mathbb{E}(\theta)) + \mathcal{O}_{\theta,h}(\mu). \tag{10.2.1}$$

因为 $\mathcal{W}(\theta)$ 的所有零点非退化, 所以对充分小的 ε, U 的边界是若干条几乎垂直的曲线. 这些曲线与 θ-轴的交点靠近 $\mathcal{W}(\theta + L_-)$ 的零点, 把 Σ 分成有限个竖条的并集 $U = \cup U_i$. 记 $W = \Sigma \setminus U$.

类似于同宿缠结, 每一个 U_i 的像 $\mathcal{R}(U_i)$ 绕 Σ^* 无穷多次, 如图 9.2.1. 当 $\mu \to 0$ 时, $\mathcal{R}(U_i)$ 在水平方向几乎以常速率 ${\beta^*}^{-1}$ 运动. 同理, 映射 $\mathcal{R}^*$ 定义在 Σ^* 的子集 $U^* = \bigcup\limits_i U_i^*$ 上, $\mathcal{R}^*(U_i^*)$ 绕 Σ 无穷多次. 当 $\mu \to 0$ 时, $\mathcal{R}^*(U_i^*)$ 几乎以常速率 β^{-1} 在 θ-方向运动. 记 $W^* = \Sigma^* \setminus U^*$.

视 μ 为参数, 返回映射为 $\mathcal{F}_\mu$. 记

$$\Omega_\mu = \{(x, y, \theta) \in \Sigma : \mathcal{F}_\mu^n(x, y, \theta) \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{Z}^+\}, \quad \Lambda_\mu = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{F}_\mu^n(\Omega_\mu).$$

则 $\mathcal{F}_\mu$ 的异宿缠结动力学结构都体现在 Λ_μ 中. 显然, 对充分小的所有 μ 值, Λ_μ 含有一个无穷符号马蹄. Λ_μ 的结构也敏感依赖于折叠部分在 Σ 中的位置. 类似于同宿缠结, 得到 $\mathcal{F}_\mu$ 的三类动力学现象:

(a) 如果 $\mathcal{R}(U_i)$ 的折叠部分全落在 W^* 内部, 而且 $\mathcal{R}^*(U_i^*)$ 的折叠部分全落在 W 内部, 那么整个异宿缠结就简化为一个无穷符号马蹄.

(b) 对一维映射 $F_\mu = f_\mu^* \circ f_\mu$, 其中 f_μ, f_μ^* 如 (10.1.18) 式. 当 $\mu \to 0$ 时存在无穷多的 μ 值, 使得 $F_\mu(\theta_c) = \theta_c$, 其中 $\theta_c = \theta_c(\mu)$ 是 F_μ 的临界点, 即 $F_\mu'(\theta_c(\mu)) = 0$. 这些异宿缠结出现强吸引的周期解.

(c) 当 $\mu \to 0$ 时, 存在无穷多个 μ 值使得马蹄的周期鞍点的不稳定流形与稳定流形同宿相切. 则在每一个 μ 值附近存在无穷多个 Newhouse 周期汇和似 Hénon 吸引子.

因此, 当 $\mu \to 0$ 时, 方程 (10.1.7) 的异宿缠结动力学结构敏感依赖于 μ 值, 现象 (a)~(c) 快速交替出现. 但存在一个拟周期的动力学模式. 对新参数 $h = \ln \mu^{-1}$, 记

$$
\begin{aligned}
f_h(\theta) &= \theta + \frac{1}{\beta^*}h + \mathcal{K} - \frac{1}{\beta^*}\ln \mathcal{W}(\theta + C),\\
f_h^*(\theta) &= \theta + \frac{1}{\beta}h + \mathcal{K}^* - \frac{1}{\beta}\ln \mathcal{W}^*(\theta + C^*).
\end{aligned}
\tag{10.2.2}
$$

则 f_h 是以 $\beta^* T$ 为周期的周期函数, 即 $f_h = f_{h+\beta^* T}$. 因此 f_μ 关于 μ 以 $e^{\beta^* T}$ 为周期, 即

$$
f_\mu = f_{\mu e^{-\beta^* T}}.
$$

同理, $f_h^*(\theta)$ 关于 μ 以 $e^{\beta T}$ 为周期, 即

$$
f_\mu^* = f_{\mu e^{-\beta T}}^*.
$$

所以, 一维映射 $F_h = f_h^* \circ f_h : S^1 \to S^1$ 的周期性有两种情况:

(1) 如果 β, β^* 可通约, 即存在 $m, n \in \mathbb{Z}^+$, 使得

$$
\frac{\beta}{\beta^*} = \frac{m}{n}.
$$

则 F_h 关于 μ 以 $e^{n\beta T}$ (或 $e^{m\beta^* T}$) 为周期, 即

$$
F_h = F_{h+n\beta T} = F_{h+m\beta^* T}.
$$

(2) 如果 β, β^* 的有理共振度提高, 直至过渡到不可通约, 则 F_h 逐渐由周期性趋向于非周期性.

对上述现象 (a)~(c), 严格的异宿缠结动力学可综合为下面的定理. 即对方程 (10.1.7), 假设 (H1)~(H3) 成立, 则有下面的结论:

定理 10.2.1 (Birkhoff-Smale-Mel′nikov)　*存在 $\mu_0 > 0$, 使得对任意的 $0 < \mu < \mu_0$, 异宿缠结 Λ_μ 包含可数个符号的 Smale 马蹄.*

定理 10.2.2 存在一列互不相交的开区间 $\{I_n\}$ 趋向于零, 使得对任意的 $\mu \in \bigcup_n I_n$, Λ_μ 包含周期汇.

对 (10.1.19) 中的常数 C 和 C^*, 令

$$\begin{aligned} I_+ &= \{\theta \in [0,T):\ \mathcal{W}(\theta + C) > 0\},\ \ I_- = \{\theta \in [0,T):\ \mathcal{W}(\theta + C) < 0\}, \\ I_+^* &= \{\theta \in [0,T):\ \mathcal{W}^*(\theta + C^*) > 0\},\ I_-^* = \{\theta \in [0,T):\ \mathcal{W}^*(\theta + C^*) < 0\}. \end{aligned} \tag{10.2.3}$$

定义函数

$$\mathcal{D}(\theta) = \theta - \frac{1}{\beta^*}\ln \mathcal{W}(\theta + C); \quad \mathcal{D}^*(\theta) = \theta - \frac{1}{\beta}\ln \mathcal{W}^*(\theta + C^*) \tag{10.2.4}$$

和临界点集

$$\mathcal{C} = \{\theta \in I_+ :\ \mathcal{D}'(\theta) = 0\}, \quad \mathcal{C}^* = \{\theta \in I_+^* :\ \mathcal{D}^{*\prime}(\theta) = 0\}. \tag{10.2.5}$$

定理 10.2.3 如果 $\mathcal{D}(\theta)$ 或者 $\mathcal{D}^*(\theta)$ 有非退化临界点, 即 $\mathcal{C} \neq \varnothing$ 或 $\mathcal{C}^* \neq \varnothing$, 则

(i) (Newhouse 汇) 存在序列 $\{\mu_n\} : \mu_n \to 0$, 使得对每一个 μ_n, 有 $\hat{\mu}_k \to \mu_n$, 且对每一个 $\hat{\mu}_k$, $\Lambda_{\hat{\mu}_k}$ 含有周期汇;

(ii) (奇异吸引子) 在每一个 μ_n 附近存在 μ 的一个正 Lebesgue 测度集 Δ_{μ_n}, 使得 $\forall \mu \in \Delta_{\mu_n}$, Λ_μ 是具有 SRB 测度的似 Hénon 吸引子.

记

$$J = \{\theta \in I_+ : |\mathcal{D}'(\theta)| \leqslant 1\}, \quad J^* = \{\theta \in I_+^* : |(\mathcal{D}^*)'(\theta)| \leqslant 1\}. \tag{10.2.6}$$

令

$$\mathcal{D}_h(\theta) := \frac{h}{\beta^*} + \mathcal{K} + \mathcal{D}(\theta), \quad \mathcal{D}_h^*(\theta) := \frac{h}{\beta} + \mathcal{K}^* + \mathcal{D}^*(\theta).$$

定理 10.2.4 如果存在充分大的 $\tilde{h} \in \mathbb{R}^+$, 使得

$$\mathcal{D}_{\tilde{h}}(J) \subset I_-^*, \quad \mathcal{D}_{\tilde{h}}^*(J^*) \subset I_-.$$

则存在开区间 $I_{\tilde{\mu}}$, 使得 $\forall \mu \in I_{\tilde{\mu}}$, Λ_μ 拓扑共轭于可数个符号的马蹄.

注 (1) 当 $t \to -\infty$ 时, 扰动方程 (10.1.2) 在 P, P^* 点的小邻域内可以线性化. 所以, $|\ell(-L_-) - P| \sim \varepsilon \sim e^{-\beta L_-}$, $|\ell^*(-L_-^*) - P^*| \sim \varepsilon^* \sim e^{-\beta^* L_-^*}$. 因此极限 $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{1}{\beta}\ln e^{-\beta t}|\ell(t) - P|$, $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{1}{\beta^*}\ln e^{-\beta^* t}|\ell^*(t) - P^*|$ 存在, 即 C, C^* 有意义.

(2) (10.2.4) 中定义的函数 $\mathcal{D}(\theta)$, $\mathcal{D}^*(\theta)$ 称为 $\mathcal{R}_\mu$, $\mathcal{R}_\mu^*$ 的奇异极限映射.

定理的证明 (i) 定理 10.2.1 的证明. 该定理的证明只需要条件 (H1), (H2) 和 (H3$'$): $\mathcal{W}(\theta)$ 和 $\mathcal{W}^*(\theta)$ 分别只有一个非退化零点 θ_0 和 θ_0^*.

在截面 Σ 上, θ 为水平方向, $\mathbb{X}$ 为垂直方向. 为了便于分析, 令 $\theta=\theta+C-L_-$. 则 $\mathcal{W}(\theta+L_-)=\mathcal{W}(\theta+C)$, $\mathcal{W}^*(\theta+L_-^*)=\mathcal{W}^*(\theta+L_-^*+C-L_-)=\mathcal{W}^*(\theta+C^*+L_-^*+C-L_--C^*)\approx\mathcal{W}^*(\theta+C^*)$. 因为

$$L_-^*-C^*-L_-+C\approx 0.$$

所以

$$\mathbb{F}(\theta,\mathbb{X},\mu)=\mathcal{W}(\theta+C)+M_-(1+\mathcal{O}(\varepsilon))(\xi_\alpha\cdot\xi_\beta^\perp)\mathbb{X}+\mathbb{E}(\theta)+\mathcal{O}_{\theta,\mathbb{X},h}(\mu)=0 \quad (10.2.7)$$

定义了一条 $\mathbb{X}$ 关于 θ 的曲线 ℓ_v. 该曲线近似于直线 $\theta=\theta_0-C$, 这里 θ_0 为 Mel′nikov 函数 $\mathcal{W}(\theta)$ 的零点. $\mathbb{F}$ 在 ℓ_v 的两侧改变符号. 稍微平移 ℓ_v 至 $\tilde{\ell}_v$, 使得 $\mathbb{F}$ 在 ℓ_v 与 $\tilde{\ell}_v$ 之间取正值. 记由 $\ell_v,\tilde{\ell}_v$ 及 $\mathbb{X}=1,\mathbb{X}=-1$ 所围的区域为 $\tilde{U}$. 同样, 在截面 Σ^* 上也可得曲线 $\ell_v^*,\tilde{\ell}_v^*$ 及区域 $\tilde{U}^*$.

定义 $\tilde{U},\tilde{U}^*$ 中的水平锥和垂直锥分别为

$$\mathcal{C}_h(z)=\left\{\nu=(u,v):|\frac{v}{u}|<\frac{1}{100}\right\},$$
$$\mathcal{C}_\nu(z)=\left\{\nu=(u,v):|\frac{v}{u}|>100\right\}.$$

以 $\mathcal{C}_h(z)$ 中的向量为切向量的曲线称为水平曲线. 以 $\mathcal{C}_\nu(z)$ 中的向量为切向量的曲线称为垂直曲线. 两条不相交水平曲线所围的区域称为水平带, 两条不相交垂直曲线所围的区域称为垂直带.

$\forall c\in[-1,1]$, 记

$$\ell_c=\{\theta\in\tilde{U}:\mathbb{X}=c\}.$$

则 ℓ_c 为 $\tilde{U}$ 中的水平线段. 下证 $\mathcal{R}(\ell_c)$ 为 $\tilde{U}^*$ 中的水平曲线. 对 $\mathcal{R}(\ell_c)$ 上的每一点 $(\hat{\theta},\hat{\mathbb{X}})$, 根据 (10.1.10) 式有

$$\left|\frac{d\hat{\mathbb{X}}}{d\hat{\theta}}\right|\approx\left|\frac{\boldsymbol{b}\alpha^*\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}}\mathcal{W}'(\theta+C)}{\beta^*\mathbb{F}-\mathcal{W}'(\theta+C)}\right|.$$

因为 $\boldsymbol{b}\sim\mu^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}$, 故存在 $\mu_0>0$, 使得对任意的 $0<\mu<\mu_0$ 有

$$\left|\frac{d\hat{\mathbb{X}}}{d\hat{\theta}}\right|<\frac{1}{100}.$$

即曲线 $\mathcal{R}(\ell_c)$ 上每一点的切向量都在该点的水平锥中. 所以 $\mathcal{R}(\ell_c)$ 为 $\tilde{U}^*$ 中的水平曲线. 进而 $\mathcal{R}(\tilde{U})$ 为水平带. 根据 θ 的周期性, 记

$$\mathcal{R}(\tilde{U})\cap\tilde{U}^*=\bigcup_{i=1}^{+\infty}H_i^*,$$

其中每个 H_i^* 为水平带, 且当 $i \to +\infty$ 时, H_i^* 趋向于直线 $\{\mathbb{X}=0\}$.

记 $V_i = \mathcal{R}^{-1}(H_i^*)$, 则 V_i 为 $\tilde{U}$ 中的垂直带. 因为 $\forall(\theta,\mathbb{X}) \in \mathcal{R}^{-1}(H_i^*)$,

$$\left|\frac{d\theta}{d\mathbb{X}}\right| \approx \left|\frac{M_-(1+\mathcal{O}(\varepsilon))(\xi_\alpha \cdot \xi_\beta^\perp)}{\mathcal{W}'(\theta+C)}\right|.$$

由 $M_- \sim \varepsilon^{-\frac{\alpha}{\beta}}$ 知道, 存在 $\varepsilon_0 \ll 1$, 使得

$$\left|\frac{d\theta}{d\mathbb{X}}\right| < \frac{1}{100},$$

即

$$\left|\frac{d\mathbb{X}}{d\theta}\right| > 100.$$

因此 V_i 为 $\tilde{U}$ 中的垂直带. 当 $i \to +\infty$ 时, V_i 趋向于曲线 ℓ_v.

同理, 对映射 $\mathcal{R}^*$, 定义相应的可数个水平带和垂直带.

复合映射 $\mathcal{R}$ 与 $\mathcal{R}^*$, 则 $\mathcal{F}(\tilde{U}) = \mathcal{R}^* \circ \mathcal{R}(\tilde{U})$ 为 $\tilde{U}$ 中可数个横条. 同理, $\mathcal{F}^{-1}(\tilde{U})$ 为 $\tilde{U}$ 中可数个竖条. 因此, $\tilde{U}$ 的一次正像 $\mathcal{F}(\tilde{U})$ 和一次逆像 $\mathcal{F}^{-1}(\tilde{U})$ 的交集为可数个小区域.

下证在切映射 $D\mathcal{R}$, $D\mathcal{R}^*$ 作用下, 水平带扩张, 垂直带压缩, 并满足一定的扩张压缩比.

对任意的 $z \in \tilde{U}$, Jacobi 矩阵

$$D\mathcal{R}_z \approx \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \theta} & -\dfrac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{X}} \\ -\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \theta} & -\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{X}} \end{pmatrix}.$$

对 $\nu = (u,v) \in \mathcal{C}_h(z)$,

$$D\mathcal{R}_z(\nu) \approx \begin{pmatrix} (1 - \dfrac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \theta})u - \dfrac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{X}}v \\ -\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\left(\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \theta}u + \dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{X}}v\right) \end{pmatrix}.$$

向量 $D\mathcal{R}_z(\nu)$ 的斜率

$$\begin{aligned} |S(D\mathcal{R}_z(\nu))| &\approx \left|\frac{\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\left(\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \theta}u + \dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{X}}v\right)}{\left(1 - \dfrac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \theta}\right)u - \dfrac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{X}}v}\right| \\ &= \left|\frac{\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\left(\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{X}}\dfrac{v}{u}\right)}{\left(1 - \dfrac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \theta}\right) - \dfrac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{X}}\dfrac{v}{u}}\right|. \end{aligned}$$

因此存在 $\mu_1>0$, 使得对任意的 $0<\mu<\mu_1$ 有

$$|S(D\mathcal{R}_z(\nu))|<\frac{1}{100},$$

即

$$D\mathcal{R}_z(\mathcal{C}_h(z))\subset\mathcal{C}_h(\mathcal{R}(z)).$$

向量 $D\mathcal{R}_z(\nu)$ 的长度 $|D\mathcal{R}_z(\nu)|\approx\left|\left(1-\frac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\frac{\partial\mathbb{F}}{\partial\theta}\right)u-\frac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\frac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{X}}v\right|$. 因为 $\mathbb{F}\to0^+$, 所以存在常数 $\lambda>1$, 使得

$$|D\mathcal{R}_z(\nu)|>\lambda|\nu|.$$

同理可证, 对映射 $\mathcal{R}^*$ 也有 $D\mathcal{R}^*_z(\mathcal{C}_h(z))\subset\mathcal{C}_h(\mathcal{R}^*(z))$ 且 $|D\mathcal{R}^*_z(\tau)|>\lambda|\tau|$.

对逆映射 $\mathcal{R}^{-1}$, 矩阵 $D\mathcal{R}$ 的逆矩阵 $D\mathcal{R}^{-1}$ 为

$$D\mathcal{R}^{-1}\approx\frac{1}{-\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{X}}}\begin{pmatrix}-\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{X}} & \dfrac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{X}}\\ \boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\theta} & 1-\dfrac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\theta}\end{pmatrix}.$$

对任意的 $\nu\in\mathcal{C}_v(\mathcal{R}(z))$, 有

$$D\mathcal{R}^{-1}(\nu)\approx\frac{1}{-\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{X}}}\begin{pmatrix}-\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{X}}u+\dfrac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{X}}v\\ \boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\theta}u+\left(1-\dfrac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\theta}\right)v\end{pmatrix}.$$

向量 $D\mathcal{R}^{-1}(\nu)$ 的斜率

$$|S(D\mathcal{R}^{-1}(\nu))|\approx\left|\frac{\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\theta}\dfrac{u}{v}+\left(1-\dfrac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\theta}\right)}{-\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{X}}\dfrac{u}{v}+\dfrac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{X}}}\right|.\tag{10.2.8}$$

因为 $\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{X}}\approx M_-$. 如果 $\mathbb{F}>\sqrt{M_-}$, 则上式的分母

$$\begin{aligned}\left|-\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\frac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{X}}\frac{u}{v}+\frac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\frac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{X}}\right|&<\left|\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\frac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{X}}\right|\left|\frac{u}{v}\right|+\left|\frac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\frac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{X}}\right|\\&<\frac{1}{100}\left|\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\frac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{X}}\right|+\frac{1}{\beta^*}\sqrt{M_-}.\end{aligned}$$

因此对充分小的 μ 和 ε, (10.2.8) 式的分母也充分小. 分子主项 $1-\dfrac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\theta}\approx 1-\dfrac{\mathcal{W}'(\theta+C)}{\beta^*\mathcal{W}(\theta+C)}$ 不随 μ,ε 变化. 所以 $|S(D\mathcal{R}^{-1}(\nu))|>100$.

如果 $\mathbb{F} < \sqrt{M_-}$, 式 (10.2.8) 可重新写为

$$|S(D\mathcal{R}^{-1}(\nu))| \approx \left| \frac{\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}}\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \theta}\dfrac{u}{v} + \left(\mathbb{F} - \dfrac{1}{\beta^*}\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \theta}\right)}{-\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}}\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{X}}\dfrac{u}{v} + \dfrac{1}{\beta^*}\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{X}}} \right|.$$

这时分母

$$\left| -\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}}\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{X}}\frac{u}{v} + \frac{1}{\beta^*}\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{X}} \right| < \frac{1}{100}\left| \boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}}\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{X}} \right| + \frac{1}{\beta^*}\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{X}}.$$

此时对充分小的 μ 和 ε, 分母也充分小. 分子主项 $\dfrac{1}{\beta^*}\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \theta} \approx \dfrac{1}{\beta^*}\mathcal{W}'(\theta + C)$ 不随 μ 和 ε 变化. 所以 $|S(D\mathcal{R}^{-1}(\nu))| > 100$. 因此, 无论 $\mathbb{F} > \sqrt{M_-}$ 还是 $\mathbb{F} < \sqrt{M_-}$ 都可得到 $|S(D\mathcal{R}^{-1}(\nu))| > 100$. 这样就证明了

$$D\mathcal{R}^{-1}_{\mathcal{R}(z)}(\mathcal{C}_v(\mathcal{R}(z))) \subset \mathcal{C}_v(z).$$

向量 $D\mathcal{R}^{-1}(\nu)$ 的长度

$$|D\mathcal{R}^{-1}(\nu)| \approx \left| \frac{\left(1 - \dfrac{1}{\beta^*\mathbb{F}}\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \theta}\right)}{\boldsymbol{b}\alpha^*(\beta^*)^{-1}\mathbb{F}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{X}}} v \right|.$$

因为 $\boldsymbol{b} \to 0(\mu \to 0)$, 所以存在常数 $\lambda > 1$, 使得

$$|D\mathcal{R}^{-1}(\nu)| > \lambda|\nu|.$$

同理可证 $D(\mathcal{R}^*)^{-1}_{\mathcal{R}^*(z)}(\mathcal{C}_v(\mathcal{R}^*(z))) \subset \mathcal{C}_v(z)$ 且 $|D(\mathcal{R}^*)^{-1}_{\mathcal{R}^*(z)}(\tau)| > \lambda|\tau|$.

所以对映射 $\mathcal{F} = \mathcal{R}^* \circ \mathcal{R}$, 存在 $\mu^* = \min\{\mu_0, \mu_1\} > 0$, 使得对任意 $0 < \mu < \mu^*$, $\mathcal{F}_\mu$ 的不变集包含可数个符号的马蹄.

(ii) 定理 10.2.4 的证明.

由条件 (H3)(ii) 知, $\mathcal{W}(\theta)$, $\mathcal{W}^*(\theta)$ 的所有零点都是非退化的 (即斜率不为零). 在截面 Σ 中, 令映射 $\mathcal{R}$ 的定义域为 $U = \cup U_i$, 其中 U_i 为使得 $\mathbb{F} > 0$ 的区域. 同理, 令 $U^* = \cup U_j^*$ 为 $\mathcal{R}^*$ 的定义域, 其中 U_j^* 为使得 $\mathbb{F}^* > 0$ 的区域. 因为

$$J = \{\theta \in I_+ : |\mathcal{D}'(\theta)| \leqslant 1\}, \quad J^* = \{\theta \in I_+^* : |(\mathcal{D}^*)'(\theta)| \leqslant 1\}.$$

如果存在充分大的 $\tilde{h}$, 使得

$$\mathcal{D}_{\tilde{h}}(J) \subset I_-^*, \quad \mathcal{D}_{\tilde{h}}^*(J^*) \subset I_-.$$

说明从一维映射 (即 θ 变量) 的角度看, $\mathcal{R}$ 把所有临界点都映到了 $\mathcal{R}^*$ 的定义域之外. 同时, $\mathcal{R}^*$ 把 θ 增长率不超过 1 的部分也映到了 $\mathcal{R}$ 的定义域之外. 换句话说, $\mathcal{R}$ 与 $\mathcal{R}^*$ 把增长率大于 1 的 θ 区域都映到了各自的定义域内. 类似于定理 10.2.1 的证明, 这时 $\mathcal{R}$ 把每一个 U_i 映为 Σ^* 中的可数个横条, 即 $\mathcal{R}(U_i)\bigcap U^* = \bigcup\limits_j\bigcup\limits_i U_i$. 同理, $\mathcal{R}^*$ 把每一个 U_j^* 映为 Σ 中的可数个横条, 即 $\mathcal{R}^*(U_j^*)\bigcap U = \bigcup\limits_i\bigcup\limits_j U_j^*$. 所以 $\mathcal{F} = \mathcal{R}^*\circ\mathcal{R}$ 把 Σ 中的每一个 U_i 映为 Σ 中的可数个横条. 它的逆像为 Σ 中的可数个竖条. 这样就证明了 $\mathcal{F}$ 的不变集就是可数个符号的马蹄, 因此它拓扑共轭于 (Σ_∞, σ).

因为区间 I_-, I_-^* 有一定的宽度, 所以变动 $\tilde{h}$ 得一 μ 区间 $I_{\tilde{\mu}}$, 使得 $\forall\mu\in I_{\tilde{\mu}}$, $\mathcal{F}_\mu$ 在不变集上只拓扑共轭于 (Σ_∞, σ).

(iii) 定理 10.2.2 的证明.

因为映射 $\mathcal{F} = \mathcal{R}^*\circ\mathcal{R}$ 是一维奇异极限映射 $F_h = f_h^*\circ f_h$ 在 $\mathbb{X}$ 方向的非退化开折. 首先证明 F_h 有不动点. 对式 (10.2.2) 中的圆周映射 f_h, 假设 $\theta_c\in S^1$ 为它的临界点, 即 $f_h'(\theta_c) = 0$.

对 $I_+^* = \{\theta\in S^1,\ \mathcal{W}^*(\theta + C^*) > 0\}$, 令 I^* 为 I_+^* 的一个连通分支. 取 I^* 中的闭子区间 J^* 使得 $\mathcal{D}^*(J^*)$ 单调增加且 $|\mathcal{D}^*(J^*)| > \dfrac{\beta^*}{\beta}T + 2T$. 因为当 $h\to+\infty$ 时, $f_h(\theta_c)$ 在圆周上不断运动. 因此可取区间 (h_1, h_2) 使得 $\{f_h(\theta_c):\ h\in(h_1, h_2)\} = J^*$. 定义映射 $\gamma:(h_1, h_2)\to S^1$ 为

$$\gamma(h) = f_h^*(f_h(\theta_c)).$$

则 $\gamma(h_1, h_2)\supset S^1 = \mathbb{R}/\{nT\}$. 因为一方面

$$[f_{h_1}(\theta_c), f_{h_2}(\theta_c)]\subset J^*,$$

所以

$$\begin{aligned}|J^*| &\geqslant |f_{h_2}(\theta_c) - f_{h_1}(\theta_c)|\\ &= \left|\theta_c + \frac{h_2}{\beta^*} + \mathcal{K} - \frac{\ln\mathcal{W}(\theta_c + C)}{\beta^*} - \left(\theta_c + \frac{h_1}{\beta^*} + \mathcal{K} - \frac{\ln\mathcal{W}(\theta_c + C)}{\beta^*}\right)\right|\\ &= \frac{|h_2 - h_1|}{\beta^*}.\end{aligned}$$

因此

$$|h_2 - h_1| < \beta^*|J^*| < \beta^* T.$$

另一方面,

$$|\gamma(h_2) - \gamma(h_1)| = \left|f_{h_2}^*(f_{h_2}(\theta_c)) - f_{h_1}^*(f_{h_1}(\theta_c))\right|$$

$$= \left| \mathcal{D}^*(f_{h_2}(\theta_c)) + \frac{h_2}{\beta} + \mathcal{K}^* - \mathcal{D}^*(f_{h_1}(\theta_c)) - \frac{h_1}{\beta} - \mathcal{K}^* \right|$$
$$= \left| \mathcal{D}^*(f_{h_2}(\theta_c)) - \mathcal{D}^*(f_{h_1}(\theta_c)) + \frac{h_2 - h_1}{\beta} \right|$$
$$> |\mathcal{D}^*(f_{h_2}(\theta_c)) - \mathcal{D}^*(f_{h_1}(\theta_c))| - \frac{|h_2 - h_1|}{\beta} > \frac{\beta^*}{\beta}T + 2T - \frac{\beta^*}{\beta}T = 2T.$$

所以一定存在 $\tilde{h} \in (h_1, h_2)$, 使得 $\gamma(\tilde{h}) = \theta_c$. 即 $F_{\tilde{h}}$ 有不动点 θ_c. 因为

$$\frac{\partial F_{\tilde{h}}(\theta)}{\partial \theta} = f_{\tilde{h}}^{*\prime}(f_{\tilde{h}}(\theta)) \cdot f_{\tilde{h}}'(\theta)|_{\theta=\theta_c} = 0.$$

所以 θ_c 为 $F_{\tilde{h}}$ 的吸引不动点. 根据开折定理, 映射 $\mathcal{F}_{\tilde{h}} = \mathcal{R}^* \circ \mathcal{R}$ 在 $(\theta, \mathbb{X}) = (\theta_c, 0)$ 附近也有吸引不动点, 即周期汇.

当 $h \to +\infty$ 即 $\mu \to 0$ 时, $f_h(\theta_c)$ 在圆周上无数次地遍历区间 J^*. 故存在一列互不相交的趋于零的开区间 $\{\tilde{I}_n\}$, 使得对任意的 $\mu \in \bigcup_n \tilde{I}_n$, $\mathcal{F}_\mu$ 有周期汇.

(iv) 定理 10.2.3 的证明.

不失一般性, 假设 $\mathcal{D}(\theta)$ 有非退化临界点 $c \in I_+$. 令 I_d 为含点 c 的小区间, 使得 $\forall \theta \in I_d$, $\mathcal{D}''(\theta) \neq 0$. 记 $V_d = \{(\theta, \mathbb{X}) : \theta \in I_d\}$. 根据 $\mathcal{R}$ 的定义域 $U = \cup U_i$ 知道, 存在 U_i, 使得 $V_d \subset U_i$. 对给定的充分大的 $\tilde{h}$, 由定理 10.2.1 知道, 返回映射 $\mathcal{F}$ 在 U_i 的垂直边界附近存在无穷多个鞍点. 选取一个记为 p. 因为 p 充分靠近 U_i 的边界, 所以存在含 $\tilde{h}$ 的参数区间 (h_1, h_2) 满足: (a) $h_2 - h_1 > 2\beta^* T$; (b) 鞍点 p 在区间 (h_1, h_2) 上可光滑延拓为 $p(h) : (h_1, h_2) \to \Sigma$. 对 $h \in (h_1, h_2)$, 不稳定流形 $W^u(p(h))$ 中一定有水平横条穿越 V_d. 记 $\ell_d(h)$ 为与 V_d 横截的部分. 则 $\ell_d(h)$ 在 $\mathcal{R}$ 作用下是截面 Σ^* 上带折点的曲线. 由 $h_2 - h_1 > 2\beta^* T$ 知道, 当 h 取遍整个区间 (h_1, h_2) 时, $\mathcal{R}(\ell_d(h))$ 的折点绕过 Σ^* 的 θ-方向至少一圈.

如同前面定理 10.2.2 的证明, 对 $I_+^* = \{\theta \in S^1, \mathcal{W}^*(\theta + C^*) > 0\}$, 先取 I_+^* 的连通分支 I^*, 再取 I^* 的闭子区间 $J^* \subset I^*$, 使得 $\mathcal{D}^*(J^*)$ 单调且 $|\mathcal{D}^*(J^*)| > \dfrac{\beta^*}{\beta}T + 2T$. 同时我们还可要求在 J^* 上, $|(\mathcal{D}^*)'(\theta)| > 1$. 因为在 J^* 上, $\mathcal{D}^*$ 没有临界点, 所以 $\mathcal{F}(\ell_d) = \mathcal{R}^*(\mathcal{R}(\ell_d))$ 保持 $\mathcal{R}(\ell_d)$ 的折点曲线不变. 在 Σ^* 上, 令 $V_d^* = \{(\theta, \mathbb{X}) : \theta \in J^*\}$. 则存在子区间 $(h_1^*, h_2^*) \subset (h_1, h_2)$, 使得 $\mathcal{R}(\ell_d(h_1^*))$ 和 $\mathcal{R}(\ell_d(h_2^*))$ 的折点分别落在 V_d^* 的两垂直边界上. 所以存在 $h_0 \in (h_1^*, h_2^*)$, 使得 $\mathcal{F}(\ell_d(h_0))$ 刚好相切于稳定流形 $W^s(p(h_0))$. 因此当 $h = h_0$ 时, 映射 $\mathcal{F}$ 有同宿相切. 由于 c 是 $\mathcal{D}(\theta)$ 的非退化临界点, 该同宿相切是二次的.

根据 Newhouse 的理论, 需进一步证明上述同宿相切是横截的. 也就是说要证明当 h 变化时, $\mathcal{F}(\ell_d(h))$ 的折点与稳定流形 $W^s(p(h))$ 以不同的速度变化. 这部分的详细证明见文献 (Wang et al., 2001; Wang et al., 2011).

10.3　具体例子及数值结果

本节应用前面的定理研究一个具体的例子.

对平面上的二阶微分方程

$$\frac{dx}{dt}=2xy-\eta(x+\gamma x^2),\qquad \frac{dy}{dt}=1-2x-y^2, \tag{10.3.1}$$

其中 η,γ 为参数. 方程 (10.3.1) 有两个鞍点 $P=(0,-1)$, $P^*=(0,1)$. 鞍点 P 的特征值为 $\alpha=-\eta-2$, $\beta=2$, 相应的特征向量为

$$\xi_\alpha=\left(\frac{4+\eta}{\sqrt{20+8\eta+\eta^2}},\ \frac{2}{\sqrt{20+8\eta+\eta^2}}\right),\quad \xi_\beta=(0,\ 1). \tag{10.3.2}$$

P^* 点的特征值为 $\alpha^*=-2$, $\beta^*=2-\eta$, 相应的特征向量为

$$\xi_{\alpha^*}=(0,\ -1),\quad \xi_{\beta^*}=\left(\frac{4-\eta}{\sqrt{20-8\eta+\eta^2}},\ \frac{-2}{\sqrt{20-8\eta+\eta^2}}\right). \tag{10.3.3}$$

从 P 到 P^*, 方程 (10.3.1) 有一条异宿轨道 $\ell=(a(t),b(t))$, 其中

$$a(t)=0,\qquad b(t)=1-\frac{2}{e^{2t}+1}. \tag{10.3.4}$$

对充分小的 $\eta>0$, 一定存在 γ_η, 使得方程 (10.3.1) 有一条从 P^* 到 P 的异宿轨道 $\ell_\eta^*=(a_\eta^*(t),b_\eta^*(t))$. 当 $\eta=0$ 时,

$$a_0^*(t)=\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2},\qquad b_0^*(t)=\frac{2}{e^{2t}+1}-1. \tag{10.3.5}$$

对方程 (10.3.1) 作如下扰动

$$\frac{dx}{dt}=2xy-\eta(x+\gamma_\eta x^2)+\mu(y^2-1)^2\sin\omega t,\qquad \frac{dy}{dt}=1-2x-y^2, \tag{10.3.6}$$

μ 为扰动强度, ω 为频率.

10.3.1　验证条件

首先计算 Mel'nikov 函数 $\mathcal{W}(\theta)$. 因为

$$E_\ell(t)=(1,0)\begin{pmatrix}2b(t)-\eta & 0\\ -2 & -2b(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=2b(t)-\eta. \tag{10.3.7}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\theta)&=\int_{-\infty}^{\infty}(b(t)^2-1)^2\sin\omega(t+\theta)e^{-\int_0^t E_\ell(s)ds}dt\\&=\sqrt{J_c^2+J_s^2}\sin\left(\omega\theta+\arctan\left(J_s(J_c)^{-1}\right)\right),\end{aligned} \tag{10.3.8}$$

其中

$$J_c = \int_{-\infty}^{\infty} (b(t)^2 - 1)^2 e^{-\int_0^t (2b(s)-\eta)ds} \cos\omega t dt,$$

$$J_s = \int_{-\infty}^{\infty} (b(t)^2 - 1)^2 e^{-\int_0^t (2b(s)-\eta)ds} \sin\omega t dt. \tag{10.3.9}$$

对 $\mathcal{W}^*(\theta)$, 有

$$E_{\ell^*}(t) = \frac{((b_\eta^*)'(t), -(a_\eta^*)'(t))}{((a_\eta^*)'(t))^2 + ((b_\eta^*)'(t))^2} \begin{pmatrix} 2b_\eta^*(t) - \eta(1+2\gamma a_\eta^*(t)) & 2a_\eta^*(t) \\ -2 & -2b_\eta^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b_\eta^*)'(t) \\ -(a_\eta^*)'(t) \end{pmatrix} \tag{10.3.10}$$

以及

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^*(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b_\eta^*)'(t)((b_\eta^*)^2(t)-1)^2 \sin\omega(t+\theta)}{\sqrt{((a_\eta^*)'(t))^2 + ((b_\eta^*)'(t))^2}} e^{-\int_0^t E_{\ell^*}(s)ds} dt \\ &= \sqrt{(J_c^*)^2 + (J_s^*)^2} \sin(\omega\theta + \arctan(J_s^*(J_c^*)^{-1})),\end{aligned} \tag{10.3.11}$$

其中

$$J_c^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b_\eta^*)'(t)((b_\eta^*)^2(t)-1)^2}{\sqrt{((a_\eta^*)'(t))^2 + ((b_\eta^*)'(t))^2}} e^{-\int_0^t E_{\ell^*}(s)ds} \cos\omega t dt,$$

$$J_s^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b_\eta^*)'(t)((b_\eta^*)^2(t)-1)^2}{\sqrt{((a_\eta^*)'(t))^2 + ((b_\eta^*)'(t))^2}} e^{-\int_0^t E_{\ell^*}(s)ds} \sin\omega t dt.$$

引理 10.3.1 *存在充分小的* $\eta_0 > 0$, *使得对所有* η: $0 < \eta < \eta_0$ *有* $J_c^2 + J_s^2 \neq 0$, $(J_c^*)^2 + (J_s^*)^2 \neq 0$.

证 因为当 $\eta = 0$ 时,

$$J_c = \frac{\pi e^{-\frac{1}{2}\omega\pi}}{60(1-e^{-\omega\pi})}(\omega^5 + 20\omega^3 + 64\omega), \quad J_s = 0;$$

$$J_c^* = -\frac{\pi e^{-\frac{1}{2}\omega\pi}}{60(1-e^{-\omega\pi})}(\omega^5 + 20\omega^3 + 64\omega), \quad J_s^* = 0.$$

所以对充分小的 $\eta > 0$, 引理 10.3.1 成立.

下面验证定理 10.2.1~10.2.4 的正确性. 首先验证条件 (H1)~(H3).

(H1) 对 $\eta > 0$, 有 $\alpha + \beta = -\eta < 0$, $\alpha^* + \beta^* = -\eta < 0$. 当 η 为无理数时, α 与 β, α^* 与 β^* 均非有理相关.

(H2) 对 $P(x,y,t) = (1-y^2)^2 \sin\omega t$, $Q(x,y) = 0$, 条件 (H2) 自然成立.

(H3) 由 (10.3.8)、(10.3.11) 及引理 10.3.1 可知, 条件 (H3) 成立.

先固定频率 $\omega > 0$, 再取满足引理 10.3.1 的无理数 η 和 γ_η. 此时定理 10.2.1 和定理 10.2.2 的结论成立.

对 (10.3.8) 式的 $\mathcal{W}(\theta)$, 映射 $\mathcal{D}(\theta) = \theta - \frac{1}{\beta^*}\ln \mathcal{W}(\theta + C)$ 一定有非退化临界点. 所以定理 10.2.3 也成立.

要验证定理 10.2.4, 必须存在充分大的 $\tilde{h}$ 使得

$$\mathcal{D}_{\tilde{h}}(J) \subset I_-^*, \qquad \mathcal{D}_{\tilde{h}}^*(J^*) \subset I_-.$$

其中

$$J = \{\theta \in I_+ : |\mathcal{D}'(\theta)| \leqslant 1\}, \quad J^* = \{\theta \in I_+^* : |(\mathcal{D}^*)'(\theta)| \leqslant 1\}.$$

相应于 (10.3.8) 式和 (10.3.11) 式的 $\mathcal{W}(\theta)$, $\mathcal{W}^*(\theta)$, 有

$$|J|, |J^*| = \mathcal{O}(\omega^{-2}),$$

$$\mathcal{D}_h(\theta) = \frac{h}{\beta^*} + \mathcal{K} + \theta - \frac{1}{\beta^*}\ln\sqrt{J_c^2 + J_s^2}\sin\omega(\theta - \psi),$$

$$\mathcal{D}_h^*(\theta) = \frac{h}{\beta} + \mathcal{K}^* + \theta - \frac{1}{\beta}\ln\sqrt{(J_c^*)^2 + (J_s^*)^2}\sin\omega(\theta - \psi^*), \tag{10.3.12}$$

其中

$$\psi = -C - \omega^{-1}\arctan J_s J_c^{-1}, \quad \psi^* = -C^* - \omega^{-1}\arctan J_s^*(J_c^*)^{-1}.$$

相应于 (10.2.3) 的区间, 有

$$I_- = \left(\psi - \frac{\pi}{\omega}, \psi\right), \quad I_-^* = \left(\psi^* - \frac{\pi}{\omega}, \psi^*\right).$$

下证对充分大的频率 ω, 有

引理 10.3.2　*存在无穷多个 h, 使得*

$$\mathcal{D}_h(\pi(2\omega)^{-1} + \psi) \in I_-^*, \quad \mathcal{D}_h^*(\pi(2\omega)^{-1} + \psi^*) \in I_-. \tag{10.3.13}$$

证　记

$$I_1 = -\mathcal{K} - \frac{\pi}{2\omega} + \psi^* - \psi + \frac{1}{\beta^*}\ln\sqrt{J_c^2 + J_s^2} + \left(-\frac{\pi}{\omega}, 0\right),$$

$$I_2 = -\mathcal{K}^* - \frac{\pi}{2\omega} + \psi - \psi^* + \frac{1}{\beta}\ln\sqrt{(J_c^*)^2 + (J_s^*)^2} + \left(-\frac{\pi}{\omega}, 0\right).$$

因为当 $\eta = 0$ 时,

$$C = \frac{1}{4}\ln 20, \;\; C^* = \frac{1}{2}\ln 2, \;\; \mathcal{K} = \frac{1}{4}\ln 2000, \;\; \mathcal{K}^* = \frac{1}{4}\ln 80,$$

$$|J_c^*| = |J_c|, \quad J_s = J_s^* = 0, \quad \beta = \beta^*, \quad \psi = -C, \quad \psi^* = -C^*.$$

所以

$$-\mathcal{K} - \frac{\pi}{2\omega} + \psi^* - \psi + \frac{1}{\beta^*}\ln\sqrt{J_c^2 + J_s^2} = -\mathcal{K} - \frac{\pi}{2\omega} - C^* + C + \frac{\ln|J_c|}{2},$$

$$-\mathcal{K}^* - \frac{\pi}{2\omega} + \psi - \psi^* + \frac{1}{\beta}\ln\sqrt{(J_c^*)^2 + (J_s^*)^2} = -\mathcal{K}^* - \frac{\pi}{2\omega} - C + C^* + \frac{\ln|J_c^*|}{2}.$$

易知

$$-\mathcal{K} - C^* + C = -\mathcal{K}^* - C + C^* \mathrm{mod}(2\pi\omega^{-1}).$$

即当 $\eta = 0$ 时, 两区间 I_1, I_2 完全重合, 所以对充分小的 $\eta > 0$, 两区间 I_1, I_2 一定有重叠部分. 记这重叠区间为 $\tilde{I}$. 下证存在 $m_0, n_0 \in \mathbb{Z}$, 使得

$$\frac{h}{\beta^*} - \frac{2\pi}{\omega} n_0 \in \tilde{I} \subset I_1, \tag{10.3.14}$$

$$\frac{h}{\beta} - \frac{2\pi}{\omega} m_0 \in \tilde{I} \subset I_2. \tag{10.3.15}$$

根据连分数表示, 存在充分大的正整数 p_k, q_k, 使得

$$\frac{\beta}{\beta^*} = \frac{p_k}{q_k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{q_k^2}\right).$$

取 $\tilde{I}$ 的中点 θ_0, 令

$$h = \frac{2\pi}{\omega}\beta^* p_k + \beta^* \theta_0.$$

则一方面有

$$\frac{h}{\beta^*} - \frac{2\pi}{\omega} p_k = \theta_0 \in \tilde{I} \subset I_1.$$

同时有

$$\begin{aligned}\frac{h}{\beta} - \frac{2\pi}{\omega} q_k &= \frac{\beta^*}{\beta}\frac{2\pi}{\omega} p_k + \frac{\beta^*}{\beta}\theta_0 - \frac{2\pi}{\omega} q_k = \frac{2\pi}{\omega}\left(\frac{\beta^*}{\beta} p_k - q_k\right) + \frac{\beta^*}{\beta}\theta_0 \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{q_k}\right) + \frac{\beta^*}{\beta}\theta_0.\end{aligned}$$

因为 $\eta > 0$ 充分小, 所以 $\frac{\beta^*}{\beta} = \frac{2-\eta}{2} \approx 1$, 所以 $\frac{\beta^*}{\beta}\theta_0 \in \tilde{I}$. 即

$$\frac{h}{\beta} - \frac{2\pi}{\omega} q_k \in \tilde{I} \subset I_2.$$

取 $n_0 = p_k, m_0 = q_k$, 则式 (10.3.14), (10.3.15) 成立, 即

$$\frac{h}{\beta^*} - \frac{2\pi}{\omega} n_0 \in -\mathcal{K} - \frac{\pi}{2\omega} + \psi^* - \psi + \frac{1}{\beta^*} \ln \sqrt{J_c^2 + J_s^2} + \left(-\frac{\pi}{\omega}, 0\right),$$
$$\frac{h}{\beta} - \frac{2\pi}{\omega} m_0 \in -\mathcal{K}^* - \frac{\pi}{2\omega} + \psi - \psi^* + \frac{1}{\beta} \ln \sqrt{(J_c^*)^2 + (J_s^*)^2} + \left(-\frac{\pi}{\omega}, 0\right).$$

因此

$$\frac{h}{\beta^*} + \mathcal{K} + \frac{\pi}{2\omega} + \psi - \frac{1}{\beta^*} \ln \sqrt{J_c^2 + J_s^2} \mod \frac{2\pi}{\omega} \in \left(\psi^* - \frac{\pi}{\omega}, \psi^*\right), \tag{10.3.16}$$

$$\frac{h}{\beta} + \mathcal{K}^* + \frac{\pi}{2\omega} + \psi^* - \frac{1}{\beta} \ln \sqrt{(J_c^*)^2 + (J_s^*)^2} \mod \frac{2\pi}{\omega} \in \left(\psi - \frac{\pi}{\omega}, \psi\right). \tag{10.3.17}$$

对于充分大的 p_k, 对应无穷多 h, 使得 (10.3.16), (10.3.17) 同时成立, 故引理 10.3.2 成立.

10.3.2　数值结果

根据定理 10.2.1~10.2.4 的结论, 系统 (10.3.6) 关于参数 μ 出现三类动力学现象:

(i) 代表马蹄的过渡缠结 (transient tangle).

这时所有解都离开异宿环邻域, 表明异宿缠结不存在吸引域是 Lebesgue 正测度的物理测度.

(ii) 表现为周期汇的稳定动力学, 见图 10.3.1.

(iii) 表现为似 Hénon 吸引子的混沌, 见图 10.3.2.

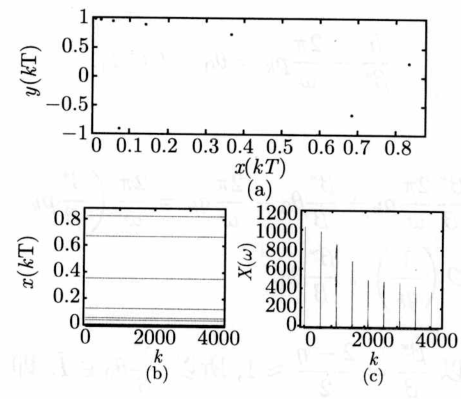


图 10.3.1　方程 (10.3.6) 在 $\eta = 1, \mu = 3.5 \times 10^{-6}, t_0 = 0.4$ 时的周期汇

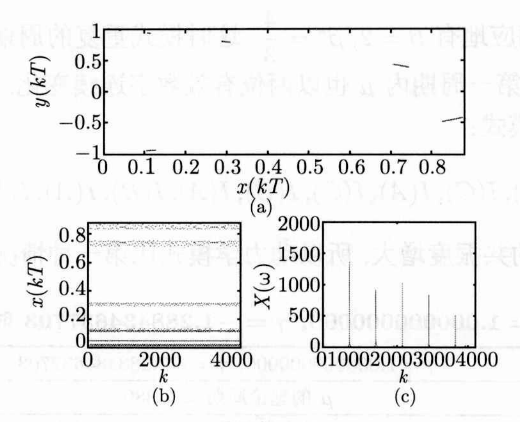


图 10.3.2 方程 (10.3.6) 在 $\eta=1,\mu=1.43\times10^{-3},t_0=0.2$ 时的似 Hénon 吸引子

而且这三类现象随着参数 $\mu\to0$ 以固定的模式出现.

首先固定初始相位 $(x_0,y_0)=(0.05,0.05)$, 然后对给定的 $\eta>0$, 确定 γ_η, 使得未扰动系统 (10.3.1) 存在异宿环. 再固定 η 和 γ_η, 变化参数 μ 和初始时间 $t_0\in[0,T)$ (T 为外力周期), 用四阶 Runge-Kutta 方法计算方程 (10.3.6) 解. 对给定的 μ, 每一个 t_0 对应一个解, 我们观察 1000 个解的情况.

10.3.3 拟周期性

两个不稳定特征值 β 与 β^* 决定了异宿缠结存在两种内在的周期性. 一方面, 三类现象在一个模式中重复出现; 另一方面, 这三类现象组成的模式重复出现. 如果 β 与 β^* 有理相关, 例如 $\dfrac{\beta}{\beta^*}=\dfrac{m}{n}$, 则三类现象重复出现并组成一定的模式, 且这个模式关于参数 μ 以周期 $e^{\beta nT}=e^{\beta^* mT}$ 重复出现. 如果 β 与 β^* 的共振度增大, 则模式重复出现的周期增大, 而且动力学模式变得更加复杂. 如果 β 与 β^* 非有理相关, 则动力学模式不再呈现周期性. 但根据连分数表示, 无理数可由有理数逼近, 所以该动力学模式也由周期模式逼近. 因此当 β 与 β^* 非有理相关时, 动力学模式呈现拟周期性. 下面分两种情况给出数值模拟结果.

(i) $\eta=1.000000000000,\gamma=-1.288434637703$.

此时, $\beta=2$, $\beta^*=1$. 模式重复的周期为 $e^2\approx7.389$. 数值结果见表 10.3.1. 表中给出了动力学现象变化的 μ 值. 第一周期内 μ 以两位有效数字连续变化, 得到了如下八种情况的动力学模式:

$$I(C),I(B),I(A),I(C),I(B),I(A),I(B),I(A),$$

其中 $I(C)$ 代表似 Hénon 吸引子, $I(B)$ 代表稳定的周期点, $I(A)$ 代表马蹄.

(ii) $\eta=0.666666666666,\gamma=-1.266580375163$.

当 $\eta=\dfrac{2}{3}$ 时, 相应地有 $\beta=2,\ \beta^*=\dfrac{4}{3}$. 这时模式重复的周期为 $e^4\approx 54.597$. 数值结果见表 10.3.2. 第一周期内 μ 也以两位有效数字连续变化. 得到了如下十三种情况组成的动力学模式:

$$I(A),I(B),I(A),I(C),I(A),I(C),I(B),I(A),I(B),I(A),I(B),I(A),I(B).$$

因为这时 β 与 β^* 的共振度增大, 所以动力学模式比第一种情况复杂.

表 10.3.1　$\eta=1.000000000000,\ \gamma=-1.288434637703$ 时的动力学模式

$\eta=1.000000000000,\ \gamma=-1.288434637703$		
μ 的理论周期 ≈ 7.389		
μ	动力学现象	实际比率
6.4×10^{-3}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	
6.3×10^{-3}	$I(B)$ 周期汇	
6.2×10^{-3}	$I(A)$ 过渡缠结	
3.9×10^{-3}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	
3.8×10^{-3}	$I(B)$ 周期汇	
3.7×10^{-3}	$I(A)$ 过渡缠结	
1.4×10^{-3}	$I(B)$ 周期汇	
1.3×10^{-3}	$I(A)$ 过渡缠结	
8.668×10^{-4}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	7.38
8.576×10^{-4}	$I(B)$ 周期汇	7.35
8.470×10^{-4}	$I(A)$ 过渡缠结	7.32
5.282×10^{-4}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	7.38
5.202×10^{-4}	$I(B)$ 周期汇	7.30
5.137×10^{-4}	$I(A)$ 过渡缠结	7.20
1.913×10^{-4}	$I(B)$ 周期汇	7.32
1.890×10^{-4}	$I(A)$ 过渡缠结	6.88
1.178×10^{-4}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	7.36
1.160×10^{-4}	$I(B)$ 周期汇	7.39
1.146×10^{-4}	$I(A)$ 过渡缠结	7.39
7.149×10^{-5}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	7.39
7.041×10^{-5}	$I(B)$ 周期汇	7.39
6.953×10^{-5}	$I(A)$ 过渡缠结	7.39
2.590×10^{-5}	$I(B)$ 周期汇	7.39
2.558×10^{-5}	$I(A)$ 过渡缠结	7.39
1.595×10^{-5}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	7.39
1.571×10^{-5}	$I(B)$ 周期汇	7.38
1.551×10^{-5}	$I(A)$ 过渡缠结	7.39
9.675×10^{-6}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	7.39
9.528×10^{-6}	$I(B)$ 周期汇	7.39
9.410×10^{-6}	$I(A)$ 过渡缠结	7.39
3.505×10^{-6}	$I(B)$ 周期汇	7.39
3.462×10^{-6}	$I(A)$ 过渡缠结	7.39

续表

$\eta = 1.000000000000$, $\gamma = -1.288434637703$		
μ 的理论周期 ≈ 7.389		
μ	动力学现象	实际比率
2.158×10^{-6}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	7.39
2.126×10^{-6}	$I(B)$ 周期汇	7.39
2.099×10^{-6}	$I(A)$ 过渡缠结	7.39
1.309×10^{-6}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	7.39
1.289×10^{-6}	$I(B)$ 周期汇	7.39
1.273×10^{-6}	$I(A)$ 过渡缠结	7.39
4.744×10^{-7}	$I(B)$ 周期汇	7.39
4.685×10^{-7}	$I(A)$ 过渡缠结	7.39

表 10.3.2 $\eta = 0.666666666666$, $\gamma = -1.266580375163$ 时的动力学模式

$\eta = 0.666666666666$, $\gamma = -1.266580375163$		
μ 的理论周期 ≈ 54.597		
μ	动力学现象	实际比率
5.8×10^{-3}	$I(A)$ 过渡缠结	
3.1×10^{-3}	$I(B)$ 周期汇	
2.9×10^{-3}	$I(A)$ 过渡缠结	
1.6×10^{-3}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	
1.0×10^{-3}	$I(A)$ 过渡缠结	
8.2×10^{-4}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	
8.1×10^{-4}	$I(B)$ 周期汇	
7.9×10^{-4}	$I(A)$ 过渡缠结	
4.2×10^{-4}	$I(B)$ 周期汇	
4.0×10^{-4}	$I(A)$ 过渡缠结	
2.1×10^{-4}	$I(B)$ 周期汇	
2.0×10^{-4}	$I(A)$ 过渡缠结	
1.1×10^{-4}	$I(B)$ 周期汇	
1.070×10^{-4}	$I(A)$ 过渡缠结	54.21
5.694×10^{-5}	$I(B)$ 周期汇	54.44
5.494×10^{-5}	$I(A)$ 过渡缠结	52.78
2.937×10^{-5}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	54.48
2.820×10^{-5}	$I(A)$ 过渡缠结	53.19
1.512×10^{-5}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	54.23
1.500×10^{-5}	$I(B)$ 周期汇	54.00
1.448×10^{-5}	$I(A)$ 过渡缠结	54.56
7.702×10^{-6}	$I(B)$ 周期汇	54.53
7.436×10^{-6}	$I(A)$ 过渡缠结	53.79
3.954×10^{-6}	$I(B)$ 周期汇	53.11
3.817×10^{-6}	$I(A)$ 过渡缠结	52.40
2.030×10^{-6}	$I(B)$ 周期汇	54.19

续表

$\eta=0.666666666666$, $\gamma=-1.266580375163$		
μ 的理论周期 ≈ 54.597		
μ	动力学现象	实际比率
1.960×10^{-6}	$I(A)$ 过渡缠结	54.59
1.042×10^{-6}	$I(B)$ 周期汇	54.64
1.006×10^{-6}	$I(A)$ 过渡缠结	54.61
5.380×10^{-7}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	54.59
5.166×10^{-7}	$I(A)$ 过渡缠结	54.59
2.769×10^{-7}	$I(C)$ 似 Hénon 吸引子	54.60
2.741×10^{-7}	$I(B)$ 周期汇	54.72
2.652×10^{-7}	$I(A)$ 过渡缠结	54.60
1.410×10^{-7}	$I(B)$ 周期汇	54.62
1.361×10^{-7}	$I(A)$ 过渡缠结	54.64
7.228×10^{-8}	$I(B)$ 周期汇	54.70
6.990×10^{-8}	$I(A)$ 过渡缠结	54.61
3.707×10^{-8}	$I(B)$ 周期汇	54.76

10.4　返回映射 $\mathcal{F}$ 的推导

本节推导定理 10.1.1 的映射 $\mathcal{R}$. 对定理 10.1.2 的映射 $\mathcal{R}^*$ 同理可得.

(i) Poincaré 截面.

要推导映射 $\mathcal{R}:\Sigma\to\Sigma^*$, 此处 Σ, Σ^* 为线性化坐标系下的截面. 首先在两个鞍点 $P=(q,p)$ 及 $P^*=(q^*,p^*)$ 的邻域 $B_\varepsilon(P)$, $B_{\varepsilon^*}(P^*)$ 内线性化方程 (10.1.7), 在 $B_{\varepsilon^*}(P^*)$ 内求出线性解. 然后在原坐标系下求出 (10.1.7) 的规范型, 从而得出从邻域 $B_\varepsilon(P)$ 到邻域 $B_{\varepsilon^*}(P^*)$ 的解. 最后通过坐标变换得到从截面 Σ 到 Σ^* 的映射

$$\mathcal{R}=\mathcal{N}^*\circ\mathcal{L}_\mu^*\circ\mathcal{M}\circ\mathcal{L}_\mu^{-1}.$$

令 J 为 P 点的 Jacobi 矩阵, J 的特征值为 $\alpha<0<\beta$, 相应的特征向量为 ξ_α, ξ_β.

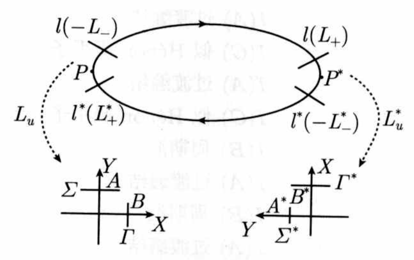


图 10.4.1　坐标变换及返回映射 $\mathcal{F}=\mathcal{R}^*\circ\mathcal{R}$

作坐标变换 $\mathcal{L}_\mu:(x,y)\to(X,Y)$ 为

$$\begin{pmatrix} x-q \\ y-p \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(X,Y) \\ G(X,Y) \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} \tilde{F}(X,Y,\theta) \\ \tilde{G}(X,Y,\theta) \end{pmatrix}, \tag{10.4.1}$$

其中 $M=(\xi_\alpha,\xi_\beta)$. 在坐标变换 $\mathcal{L}_\mu$ 下, 方程 (10.1.7) 在邻域 $B_\varepsilon(P)$ 内可以线性化为

$$\frac{dX}{dt}=\alpha X,\qquad \frac{dY}{dt}=\beta Y,\qquad \frac{d\theta}{dt}=1.$$

记 $\ell(-L_-)$ 在变换 $\mathcal{L}_0$ 下的像为 $(0,A)$. 根据 $-L_-$ 的规定, 有 $A\approx\dfrac{\varepsilon}{2}$. 在空间 (X,Y,θ) 中定义截面

$$\Sigma=\{(X,Y,\theta):|X|<\mu, Y=A,\theta\in S^1\}.$$

同理, $\ell^*(L_+^*)$ 在 $\mathcal{L}_0$ 下的像为 $(B,0)$, 且 $B\approx\dfrac{\varepsilon}{2}$. 定义截面 Γ 为

$$\Gamma=\{(X,Y,\theta):X=B,|Y|=K_1(\varepsilon)\mu,\theta\in S^1\}.$$

记 Σ,Γ 的原像为 Σ_μ,Γ_μ, 即

$$\Sigma_\mu=\mathcal{L}_\mu^{-1}\Sigma,\qquad \Gamma_\mu=\mathcal{L}_\mu^{-1}\Gamma.$$

在 P^* 的邻域 $B_{\varepsilon^*}(P^*)$ 内也线性化方程 (10.1.7). 作坐标变换 $\mathcal{L}_\mu^*:(x,y)\to(X,Y)$ 为

$$\begin{pmatrix} x-q^* \\ y-p^* \end{pmatrix} = M^*\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F^*(X,Y) \\ G^*(X,Y) \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} \tilde{F}^*(X,Y,\theta) \\ \tilde{G}^*(X,Y,\theta) \end{pmatrix}. \tag{10.4.2}$$

在变换 $\mathcal{L}_\mu^*$ 下, 方程 (10.1.7) 在邻域 $B_{\varepsilon^*}(P^*)$ 内可线性化为

$$\frac{dX}{dt}=\alpha^* X,\quad \frac{dY}{dt}=\beta^* Y,\quad \frac{d\theta}{dt}=1. \tag{10.4.3}$$

记 $\ell^*(-L_-^*)$, $\ell(L_+)$ 在 $\mathcal{L}_0^*$ 下的像分别为 $(0,A^*)$, $(B^*,0)$. 定义

$$\Sigma^*=\{(X,Y,\theta):\ |X|<\mu,\ Y=A^*,\ \theta\in S^1\},\qquad \Sigma_\mu^*=(\mathcal{L}_\mu^*)^{-1}\Sigma^*,$$

$$\Gamma^*=\{(X,Y,\theta):\ X=B^*,\ |Y|=K_1^*(\varepsilon)\mu,\ \theta\in S^1\},\qquad \Gamma_\mu^*=(\mathcal{L}_\mu^*)^{-1}\Gamma^*.$$

下求映射 $\mathcal{M}:\Sigma_\mu\to\Gamma_\mu^*$ 以及线性映射 $\mathcal{N}^*:\Gamma^*\to\Sigma^*$.

(ii) 线性映射 $\mathcal{N}^*$.

根据方程 (10.4.3), 对 $(Y,\theta)\in\Gamma^*$, $(X,\theta)\in\Sigma^*$ 有

$$X=X_0e^{\alpha^* t},\quad Y_1=Ye^{\beta^* t},\quad \theta=t+\theta_0.$$

因为 $X_0 = \dfrac{\varepsilon^*}{2}, Y_1 = \dfrac{\varepsilon^*}{2}$, 得到

$$X = \left(\frac{\varepsilon^*}{2}\right)^{1+\frac{\alpha^*}{\beta^*}} Y^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}}, \quad \theta = \theta_0 + \frac{1}{\beta^*}\ln\frac{\varepsilon^*}{2Y}.$$

令

$$\mathbb{X} = \mu^{-1}X, \qquad \mathbb{Y} = \mu^{-1}Y. \tag{10.4.4}$$

则对 $(\hat{\mathbb{X}}, \hat{\theta}) = \mathcal{N}^*(\mathbb{Y}, \theta)$, 有

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \theta + \frac{1}{\beta^*}\ln(\varepsilon^*\mu^{-1}) - \frac{1}{\beta^*}\ln\mathbb{Y};\\ \hat{\mathbb{X}} &= (\mu(\varepsilon^*)^{-1})^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\mathbb{Y}^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}}.\end{aligned} \tag{10.4.5}$$

(iii) 异宿轨道邻域中的规范型.

定义异宿轨道 ℓ 的邻域为 $\mathcal{D}$, 这里

$$\mathcal{D} = D \times S^1, \quad D = \{(x, y) : \ |(x, y) - \ell(t)| < K_1(\varepsilon)\mu, \ \ t \in (-2L_-, 2L_+)\}.$$

把异宿轨道 ℓ 看作以 s 为参数的曲线. 在 D 上令

$$(x, y) = \ell(s) + \tau_\ell^\perp(s)z. \tag{10.4.6}$$

等式 (10.4.6) 关于时间 t 求导得

$$\left(\frac{d\ell(s)}{ds} + z\frac{d\tau_\ell^\perp(s)}{ds}\right)\frac{ds}{dt} + \tau_\ell^\perp(s)\frac{dz}{dt} = (F(s, z, \theta, \mu), G(s, z, \theta, \mu)), \tag{10.4.7}$$

其中

$$\begin{aligned}F(s, z, \theta, \mu) &= f(\ell(s) + \tau_\ell^\perp(s)z) + \mu P(\ell(s) + \tau_\ell^\perp(s)z, \theta),\\ G(s, z, \theta, \mu) &= g(\ell(s) + \tau_\ell^\perp(s)z) + \mu Q(\ell(s) + \tau_\ell^\perp(s)z, \theta).\end{aligned} \tag{10.4.8}$$

(10.4.7) 分别左乘 $\tau_\ell(s), \tau_\ell^\perp(s)$ 得

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \frac{\tau_\ell(s)\cdot(F(s, z, \theta, \mu), G(s, z, \theta, \mu))}{\tau_\ell(s)\cdot\left(\dfrac{d\ell(s)}{ds} + z\dfrac{d\tau_\ell^\perp(s)}{ds}\right)},\\ \frac{dz}{dt} &= \tau_\ell^\perp(s)\cdot(F(s, z, \theta, \mu), G(s, z, \theta, \mu)).\end{aligned} \tag{10.4.9}$$

F, G 在 $z = 0$ 处 Taylor 展开, 并写成向量形式

$$\begin{aligned}(F, G) = &(f(\ell), g(\ell)) + \mu(P(\ell, \theta), Q(\ell, \theta)) + \begin{pmatrix} f_x(\ell) & f_y(\ell)\\ g_x(\ell) & g_y(\ell)\end{pmatrix}\tilde{\tau}_\ell^\perp(s)z\\ &+\mu\begin{pmatrix} P_x(\ell, \theta) & P_y(\ell, \theta)\\ Q_x(\ell, \theta) & Q_y(\ell, \theta)\end{pmatrix}\tilde{\tau}_\ell^\perp(s)z + O(z^2).\end{aligned} \tag{10.4.10}$$

令

$$Z = \mu^{-1} z, \tag{10.4.11}$$

并由 $(f(\ell), g(\ell)) = \frac{d\ell}{ds}$, $\tau_\ell^\perp \cdot \frac{d\ell}{ds} = 0$ 得

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= 1 + \mathcal{O}_{s,Z,\theta,h}(\mu), \\ \frac{dZ}{dt} &= E_\ell(s)Z + \tau_\ell^\perp(s) \cdot (P(\ell(s), \theta),\ Q(\ell(s), \theta)) + \mathcal{O}_{s,Z,\theta,h}(\mu). \end{aligned} \tag{10.4.12}$$

式 (10.4.12) 的定义域为

$$\mathcal{D} = \{(Z, s, \theta) : |Z| < K_1(\varepsilon), s \in (-2L_-, 2L_+), \theta \in S^1\}.$$

从 $-L_-$ 到 s 积分 (10.4.12) 第一式得到

$$t = t_0 + s + L_- + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu).$$

代入 (10.4.12) 第二式, 并运用常数变易公式积分

$$\frac{dZ}{ds} = E_\ell(s)Z + \tau_\ell^\perp(s) \cdot (P(\ell, t_0 + s + L_-),\ Q(\ell, t_0 + s + L_-)) + \mathcal{O}_{s,Z,\theta,h}(\mu),$$

得

$$Z = M_+ \mathcal{W}_L(\theta + L_-) + M_+ M_- Z_0 + \mathcal{O}_{Z_0,\theta,h}(\mu), \tag{10.4.13}$$

其中

$$\mathcal{W}_L(\theta) = \int_{-L_-}^{L_+} [(P(\ell(t), t + \theta), Q(\ell(t), t + \theta)) \cdot \tau_\ell^\perp(t)] e^{-\int_0^t E_\ell(s) ds} dt. \tag{10.4.14}$$

所以映射 $\mathcal{M} : \Sigma_\mu \to \Gamma_\mu^*$ 为: 对 $(Z, \theta) \in \Sigma_\mu$, 令 $(\tilde{Z}, \tilde{\theta}) = \mathcal{M}(Z, \theta)$. 则

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= M_+ \mathcal{W}_L(\theta + L_-) + M_+ M_- Z + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu), \\ \tilde{\theta} &= \theta + L_+ + L_- + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu). \end{aligned} \tag{10.4.15}$$

(iv) 坐标变换.

为了得到映射 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}^*$, 需要考虑四个截面 Σ, Γ, Σ^*, Γ^* 上的坐标变换. 首先求 Σ 上的坐标变换.

Σ 上的点用 $(\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \theta)$ 表示, 这里 $\mathbb{Y} = \frac{\varepsilon}{2}\mu^{-1}$. Σ_μ 上的点用 $(Z(s), \theta(s))$ 表示, 其中 s 为异宿轨道 ℓ 变化的时间.

引理 10.4.1 对于 $(Z(s), \theta(s)) \in \Sigma_\mu$, 有 $s = -L_- + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu)$.

证　由坐标变换 (10.4.1) 和式 (10.4.6) 得到

$$\ell(s)+\tau_\ell^{\perp}(s)z-P=M\begin{pmatrix}X\\A\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F(X,A)\\G(X,A)\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}\tilde{F}(X,A,\theta)\\\tilde{G}(X,A,\theta)\end{pmatrix}.$$

在异宿轨道与截面的交点有 (此时 $\mu=0$)

$$\ell(-L_-)-P=M\begin{pmatrix}0\\A\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F(0,A)\\G(0,A)\end{pmatrix}.$$

两式相减得

$$\ell(s)-\ell(-L_-)+\tau_\ell^{\perp}(s)z=M\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F(X,A)-F(0,A)\\G(X,A)-G(0,A)\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}\tilde{F}(X,A,\theta)\\\tilde{G}(X,A,\theta)\end{pmatrix}. \tag{10.4.16}$$

令

$$\begin{pmatrix}W_1\\W_2\end{pmatrix}=M^{-1}(\ell(s)-\ell(-L_-)+\tau_\ell^{\perp}(s)z)-\mu M^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{F}(0,A,\theta)\\\tilde{G}(0,A,\theta)\end{pmatrix}. \tag{10.4.17}$$

则由式 (10.4.16) 得到

$$\begin{pmatrix}W_1\\W_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix}+M^{-1}\begin{pmatrix}F(X,A)-F(0,A)\\G(X,A)-G(0,A)\end{pmatrix}+\mu M^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{F}(X,A,\theta)-\tilde{F}(0,A,\theta)\\\tilde{G}(X,A,\theta)-\tilde{G}(0,A,\theta)\end{pmatrix}.$$

因为 $F,G,\tilde{F},\tilde{G}$ 至少含 (X,Y) 的二次及以上项, 由 Taylor 展开得

$$F(X,A)-F(0,A)=\mathcal{O}(\varepsilon)X+\mathcal{O}_{X,\theta}(1)X^2,$$

$$\tilde{F}(X,A,\theta)-\tilde{F}(0,A,\theta)=\mathcal{O}_\theta(\varepsilon)X+\mathcal{O}_{X,\theta}(1)X^2.$$

所以 W_1,W_2 为

$$\begin{aligned}W_1&=[1+\mathcal{O}(\varepsilon)+\mu\mathcal{O}_\theta(\varepsilon)]X+[\mathcal{O}_{X,\theta}(1)+\mathcal{O}_{X,\theta,h}(\mu)]X^2,\\W_2&=[\mathcal{O}(\varepsilon)+\mu\mathcal{O}_\theta(\varepsilon)]X+[\mathcal{O}_{X,\theta}(1)+\mathcal{O}_{X,\theta,h}(\mu)]X^2.\end{aligned} \tag{10.4.18}$$

由 (10.4.18) 的第一式解得

$$X=[1+\mathcal{O}(\varepsilon)+\mu\mathcal{O}_\theta(\varepsilon)]W_1+[\mathcal{O}_{W_1,\theta}(1)+\mathcal{O}_{W_1,\theta,h}(\mu)]W_1^2, \tag{10.4.19}$$

代入 (10.4.18) 的第二式得

$$W_2 = [\mathcal{O}(\varepsilon) + \mu\mathcal{O}_\theta(\varepsilon)]W_1 + [\mathcal{O}_{W_1,\theta}(1) + \mathcal{O}_{W_1,\theta,h}(\mu)]W_1^2. \tag{10.4.20}$$

下面从 W_1, W_2 的精确表达式 (10.4.17) 求出 s 与 $-L_-$ 的关系, 得到 W_1 的表达式, 再代入 (10.4.19), 得到 X 与 Z 的关系, 即为坐标变换.

因为 $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} \xi_\beta^\perp \\ -\xi_\alpha^\perp \end{pmatrix}$, 所以

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{\det(M)}\xi_\beta^\perp \cdot \left(\ell(s) - \ell(-L_-) + \tau_\ell^\perp(s)z - \mu\begin{pmatrix} \tilde{F}(0,A,\theta) \\ \tilde{G}(0,A,\theta) \end{pmatrix}\right), \\ W_2 &= \frac{-1}{\det(M)}\xi_\alpha^\perp \cdot \left(\ell(s) - \ell(-L_-) + \tau_\ell^\perp(s)z - \mu\begin{pmatrix} \tilde{F}(0,A,\theta) \\ \tilde{G}(0,A,\theta) \end{pmatrix}\right). \end{aligned} \tag{10.4.21}$$

令 $\eta = s + L_-$, 并作 Taylor 展开,

$$\ell(s) - \ell(-L_-) = |\ell'(-L_-)|\tau_\ell(-L_-)\eta + \mathcal{O}_\eta(1)\eta^2,$$

$$\tau_\ell^\perp(s)z - \mu\begin{pmatrix} \tilde{F}(0,A,\theta) \\ \tilde{G}(0,A,\theta) \end{pmatrix} = \mu[\tau_\ell^\perp(-L_-) + (\tau_\ell^\perp)'(-L_-)\eta + \mathcal{O}_\eta(1)\eta^2]Z + \mu\mathcal{O}_\theta(1).$$

整理 η, μ 的一次项得

$$\begin{aligned} W_1 =& \frac{1}{\det(M)}\xi_\beta^\perp \cdot [|\ell'(-L_-)|\tau_\ell(-L_-)\eta + \mu(\tau_\ell^\perp(-L_-)Z + \mathcal{O}_\theta(1)) + \mathcal{O}_\eta(1)\eta^2 \\ &+ \mathcal{O}_{\eta,Z,\theta,h}(\mu^2)], \\ W_2 =& \frac{-1}{\det(M)}\xi_\alpha^\perp \cdot [|\ell'(-L_-)|\tau_\ell(-L_-)\eta + \mu(\tau_\ell^\perp(-L_-)Z + \mathcal{O}_\theta(1)) + \mathcal{O}_\eta(1)\eta^2 \\ &+ \mathcal{O}_{\eta,Z,\theta,h}(\mu^2)]. \end{aligned}$$

代入 (10.4.20) 式得

$$\begin{aligned} &(\xi_\alpha^\perp + \mathcal{O}(\varepsilon)\xi_\beta^\perp) \cdot \tau_\ell(-L_-)|\ell'(-L_-)|\eta + \mu[(\xi_\alpha^\perp + \mathcal{O}(\varepsilon)\xi_\beta^\perp) \cdot \tau_\ell^\perp(-L_-)Z + \mathcal{O}_\theta(1)] \\ =&\mathcal{O}_{\eta,Z,\theta,h}(\mu^2). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \eta =& -\mu\frac{[\xi_\alpha^\perp \cdot \tau_\ell^\perp(-L_-) + \mathcal{O}(\varepsilon)\xi_\beta^\perp \cdot \tau_\ell^\perp(-L_-)]Z + \mathcal{O}_\theta(1)}{|\ell'(-L_-)|[\xi_\alpha^\perp \cdot \tau_\ell(-L_-) + \mathcal{O}(\varepsilon)\xi_\beta^\perp \cdot \tau_\ell(-L_-)]} + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu^2) \\ &\triangleq \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu). \end{aligned}$$

引理 10.4.2　对 $(s, Z, \theta) \in \Sigma_\mu$,

$$s + L_- = -\mu \frac{[\xi_\alpha^\perp \cdot \tau_\ell^\perp(-L_-) + \mathcal{O}(\varepsilon)\xi_\beta^\perp \cdot \tau_\ell^\perp(-L_-)]Z + \mathcal{O}_\theta(1)}{|\ell'(-L_-)|[\xi_\alpha^\perp \cdot \tau_\ell(-L_-) + \mathcal{O}(\varepsilon)\xi_\beta^\perp \cdot \tau_\ell(-L_-)]} + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu^2).$$

证明同引理 10.4.1 类似.

引理 10.4.3　对 $(\mathbb{X}, \theta) \in \Sigma$, 令 $(Z(s), \theta(s)) = \mathcal{L}_\mu^{-1}(\mathbb{X}, \theta)$. 则有

$$\mathbb{X} = \frac{1 + \mathcal{O}(\varepsilon)}{\xi_\alpha \cdot \xi_\beta^\perp} Z + \mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu).$$

证　由 (10.4.21) 式知道

$$\begin{aligned}
W_1 &= \frac{1}{\det(M)} \xi_\beta^\perp \cdot \left(\ell'(-L_-)(s + L_-) + \mu\tau_\ell^\perp(-L_-)Z + \mu\mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu^2)\right) \\
&= \frac{\mu}{\det(M)} \xi_\beta^\perp \cdot \left(\tau_\ell(-L_-) \frac{-(\xi_\alpha^\perp \cdot \tau_\ell^\perp(-L_-) + \mathcal{O}(\varepsilon)\xi_\beta^\perp \cdot \tau_\ell^\perp(-L_-))Z}{\xi_\alpha^\perp \cdot \tau_\ell(-L_-) + \mathcal{O}(\varepsilon)\xi_\beta^\perp \cdot \tau_\ell(-L_-)} + \tau_\ell^\perp(-L_-)Z\right) \\
&\quad + \mu\mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{Z.\theta,h}(\mu^2) \\
&= \mu \frac{\xi_\beta^\perp \cdot \tau_\ell^\perp(-L_-)}{\det(M)} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))Z + \mu\mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{Z.\theta,h}(\mu^2).
\end{aligned}$$

因为 $\tau_\ell^\perp(-L_-) \approx \xi_\beta^\perp$, 代入 (10.4.19) 得

$$\mathbb{X} = \frac{1}{\det(M)} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))Z + \mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu).$$

同理可得到截面 Σ^*, Γ, Γ^* 上的坐标变换.

命题 10.4.1　(a) 对 $(\mathbb{Y}, \theta) \in \Gamma$, 令 $(Z(s), \theta(s)) = \mathcal{L}_\mu^{-1}(\mathbb{Y}, \theta)$. 则有 $s = L_+^* + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu)$ 且

$$\mathbb{Y} = \frac{1 + \mathcal{O}(\varepsilon)}{\xi_\alpha \cdot \xi_\beta^\perp} Z + \mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu).$$

(b) 对 $(\mathbb{X}, \theta) \in \Sigma^*$, 令 $(Z(s), \theta(s)) = (\mathcal{L}_\mu^*)^{-1}(\mathbb{X}, \theta)$. 则有 $s = -L_-^* + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu)$ 且

$$\mathbb{X} = \frac{1 + \mathcal{O}(\varepsilon^*)}{\xi_{\alpha^*} \cdot \xi_{\beta^*}^\perp} Z + \mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu).$$

(c) 对 $(\mathbb{Y}, \theta) \in \Gamma^*$, 令 $(s, Z, \theta) = (\mathcal{L}_\mu^*)^{-1}(\mathbb{Y}, \theta)$. 则有 $s = L_+ + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu)$ 且

$$\mathbb{Y} = \frac{1 + \mathcal{O}(\varepsilon^*)}{\xi_{\alpha^*} \cdot \xi_{\beta^*}^\perp} Z + \mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu).$$

最后复合映射 $\mathcal{R} = \mathcal{N}^* \circ \mathcal{L}_\mu^* \circ \mathcal{M} \circ \mathcal{L}_\mu^{-1}$.

首先,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{X}} =& (\mu(\varepsilon^*)^{-1})^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\left[\frac{1+\mathcal{O}(\varepsilon^*)}{\xi_{\alpha^*}\cdot\xi_{\beta^*}^{\perp}}Z + \mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu)\right]^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}} \\
=& (\mu(\varepsilon^*)^{-1})^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\left[\frac{1+\mathcal{O}(\varepsilon^*)}{\xi_{\alpha^*}\cdot\xi_{\beta^*}^{\perp}}(M_+\mathcal{W}_L(\theta+L_-) + M_+M_-Z + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu)) + \mathcal{O}_\theta(1)\right. \\
&\left. +\mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu)\right]^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}} \\
=& (\mu(\varepsilon^*)^{-1})^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\left[\frac{1+\mathcal{O}(\varepsilon^*)}{\xi_{\alpha^*}\cdot\xi_{\beta^*}^{\perp}}M_+\right]^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}}[\mathcal{W}_L(\theta+L_-) + M_-Z + (M_+)^{-1}\mathcal{O}_\theta(1) \\
& +\mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu)]^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}} \\
=& (\mu(\varepsilon^*)^{-1})^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\left[\frac{1+\mathcal{O}(\varepsilon^*)}{\xi_{\alpha^*}\cdot\xi_{\beta^*}^{\perp}}M_+\right]^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}}[\mathcal{W}_L(\theta+L_-) + M_-(\xi_\alpha\cdot\xi_\beta^{\perp}(1+\mathcal{O}(\varepsilon))\mathbb{X} \\
& +\mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{\mathbb{X},\theta,h}(\mu)) + (M_+)^{-1}\mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu)]^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}} \\
=& (\mu(\varepsilon^*)^{-1})^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\left[\frac{1+\mathcal{O}(\varepsilon^*)}{\xi_{\alpha^*}\cdot\xi_{\beta^*}^{\perp}}M_+\right]^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}}[\mathbb{F}(\theta,\mathbb{X},\mu)]^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}} \\
\triangleq& \boldsymbol{b}[\mathbb{F}(\theta,\mathbb{X},\mu)]^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\mathbb{F}(\theta,\mathbb{X},\mu) = \mathcal{W}(\theta+L_-) + M_-(1+\mathcal{O}(\varepsilon))(\xi_\alpha\cdot\xi_\beta^{\perp})\mathbb{X} + \mathbb{E}(\theta) + \mathcal{O}_{\mathbb{X},\theta,h}(\mu), \\
&\mathbb{E}(\theta) = ((M_+)^{-1} + M_-)\mathcal{O}_\theta(1) + \mathcal{W}_L(\theta+L_-) - \mathcal{W}(\theta+L_-), \\
&\boldsymbol{b} = (\mu(\varepsilon^*)^{-1})^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}-1}\left[\frac{1+\mathcal{O}(\varepsilon^*)}{\xi_{\alpha^*}\cdot\xi_{\beta^*}^{\perp}}M_+\right]^{-\frac{\alpha^*}{\beta^*}}.
\end{aligned}$$

其次,

$$\begin{aligned}
\hat{\theta} =& \theta + (L_+ + L_-) + \frac{1}{\beta^*}\ln(\varepsilon^*\mu^{-1}) - \frac{1}{\beta^*}\ln\mathbb{Y} + \mathcal{O}_{Z,\theta,h}(\mu) \\
=& \theta + (L_+ + L_-) + \frac{1}{\beta^*}\ln(\varepsilon^*\mu^{-1}) - \frac{1}{\beta^*}\ln\frac{(1+\mathcal{O}(\varepsilon^*))M_+}{\xi_{\alpha^*}\cdot\xi_{\beta^*}^{\perp}} \\
& - \frac{1}{\beta^*}\ln\mathbb{F}(\theta,\mathbb{X},\mu) + \mathcal{O}_{\mathbb{X},\theta,h}(\mu) \\
=& \theta + \boldsymbol{a} - \frac{1}{\beta^*}\ln\mathbb{F}(\theta,\mathbb{X},\mu) + \mathcal{O}_{\theta,\mathbb{X},h}(\mu),
\end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{a}=\frac{1}{\beta^*}\left(\ln\mu^{-1}+\ln\frac{\varepsilon^*}{(1+\mathcal{O}(\varepsilon^*))M_+}+\ln(\xi_{\alpha^*}\cdot\xi_{\beta^*}^{\perp})\right)+(L_-+L_+).$$

同理可推得定理 10.1.2 的映射 $\mathcal{R}^*$.

附录　$E_\ell(t), E_{\ell^*}(t)$ 的极限

验证极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}E_\ell(t)=\beta^*$, $\lim\limits_{t\to-\infty}E_\ell(t)=\alpha$, $\lim\limits_{t\to+\infty}E_{\ell^*}(t)=\beta$, $\lim\limits_{t\to-\infty}E_{\ell^*}(t)=\alpha^*$.

记 P^* 点的特征向量组成的矩阵和逆矩阵为

$$M=(\,\xi_{\alpha^*},\quad\xi_{\beta^*}\,),\qquad M^{-1}=\frac{1}{\det M}\begin{pmatrix}\xi_{\beta^*}^{\perp}\\-\xi_{\alpha^*}^{\perp}\end{pmatrix}.$$

记

$$A(t)=M^{-1}\begin{pmatrix}\partial_x f(\ell(t)) & \partial_y f(\ell(t))\\ \partial_x g(\ell(t)) & \partial_y g(\ell(t))\end{pmatrix}M,$$

则

$$\lim_{t\to+\infty}A(t)=M^{-1}\begin{pmatrix}\partial_x f(P^*) & \partial_y f(P^*)\\ \partial_x g(P^*) & \partial_y g(P^*)\end{pmatrix}M=\begin{pmatrix}\alpha^* & 0\\ 0 & \beta^*\end{pmatrix},$$

$$\lim_{t\to+\infty}\tau_\ell^{\perp}(t)\cdot M=-\xi_{\alpha^*}^{\perp}\cdot(\,\xi_{\alpha^*},\quad\xi_{\beta^*}\,)=-\,(\,0,\quad\xi_{\alpha^*}^{\perp}\cdot\xi_{\beta^*}\,),$$

$$\lim_{t\to+\infty}M^{-1}\tilde{\tau}_\ell^{\perp}(t)=\frac{1}{\det M}\begin{pmatrix}\xi_{\beta^*}^{\perp}\\-\xi_{\alpha^*}^{\perp}\end{pmatrix}(-\tilde{\xi}_{\alpha^*}^{\perp})=\frac{\begin{pmatrix}*\\1\end{pmatrix}}{\det M}.$$

由 $\det M=-\xi_{\alpha^*}^{\perp}\cdot\xi_{\beta^*}$, 得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}E_\ell(t)&=\lim_{t\to+\infty}\tau_\ell^{\perp}(t)\cdot M\cdot M^{-1}\begin{pmatrix}\partial_x f(\ell(t)) & \partial_y f(\ell(t))\\ \partial_x g(\ell(t)) & \partial_y g(\ell(t))\end{pmatrix}M\cdot M^{-1}\cdot\tilde{\tau}_\ell^{\perp}(t)\\&=-\frac{1}{\det M}(\,0,\quad\xi_{\alpha^*}^{\perp}\cdot\xi_{\beta^*}\,)\begin{pmatrix}\alpha^* & 0\\ 0 & \beta^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}*\\1\end{pmatrix}=\beta^*.\end{aligned}$$

同理可得其他三式.

参考文献

陈翔炎. 1963. 含参数微分方程的周期解与极限环, 数学学报, **13**(4): 607–619.

李炳熙. 1984. 高维动力系统的周期轨道, 理论和应用. 上海科学技术出版社.

李继彬, 陈兰荪. 1986. 周期时间制约捕食者食饵系统的周期解分枝及浑沌现象. 生物数学学报, **1**(2): 88–95.

李继彬, 刘曾荣. 1985. 一类二次系统周期扰动的浑沌性质. 科学通报, **7**: 491–495.

李继彬, 区月华. 1988. 扰动双中心二次系统的全局分枝与浑沌性. 应用数学学报, **11**(3): 312–313.

李继彬, 赵晓华, 刘正荣. 2007. 广义 Hamilton 系统理论及其应用 (第二版). 科学出版社.

李继彬等. 1984. 三次非线性振子的次谐波分岔与浑沌性质. 桂林全国非线性系统中的不稳定性与随机性会议交流资料, 10.

刘曾荣, 李德明. 1986. 关于有限次次偕分叉出现马蹄的讨论. 力学学报, **8**(6): 540–552.

刘曾荣, 李继彬, 林常. 1986. 催化反应中的浑沌现象. 应用数学与力学, **7**(1): 43–49.

刘曾荣, 李继彬. 1986. 二自由度 Hmilton 系统的浑沌性质. 应用数学学报, **9**(2): 210–214.

刘曾荣, 罗诗裕, 李继彬. 1985. 具有时间周期扰动的动力系统在共振区域内的 chaos 现象. 工程数学学报, **2**(2): 143–147.

刘曾荣, 姚伟国, 朱照宣. 1986. 软弹簧系统在弱周期扰动下进入浑沌的途径. 应用数学与力学, **7**(2); 103–108.

钱敏, 潘涛, 刘曾荣. 1987. Josephson 结的 I-V 曲线的理论分析. 物理学报, **36**(2): 149–156.

孙国璋, 刘曾荣. 1986a. 软弹簧 Duffing 系统的浑沌态. 科学通报, **23**: 1784–1788.

徐振源, 刘曾荣. 1986b. 两类肌型血管模型的浑沌现象. 生物数学学报, **1**(2): 109–115.

严寅, 钱敏. 1985. 横截环及其对 Henon 映像的应用. 科学通报, **30**(13): 961–965.

叶向东, 黄文, 邵松. 2008. 拓扑动力系统概论. 科学出版社.

叶彦谦等. 1983. 极限环论. 上海科学技术出版社.

张锦炎. 1984. 关于 Henon 映像中的 Smale 马蹄. 科学通报, **24**: 1478–1480.

张景中, 熊金城. 1993. 函数迭代与一维动力系统. 四川教育出版社.

张景中, 杨路. 1981. Smale 马蹄的一个简单模型. 科学通报, **26**(12): 713–714.

张芷芬, 丁同仁等. 1985. 微分方程定性理论. 科学出版社.

张筑生. 1999. 微分动力系统原理. 科学出版社.

周建莹. 1984. Taylor 映射中的紊动性质. 中国科学 (A 辑), **8**: 685–697.

周作领. 2001. 符号动力系统. 科学出版社.

朱照宣. 1984. 非线性动力学中的混沌. 力学进展, **14**(2): 129–146.

Afraimovich V S & Shil'nikov L P. 1977. The ring principle in problems of interaction

between two self-oscillating systems. PMM, **41**(4): 618–627.

Alekseev V M, Yakobson M V. 1981. Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic Systems. Physics Reports, **75**(5): 287–325.

Alexander J C & Jones C K R T. 1993. Existence and stability of asymptotically oscillatory triple pulses. Z. Angew. Math. Phys., **44**: 189–200.

Alexander J C & Jones C K R T. 1994. Existence and stability of asymptotically oscillatory double pulses. J. Reine. Angew. Math., **446**: 49–79.

Andronov A A, Leontovich E A, Gordon I I & Maĭer A G. 1971. Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane. Israel Program for Scientific Translations, Halsted, Jerusalem, London.

Arnold V I. 1964. Instability of dynamical systems with many degrees of freedom. Sov. Math. Dokl., **5**: 581–585.

Arnold V I. 1989. Mathematical Method of Classical Mechanics, 2nd ed.. New York: Springer-Verlag.

Aronson D G, Chory M A, Hall G R & McGehee R P. 1982. Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of map of the plane: a computer-assisted study. Commun. Math. Phys., **83**: 303–354.

Banks J, Brooks J, Cairns G & Stacey P. 1992. On Devaney's definition of Chaos. Amer. Math. Monthly, **99**: 332–334.

Bates P W, Kening L & Chongchun Z. 1998. Existence and persistence of invariant manifolds for semiflows in Banach space. Mem. Amer. Math. Soc., **135**: (645).

Bates P W, Kening L & Chongchun Z. 2000. Invariant foliations near normally hyperbolic invariant manifolds for semiflows. Thans. Amer. Math. Soc., **252**(10): 4641–4676.

Battelli F & Feckan M. 2002 Chaos arising near a topologically transversal homoclinic set, Topological Methods in Nonlinear Aanlysis, **20**: 195–215.

Battelli F & Feckan M. 2002. Some remarks on Melnokov function. Electronic J. Diff. Eqns., **13**: 1–29.

Battelli F & Lazzari C. 1990. Exponential dichotomies, heteroclinic orbits, and Mel′nikov functions. J. Diff. Eqns., **86**: 342–366.

Belitskii G R. 1973. Functional equations and conjugacy of diffeomorphisms of finite smoothness class. Funct. Anal. Appl., **7**: 268–277.

Benedicks M & Viana M. 2001. Solution of the basin problem for Hénon attractors. Invent.Math., **143**: 375–434.

Benedicks M & Carleson L. 1985. On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1,1)$. Ann.Math., **122**: 1–25.

Benedicks M & Carleson L. 1991. The dynamics of the Hénon map, Ann.Math., **133**: 73–169.

Benedicks M & Young L S. 1993. Sinai-Bowen-Ruelle measures for certain Hénon maps.

Invent.Math., **112**: 541–576.

Benedicks M & Young L S. 1999. Markov extensions and decay of correlations for certain Hénon maps, Asterisque.

Bowen R. 1971. Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms. Tans. Amer. Math. Soc., 377–397.

Brieskorn E & Knörrer H. 1986. Plane Algebraic Curves, Birkhäuser, Basel.

Byrd P F & Friedman M D. 1954. Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists. Berlin: Springer-Verlag.

Byrd P Fand Friedman M D. 1971. Handbook of Elliptic Integrals Engineers and Scientists. Springer-Verlag.

Camassa R & Tin S K. 1994. The global geometry of the slow manifold in the Lorenz-Krishnamurthy model. J. Atmos. Sci., **53**: 3251–3264.

Camassa R. 1995. On the geometry of an atmospheric slow manifold. Physica D., **84**: 357–397.

Cartwright M L & Littlewood J E. 1945. On nonlinear differential equations of the second order:I. The equation $\ddot{y} - k(1-y^2)\dot{y} + y = b\lambda k\cos(\lambda t + \alpha)$, k large. J. London Math. Soc., **20**: 180–189.

Cartwright M L. 1950. Forced oscillations in nonlinear systems. Contrib. to Theory of Nonlinear Oscillations. Princeton University Press (Study 20), 149–241.

Casasayas J, Fontich E & Nunes A. 1992. Invariant manifolds for a class of parabolic points. Nonlinearity, **5**: 1193–1210.

Casasayas J, Fontich E & Nunes A. 1993. Transversal homoclinic orbits for a class of Hamiltonians in Hamiltonian systems and celestial mechanics, 35–44. edited by Lacomba E A and Llibre J. World Scientific Publishing Co: Singapore.

Chan W C C. 1987. Stability of subharmonic solutions. SIAM J.Appll. Math., **47**(2): 244–253.

Changrong Z & Weinian Z. 2007. Linearly independent homoclinic bifurcations parameterized by a small function. J. Diff. Eqns., **240**: 38–57.

Changrong Z & Weinian Z. 2008. Computation of bifurcation manifolds of linearly independent homoclinic orbits. J. Diff. Eqns., **245**(7): 1975–1994.

Chenciner A. 1985a. Bifurcations de points fixes elliptiques, I. Courbes invariants. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **61**: 67–127.

Chenciner A. 1985b. Bifurcations de points fixes elliptiques, II. Orbits periodiques et ensembles de Cantor invariants. Invent. Math., **80**: 81–106.

Chicone C. 1994. Lyapunov-Schmidt reduction and Mel′nikov integrals for bifurcation of periodic solutions in coupled oscillators. J. Diff. Equns., **112**: 407–447.

Chicone C. 1995. Periodic solutions of a system of coupled oscillators near resonance. SIAM J. Math. Anal., **26**(5): 1257–1283.

Chicone C. 1997. Invariant tori for periodically perturbed oscillators. Publicacions Mathematiques, **41**: 57–83.

Chongchun Z. 2000. Homoclinic orbits for a perturbed nonlinear Schrodinger equation. Comm. Pure Appl. Math., **53**(10): 1222–1283.

Coppel W A. 1978. Dichotomics in stability theory. Lecture notes in Maths, **629**. Berlin: Springer.

de Melo W & S. van Strien S. 1993. One-dimensional Dynamics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.

Demirkol A S, Ozoguz S, Oksasoglu A, Akgul T & Wang Q D. 2009. Experimental verification of rank one chaos in switch-controlled smooth Chua's circuit. Chaos, **19**(1).

Deng B. 1989. The Sil′nikov problem, exponential expansion, strong λ-lemma, C^1-linearization, and homoclinic bifurcation. J. Diff. Eqns., **79**: 189–231.

Devaney R L & Nitecki Z. 1979. Shift automorphisms in the Hénon mapping. Commun. Math. Phys., **67**: 137–146.

Devaney R L. 1989. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison Wesley Atudies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, CA.

Diaz L J, Rocha J & Viana M. 1996. Strange attractors in saddle-node cycles: prevalence and globality. Invent.Math., **125**: 37–74.

Duffing G. 1918. Erzwungene Schwingungen bei Veranderlicher Eigenfrequenz. F. Wieweg u. Sohn:Braunschweig.

Easton R. 1984. Parabolic orbits for the planar tree boby problem. J. Diff. Eqns., **52**: 116–124.

Eliasson H. 1990. Normal form of Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals-the elliptic case. Comm. Math. Helv., **65**: 4–35.

Fečkan M. 1999. Higher dimensional Mel′nikov mappings. Math. Slovaca., **49**: 75–83.

Fengjuan C, Jibin L & Fangyue C. 2007. Chaos for discrete-time RTD-based cellular neural networks. Int. J. Bifur. Chaos., **17**(12): 4395–4401.

Fengjuan C & Maoan H. 2009. Rank one chaos in a class of planar systems with heteroclinic cycle Chaos, **19**: 043122.

Fengjuan C, Qiudong W & Oksasoglu A. 2010. Heteroclinic tangles in time-periodic equations. Preprint.

Fenichel N. 1971. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. Indiana Univ. Math. J., **21**: 193–225.

Fenichel N. 1974. Asymptotic stability with rate conditions. Indiana Univ. Math. J., **23**: 1109–1137.

Fenichel N. 1977. Asymptotic stability with rate conditions, II. Indiana Univ. Math. J., **26**: 81–93.

Fenichel N. 1979. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equa-

tions. J. Diff. Eqns., **31**: 53–98.

Gallavotti G, Gentile G & Giuliani A. 2006. Fractional Lindstedt series. J. Math. Phys., **47**: 012702.

Gelfreich V G. 1999. A proof of the exponentially small transversality of the separatrices for the standard map. Comm, Math. Phys., **201**: 155–216.

Gentile G, Bartuccelli M & Deane J. 2005. Summation of divergent series and Borel summability for strongly dissipative differential equations with periodic forcing terms. J. Math. Phys., **46**: 062704.

Gentile G, Bartuccelli M & Deane J. 2007. Bifurcation curves of subharmonic solutions and Mel′nikov theory under degeneracies. Rev. Math. Phys., **19**: 307.

Glendinning P & Sparrow C. 1984. Local and global behavior near homoclinic orbits. J. Stat. Phys., **35**: 645–696.

Goldstein H. 1980. Classical Mechanics, 2nd ed.. Addison-Wesley, Reading, MA.

Greenspan B D & Holmes P J. 1983. Homoclinic orbits, subharmonics and global bifurcations in forced oscillations. Nonlinear Dynamics an Turbulence (Barenblatt G., Iooss G. and Joseph D. D. editors), London: Pitman, 172–214.

Greenspan B D & Holmes P J. 1984. Repeated resonance and homoclinic bifurcation in a periodically forced family of oscillators. SIAM J. Math. Anal., **15**: 69–97.

Gruendler J. 1985. The existence of homoclinic orbits and the method of Mel′nikov for systems in $\mathbb{R}^n$. SIAM J.Math.Anal., **16**: 907–931.

Guckenheimer J & Holmes P. 1983. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. New York: Springer-Verlag.

Guckenheimer J, Weschelberger M & Young L S. 2006. Chaotic Attractors of Relaxation Oscillators. Nonlinearity, **19**: 701–720.

Gumowski I & Mira C. 1980. Recurrences and Discrete Dynamic Systems. Lecture notes in Math., **809**: Springer-Verlag.

Hénon M. 1976. A two-dimensional mapping with a strange attractor. Commun. Math. Phys., **50**: 69–77.

Hale J K. 1980. Ordinary differential equations, 2nd ed.. Robert E. Krieger, Malabar, FL.

Haller G & Wiggins S. 1993. Orbits homoclinic to resonances: the Hamiltonian case. Phys. D., **66**: 298–346.

Haller G & Wiggins S. 1995. N-pulse homoclinic orbits in perturbations of resonant Hamiltonian systems. Arch. Rational Mech. Anal., **130**: 25–101.

Haller G. 1995. Diffusion at intersecting resonances in Hamiltonian systems, Physics Letters A, **200**: 34–42.

Haller G. 1998. Multi-dimensional homoclinic jumping and the discretized NLS equation. Comm. Math. Phys., **193**: 1–46.

Hassard B, Kazarinoff N & Wan Y H. 1981. Theory and Applications of Hopf Bifurcation.

Cambridge University Press.

Hayashi C. 1964. Nonlinear Oscillations in physical systems. New York: McGraw-Hill.

Hirsoh M W & Smale S. 1974. Differential equations, dynamical systems, and linear algebra. New York: Academic Press.

Hofstandter D R. 1982. 奇异吸引子：在秩序与混沌之间巧妙维持平衡的数学模型. 科学 (中译本), **3**: 92–102.

Holems P J & Rand D A. 1976. The bifurcations of Duffing's equation: an application of catastrophe theory. J. Sound and Vibration., **44**: 237–253.

Holmes C & Holmes P. 1981. Second order averaging and bifurcations to subharmonics in Duffing's equation. J. Sound Vibration., **78**: 161–174.

Holmes P J & Lin Y K. 1978. Deterministic stability analysis of a wind loaded structure. Trans ASME J. Appl. Mech., **45**: 165–169.

Holmes P J. 1979a. A nonlinear oscillator with a strange attractor. Phil. Trans. Roy. Soc., **A292**: 419–448.

Holmes P J. 1979b. Domains of stability in a wind-induced oscillation problem. Trans. ASME J. Appl. Mech., **46**: 672–676.

Holmes P J. 1980. Averaging and chaotic motions in forced oscillations. SIAM J. Apple. Math., **38**: 65–80.

Holmes P & Marsden J E. 1982. Horseshoes in perturbation of Hamiltonian systems with two degrees of freedom. Comm. Math. Phys., **82**: 523–544.

Holmes P & Marsden J E. 1982. Mel′nikov's method and Arnold diffusion for perturbations of integrable Hamiltonian systems. J. Math. Phys., **23**: 669–675.

Houjun C & Zhujun J. 2001. Chaotic dynamics of Josephson equation driven by constant dc and ac forcing. Chaos, Soliton and Fractals, **12**(10): 1887–1895.

Hsu C S. 1977. On Nonlinear parametic excitation problems. Advances in Applied Mechanics, **17**: 245–301.

Ito H. 1989. Convergence of Birkhoff normal forms for integrable systems. Comm. Math. Helv., **64**: 363–407.

Janicki K & Szemplinska-Stupnicka W. 1993. Stability of subharmonics and escape phenomena in the twin-well potential Duffing system. Institute of Fundamental Technological Research Report., **6**.

Janicki K & Szemplinska-Stupnicka W. 1994. Bifurcations of subharmonics in a non-linear oscillator: perturbation methods versus numerical experiment. Chaos and Nonlinear Mechanics (Kapitaniak T. and Brindley, editors). Singapore: World Scientific, 30–39.

Janicki K. 1993. Bifurcations of subharmonics in non-linear oscillations: near-linear and near-Hamiltonian methods. 1st European Nonlinear Oscillations Conference, Technical University Hamburg, Germany.

Jianxin X, Rui Y & Weinian Z. 2005. An algorithm for Mel′nikov functions and application

to a chaotic rotor. SIAM J. Scientific Comput., **26**(5): 1525–1546.

Jiaping Y & Zhujun J. 2009a. Control of chaos in a three-well duffing system, Chaos, Solitons and Fractals, **41**: 1311–1328.

Jiaping Y & Zhujun J. 2009b. Controlling chaos in a pendulum equation with ultra-subharmonic resonances. Chaos, Solitons and Fractals, **42**: 1214–1226.

Jibin L & Baohua W. 1989. Chaos and subharmonic bifurcations in periodically forced system of phase-locked loops. Ann. Diff. Equs., **5**(4): 407–426.

Jibin L & Fengjuan C. 2011. Knotted Periodic Orbits and Chaotic Behavior of a Class of Three-Dimensional Flows, International Journal of Bifurcation and Chaos, **21**(9): 2505–2523.

Jibin L & Fengjuan C. 2011. Exact homoclinic orbits and heteroclinic families for a third-order system in the Chazy class XI ($N = 3$). Journal of Bifurcation and Chaos, **21**(11): 3305–3322.

Jibin L & Shidong W. 1988. Fourier series of rational fractions of Jacobian elliptic functions. Appl. Math. Mech., **9**(6): 541–556.

Jibin L & Xiaohua Z. 1989. Rotation symmetry groups of planar Hamiltonian systems. Ann. Diff. Equs., **5**(1): 25–33.

Jibin L & Xiaohua Z. 1990. Stability of subharmonic and behavior of bifurcations to chaos on toral Van der Pol equation. Acta Math. Appl., **6**(1): 88–96.

Jibin L & Xiaohua Z. 1993. Chaotic and resonant streamlines in the ABC flow. SIAM J. Appl. Math., **53**(1): 71–77.

Jibin L & Xiaohua Z. 1998. Periodic solutions and heteroclinic cycles in the convection model of a rotating fluid layer, in Recent advances in differential equations. Pitman Research Notes in Math. Ser., **386**: 47–61. Wealey Longman.

Jibin L & Xiaohua Z. 2011. Exact Heteroclinic Cycle Family and Quasi-Periodic Solutions for the Three-Dimensional Systems Determined by Chazy Class IX. International Journal of Bifurcation and Chaos, **21**(5): 1357–1367.

Jibin L & Yi Z. 2011a. Homoclinic Manifolds, Center Manifolds and Exact Solutions of Four-Dimensional Travelling Wave Systems for Two Classes of Nonlinear Wave Equations. International Journal of Bifurcation and Chaos, **21**(2): 527–543.

Jibin L & Yi Z. 2011b. Solitary Wave and Chaotic Behavior of Travelling Wave Solutions for the Coupled KdV Equations. Applied Mathematics and Computation, **218**: 1794–1797.

Jibin L & Zengrong L. 1985. Chaotic behavior in some nonlinear oscillatory system with the periodic forcing. Acta. Math. Scientia, **5**(2): 195–204.

Jibin L & Zheng W. 1986. A note on Smale horseshoes with positive measure. Journal of Northeast Normal University, (2): 37–41.

Jibin L, et al. 1986. Subharmonic and chaotic solutions of the second-order nonlinear

systems under parametric and forced excitation. Acta. Math. Scientia., **6**(4): 369–374.

Jibin L, et al. 1995. Chaos in sociobiology. Bull. Austral. Math. Soc, **51**: 439–451.

Jibin L, et al. 1996. Chaotic dynamics and subharmonic bifurcation in a nonlinear system. Int. J. Non-linear Mechanics, **31**: 277–295.

Jibin L, et al. 1998. Perturbed generalized Hamiltonian systems and some advection models. Bull. Austral. Math. Soc, **57**(1): 1–24.

Jibin L, et al. 2001. Chaos in perturbed Lotka-Volterra systems. ANZAM J., **42**: 399–412.

Jibin L, et al. 2003. Solitary waves and chaotic behavior for a class of coupled field equations. J. Bifur. Chaos, **13**(3): 643–651.

Jibin L, Jianming Z. 1993. New treatment on bifurcations of periodic solutions and homoclinic orbits at high r in the Lorentz equations. SIAM Journal on Appl. Math., **53**(4): 1055–1071.

Jibin L, Yibin F & Fengjuan C. 2009. Chaotic motion and Hamiltonian dynamics of a pre-stressed incompressible elastic plate due to resonant-triad interactions. International Journal of Bifurcation and Chaos, **19**(3): 903–921.

Jibin L. 1985a. Chaotic behavior in planar quadratic Hamiltonian system with periodic perturbation. Kexue Tongbao(Science Bulletin), Beijing, **30**(10): 1285–1291.

Jibin L. 1985b. Topological classification and chaotic behavior with periodic perturbation in planer symmetric cubic Hamiltonian system. Proceedings of the international conference on nonlinear mechanics. Shanghai, Science press. Beijing, China, 1057–1061.

Jibin L. 2009. Exact Dark Soliton, Periodic Solutions and Chaotic Dynamics in a Perturbed Generalized Nonlinear Schrodinger Equation. Canadian Applied Mathematics Quarterly, **17**(1): 161–173.

Jibin L. 2010. Chaotic dynamics for the two-component Bose-Einstein condensate system. Perspectives in Mathematical Science, Interdiscip. Math. Sci., **9**: 135–144. World Sci. Publ., Hackensack, NJ.

Jicai H & Zhujun J. 2009. Bifurcations and chaos in a three well Duffing system with a phase shift. Chaos, Solitons and Fractals, **40**: 1449–1466.

Jones C K R T & Kopell N. 1994. Tracking invariant manifolds with differential forms in singularly perturbed systems. J. Diff. Eqns., **108**: 64–88.

Jones C K R T & Tin S K. 2009. Generalized Exchange Lemmas and orbits heteroclinic to invariant manifolds. Discrete Cont Dyn. S - S, **4**: 967–1023.

Jones C K R T, Kaper T J & Kopell N. 1996. Tracking invariant manifolds up to exponentially small errors. SIAM J.Math.Anal., **27**: 558–577.

Jones C K R T, Kopell N & Langer R. 1991. Construction of the FitzHugh-Nagumo pulse using differential forms, in Patterns and Dynamics in Reactive Media, eds. H. SWINNEY, G. ARIS & D. ARONSON, IMA volumes in Mathematics and its Applications, **37**: 101–116. New York: Springer.

Kaper T J & Kovačič G. 1996. Multi-bump orbits homoclinic to resonance bands. Trans. Amer. Math. Soc., **348**: 3835–3887.

Kappeler T, Kodama Y & Némethi A. 1998. On the Birkhoff normal form of a completely integrable Hamiltonian system near a fixed point with resonance. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **4**: 623–661.

Kening L & Qiudong W. 2010. Chaos in differential equations driven by a nonautononous force. Nonlinearitym, **23**(11): 2935–2975.

Kening L & Qiudong W. 2011. Chaotic behavior in differential equations driven by a Brownian motion. J. Diff. Eqns., **251**(10): 2853–2895.

Kening L, Qiudong W & Young L S. 2007. Strange attractors for periodically forced parabolic equations. Preprint.

Koch B P & Leven R W. 1985. Subharmonics and homoclinic bifurcations in a parametrically forced pendulum. Physica D., **16**: 1–13.

Kovačič G & Wettergren T A. 1996. Homoclinic orbits in the dynamics of resonantly driven coupled pendula. Z. Angew. Math. Phys., **47**: 221–264.

Kovačič G & Wiggens S. 1992. Orbits homoclinic to resonances with an application to chaos in a model of the forced and damped Sine-Gordon equation. Physica D, **57**: 185–225.

Kovačič G. 1995. Singular perturbation theory for homoclinic orbits in a class of near-integrable dissipative systems. SIAM J. Math. Anal., **26**: 1611–1643.

Kovačič G. 1992a. Dissipative dynamics of orbits bomoclinic to a resonance band. Phys. Lett., **A167**: 143–150.

Kovačič G. 1992b. Hamiltonian dynamics of orbits homoclinic to a resonance band. Phys. Lett., **A167**: 137–142.

Lagerstrom P A. 1988. Matched asymptotic expansions: ideas and techniques. New York, Heidelberg, Berlin: Springer.

Langebartel R G. 1980. Fourier expansions of rational fractions of elliptic integrals and Jacobian elliptic functions. SIAM J. Math. Anal., **11**(3): 506-513.

Lauwerier H A. 1986. Two-dimensional interative maps, from Chaos. ed. by Holden A V. Princeton university press, Princeton, New Jersey.

Lefever R, & Prigogine I. 1968. Symmetry-breaking instability in dissipative systems II. J.Chem.Phy., **48**: 1695–1700.

Lerman L M, & Umanski IA L. 1984. On the existence of separatrix loops in four-dimensional systems similar to integrable Hamiltonian systems. PMM U. S. S. R., **47**: 335–340.

Levinson N. 1949. A second order differential equation with singular solutions. Ann. Math., **50**: 127–153.

Lijuan C, & Jibin L. 2004. Chaotic behavior and subhomonic bifurcations for a rotating

pendulum equation. J. Bifur. Chaos., **14**(10): 3477–3488.

Lin Chang, Liu Zheng-rong and Li Ji-bin. 1985. Subharmonic bifurcation and chaotic behavior in system planar quadratic Hamiltonian system with periodic perturbation. Proceedings of the International Conference on Nonlinear Mechanics, Shanghai, China, October, 28-31.

Lin K, & Young L S. 2010. Dynamics of periodically-kicked oscillators, to appear. Journal of Fixed Point Theory and Applications.

Lin K. 2006. Entrainment and chaos in a pulse-driven Hodgkin-Huxley oscillator. SIAM J.Appl.Dyn.Systt., **5**: 179–204.

Littlewood J E. 1957. On non-linear differential equations of second order: III. Acta. Math., **97**: 267–308.

Littlewood J E. 1957. On non-linear differential equations of second order: IV. Acta. Math., **98**: 1–110.

Lorenz E N. 1963. Deterministic non-periodic flow. J. Atmos. Sci., **20**: 130–141.

Lorenz E N. 1986. On the existence of a slow manifold. J. Atmos. Sci., **43**: 1547–1557.

Markus L. 1954. Global structure of ordinary differential equation in the plane. Trans.Amer. Maths. Soc., **76**: 127–148.

Marotto F R. 1978. Snap-back repellers imply chaos in R^n. J. Math. Anal. Appl., **63**: 199–223.

Marotto F R. 2005. On redefining a Snap-back repeller, Chaos, Solitons Fractals, **25**(1): 25–28.

Martinez R, & Pinyol C. 1994. Parabolic orbits in the elliptic restricted three-body problem. J. Diff. Eqns., **111**: 299–339.

Mcgehee R. 1973. A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics. J. Diff. Eqns., **14**: 70–88.

Mcrobie F A. 1992. Bifurcational precedences in the braids of periodic orbits of spiral 3-shoes in driven oscillators. Proc. Roy. Soc. London., **A438**: 545–569.

Mcrobie F A. 1993. Braids of orbits in single-degree-of-freedom forced oscillators. 1st European Nonlinear Oscillations Conference, Technical University Hamburg-Hamburg, Germany.

Mel′nikov V K. 1963. On the stability of the center for time periodic perturbations. Trans. Moscow Math. Soc., **12**: 1–57.

Meyer K R, & Hall G R. 1992. Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem. New York: Springer-Verlag.

Mielke A, Holmes P J & O'Reilly O. 1992. Cascades of homoclinic orbits to, and chaos near, a Hamiltonian saddle-center. J. Dyn. Diff. Eqns., **4**: 95–126.

Misiurewicz M. 1981. Absolutely continuous invariant measures for certain maps of an interval. Publ.Math.IHES., **53**: 17–51.

Mook D, & Nafeh A H. 1979. Nonlinear oscillation. Wiley.John & Inc.Sons.

Mora L, & Viana M. 1993. Abundance of strange attractors. Acta. Math., **171**: 1–71.

Morozov A D, & Shilnikov L P. 1984. On nonconservative periodic systems close to two-dimensional Hamiltonian. Prikl. Mat. Mekh., **47**: 327–334.

Morozov A D. 1973. Approach to a complete qualitative study of Duffing's equation. USSR J. Comp. Math. and Math. Phys., **13**: 1134–1152.

Morozov A D. 1973. Approach to a complete qualitative study of Duffing's equation. USSR Comput. Math. and Math. Phys., **13**: 45–66.

Morozov A D. 1976. A complete qualitative investigation of Duffing's equation. J. Diff. Eqns., **12**: 164–174.

Moser J. 1958. On the generalization of a theorem of Liapounoff. Comm. Pure Appl. Math., **11**: 257–271.

Moser J. 1973. Stable and Random Motions in Dynamical Systems. Princeton: Princeton University Press.

Nayfeh A H, & Mook D T. 1979. Nonlinear oscillations. New York: John Wiley and Sons.

Newhouse S E. 1974. Diffeomorphisms with infinitely many sinks. Topology, **13**: 9–18.

Newhouse S E. 1979. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms. Publ. Math. IHES, **50**: 101–151.

Palis J, & Demelo W. 1982. Geometric Theory of Dynamical Systems. New York: Springer-Verla.

Palis J, & Takens F. 1993. Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations. Cambridge studies in advanced mathematics, **35**. Cambridge: Cambridge University Press.

Palmer K J. 1984. Exponential dichotomies and transversal homoclinic points. J. Diff. Eqns., **55**: 225–256.

Pengchen X, & Zhujun J. 2011. Heteroclinic orbits and chaotic regions for Josephson system. J. Math. Appl., **376**: 103–122.

Pengcheng X, & Zhujun J. 2000. Minilkov orbits in coupled Duffing's system, Chaos solitons and Fractals, **11**: 853–858.

Poincaré H. 1899. Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste, 3 vols.. Paris: Gauthier-Villars.

Rabinowitz P H. 1989. Periodic and homoclinic orbits for a periodic Hamiltonian system, Ann. Inst. H. Poincaré, **6**: 331–346.

Rabinowitz P H. 1990. Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **A114**: 33–38.

Rabinowitz P H. 1994. Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system. Ergod. Th. Dynam. Sys., **14**: 817–829.

Rabinowitz P H. 1994. Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system II. Diff. Integral

Eqns., **7**: 1557–1572.

Rand R H, & Armbruster D. 1987. Perturbation Methods, Bifurcation Theory and Computer Algebra. New York: Springer-Verlag.

Rey-Bellet L, & Young L S. 2008. Large Deviations in nonuniformly hyperbolic dynamical systems. Ergodic Theory Dynam. Systems, **28**(2): 587–612.

Robinson C. 1983a. Bifurcation to infinitely many sinks. Commun. Math. Phys, **90**(3): 433–459.

Robinson C. 1983b. Sustained resonance for a nonlinear system with slowly varying coefficients. SIAM J. Math. Anal., **14**: 847–860.

Robinson C. 1984. Homoclinic orbits and oscillations for the planar three-body problem. J. Diff. Eqns., **52**: 356–377.

Robinson C. 1988. Horseshoes for autonomous Hamiltonian systems using the Mel′nikov integral. Ergod. Th. Dynam. Sys., **8**: 395–409.

Row-Kedar V. 1994. Secondary homoclinic bifurcation theorems. Chaos, **5**: 385–401.

Ruelle D, & Takens F. 1971. On the nature of turbulence. Comm. Math. Phys., **20**: 167–192; **23**: 343–344.

Ruelle D. 1979. Ergodic Theory of Differentiable Dynamical Systems. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci., **50**: 27–58.

Ruiqi W, & Zhujun J. 2004a. Chaos control of chaotic pendulum system. Chaos, Solitons and Fractals, **21**(1): 201–207.

Ruiqi W, & Zhujun J. 2004b. Chaos control of duffing system. Chaos, Solitons and Fractals, **21**: 201–207.

Ruiqi W, Jin D, & Zhujun J. 2006. Chaos control in duffing system. Chaos, Solitons and Fractals, **27**: 249–257.

Salam F M A. 1987. The Mel′nikov technique for highly dissipative systems. SIAM. J. Appl. Math., **47**(2): 232–243.

Sanders J A, & Verhulst F. 1985. Averaging Methods in nonlinear dynamical systems. New York: Springer-Verlag.

Sanders J A. 1982. Mel′nikov's method and averaging. Celestial Mechanics., **28**: 171–181.

Sarkovskii O M. 1964. Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself. Ukrain Math. Z., **16**: 61–71.

Sattinger P H. 1979. Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory. Lecture Notes in Mathematics, **762**, Springer-verlag.

Scheurle J. 1986. Chaotic solutions of Systems With almost periodic forcing. J. Applied Math. & Physics(ZAMP), **37**(1): 12–26.

Schweizer B, & Smital J. 1994. Measures of chaos and a spetral decomposition of dynamical systems on interval. Trans. Amer. Math. Soc., **344**: 737–754.

Sell G R. 1985. Smooth linearization near a fixed point. Amer. J. Math., **107**: 1035–1091.

Shatah J, & Chongchun Z. 2002. Periodic solutions for Hamiltonian systems under strong constraining forces. J. Diff. Eqns., **186**(2): 572–585.

Shatah J, & Chongchun Z. 2003. Orbits homoclinic to centre manifolds of conservative PDEs. Nonlinearity, **16**(2): 591–614.

Shigui R, & Weinian Z. 2005. Exponential dichotomies, the Fredholm alternative, and transverse homoclinic orbits in partial functional differential equations. J. Dyn. Diff. Eqns., **16**(4): 759–777.

Shigui R, Yilei T, & Weinian Z. 2008. Computing the heteroclinic bifurcation curves in predator-prey systems with ratio-dependent functional response. J. Math. Biology., **57**: 223–241.

Shui-Nee C, & Duo W. 1986. On the monotonicity of the periodic function of some second order equations. Časopis Pěst. Math., **111**(1): 14–25.

Shui-Nee C, Hale J, & Mallet-Paret J. 1980. An example of bifurcation to homoclinic orbits. J. Diff. Eqns., **37**: 351–373.

Shui-Nee C, & Hale J K. 1982. Methods of Bifurcation Theory. Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften, **251**. New York: Springer-Verlag.

Shui-Nee C, Chengzhi L, & Duo W. 1994. Normal Forms and Bifurcations of Planar Vector Fields. Cambridge University Press.

Siegel C L, & Moser J K. 1971. Lectures on Celestial Mechanics. New York, Heidelberg, Berlin: Springer.

Šilnikov L P. 1967. The existence of a countable set of periodic motions in the neighborhood of a homoclinic curve. Sov. Math. Dokl., **8**: 102–106.

Šilnikov L P. 1970. A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium of saddle-focus type. Math. USSR Sb., **10**: 91–102.

Sinai Y G. 1972. Gibbs measure in ergodic theory. Russ. Math. Surv., **27**: 21–69.

Šilnikov L P. 1965. A case of the existence of a denumerable set of periodic motions. Sov. Math. Dokl., **6**: 163–166.

Smale S. 1963. Diffeomorphisms with many periodic points, in Differential and Combinatorial Topolopy. Cairns S S(Ed.), 63–80. Princeton: Princeton Univ. Press.

Smale S. 1965. Diffeomorphisms with many periodic points. Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse). Princeton University Press, 63–80.

Smale S. 1967. Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc., **73**: 747–817.

Sparrow C. 1982. The Lorenz Equations: Bifurcations. Chaos, and Stranger Attractors. New York: Springer-Verlag.

Sternberg S. 1957. Local contraction and a theorem of Poincaré. Amer. J. Math., **79**: 809–824.

Sternberg S. 1958. On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-space. Amer.

J. Math., **80**: 623–631.

Szemplinska-Stupnicka W. 1991. The approximate analytical methods in the study of transition to chaotic motion in nonlinear oscillators// Engineering Application of Dynamics of Chaos (Szemplinska-Stupnicka W. & Troger editors). Wien: Springer-Verlag, 225–277.

Szemplinska-Stupnicka W. 1992. Cross-well chaos and escape phenomena in driven oscillators. Nonlinear Dynamics, **3**: 225–243.

Szemplinska-Stupnnicka W, & Rudowski J. 1993. Bifurcations phenomena in a non-linear oscillator: approximate analytical studies versus comuter simulation results. Phys. D., **66**: 368–380.

Takimoto N, & Yamashida H. 1987. The variational approach to the theory of subharmonic bifurcations. Phys. D., **26**: 251–276.

Terman D. 1992. The transition from bursting to continuous spiking in excitable membrane models. J. Nonlin. Sci., **2**: 135–182.

Thompson J M T. 1989. Chaotic phenomena triggering the escape from a potential well. Proc. Roy. Soc. London., **A421**: 195–225.

Tianyan L, & Yorke J A. 1975. Period three implies chaos. Amer. Math. Monthly, **82**: 985–992.

Tin S K, Kopell N, & Jones C K R T. 1994. Invariant manifolds and singularly perturbed boundary value problems. SIAM J. Num. Anal., **31**: 1558–1576.

Tin S K. 1994. On the dynamics of tangent spaces near a normally hyperbolic invariant manifold. Ph. D. thesis, Brown University.

Tin S K. 1995. Transversality of double-pulse homoclinic orbits in the inviscid Lorenz-Krishnamurthy system. Phys. D., **83**: 383–408.

Tresser C. 1984. About some theorems by L. P. Šilnikov, Ann. Inst. Henri Poincaré, **40**: 440–461.

Van der Pol B, & van der Mark J. 1927. Frequency demultiplication. Nature, **120**: 363–364.

Van der Waerden B L. 1881. Algebra. New York: Springer-Verlag.

Veerman P, & Holmes P. 1985. The existence of arbitrarily many distinct periodic orbits in a two degree of freedom Hamiltonian system. Phys. D., **14**: 177–192.

Veerman P, & Holmes P. 1986. Resonance bands in a two degree of freedom Hamiltonian system. Physica D., 413–422.

Virgin L N. 1988. On the harmonic response of an oscillator with unsymmetric restore force. J. Sound and Vibration, **126**: 157–165.

Virgin L N. 1989. Approximate criterion for capsize based on deterministic dynamics. Dynamics and Stability of Systems., **4**: 55–70.

Walters P. 1982. An introduction to ergodic theory. Springer-Verlag.

Wan Y H. 1978a. Bifurcation into invariant tori at points of resonance. Arch. Rational

Math. Anal., **68**: 343–357; **34**: 167–175.

Wan Y H. 1978b. Computations of the stability condition for the Hopf bifurcation of diffeomorphisms on $\mathbb{R}^2$. SIAM J. Appl. Math., **34**: 167–175.

Wang Q D, & Oksasoglu A. 2011. Dynamics of homoclinic tangles in periodically perturbed second-order equations. J.Differential Equations, **250**: 710–751.

Wang Q D, & Oksasoglu A. 2008. Rank one chaos: theory and applications. Int.J.Bifur. Chaos, **18**: 1261–1319.

Wang Q D, & Ott W. 2011. Dissipative homoclinic loops of two-dimensional maps and strange attractors with one direction of instability. Commun.Pure.Appl.Math., **11**: 1439–1496.

Wang Q D, & Young L S. 2001. Strange attractors with one direction of instability. Commun.Math.Phys, **218**: 1–97.

Wang Q D, & Young L S. 2002. From invariant curves to strange attractors. Commun.Math.Phys., **225**: 275–304.

Wang Q D, & Young L S. 2003. Strange attractors in periodically-kicked limit cycles and Hopf bifurcations. Commun.Math.Phys., **240**: 509–529.

Wang Q D, & Young L S. 2008. Towards a theory of rank one attractors. Ann.Math., **167**: 349–480.

Wang Q D, & Young L S. 2012. Dynamical profile of a class of rank one attractors. To appear Ergodic Theory and Dynamical Systems.

Weinian Z. 1995. Fredholm alternative and exponential dichotomies for parabolic equations. J. Math. Anal. Appl., **191**: 180–201.

Weinian Z. 2004. On Nulls of Perturbed Fredholm Operators and Degenerate Homoclinic Bifurcations. Science in China, **A47**(4): 617–627 (Chinese Version, **A34**(2): 146–156).

Weiyao Z, & Zhujun J. 1995. Exponential dichotomies and heteroclinic bifurcation in a degenerate case. Science in China A, **25**.

Wiggins S, & Holmes P. 1987a. Homoclinic orbits in slowly varying oscillators. SIAM J. Math. Anal., **18**: 612–629.

Wiggins S, & Holmes P. 1987b. Periodic orbits in slowly varying oscillators. SIAM J. Math. Anal., **18**: 592–611.

Wiggins S. 1988. Global Bifurcations and Chaos-Analytical Methods. New York: Springer-Verlag.

Wiggins S. 1990. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. New York: Springer-Verlag.

Wiggins S. 1994. Normally Hyperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems. New York: Springer-Verlag.

Xiangling F, Jin D, & Zhujun J. 2010. Complex dynamics in physical pendulum equation with suspension axis vibrations. ACTA. Math. Appl. Sinica, **26**(1): 55–78.

Xiaobiao L. 1986. Exponential dichotomies and homoclinic orbits in functional-differential equations. J. Diff. Eqns., **63**(2): 227–254.

Xiaobiao L. 1990a. Heteroclinic bifurcation and singularly perturbed boundary value problems. J. Diff. Eqns., **84**: 319–382.

Xiaobiao L. 1990b. Using Melnokov method to solve Silnikov's problems. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect., A **166**(3): 295–325.

Xingwu C, Weinian Z, & Weidong Z. 2005. Chaotic and subharmonic oscillations of a nonlinear power system. IEEE Transactions on Circuits and Systems II, **52**(12): 811–815.

Yagasaki K. 1993. Chaotic motions near homoclinic manifolds and resonant tori in quasiperiodic perturbations of planar Hamiltonian system. Physica D, **69**: 232–269.

Yagasaki K. 1994. Homoclinic motions and chaos in the quasiperiodically forced van der pol-Duffing oscillator with single well potential. Proc. Roy. Soc. London Ser. A., **445**: 597–617.

Yagasaki K. 1995. Bifurcations and chaos in a quasiperiodically forced beam: theory, simulation, and experiment. J. Sound and Vibration., **183**: 1–31.

Yagasaki K. 1996. A simple feedback control system: bifurcations of periodic orbits and chaos. Nonlinear Dynamics., **9**: 391–417.

Yagasaki K. 1996a. Bifurcation of periodic orbits and chaos in a simple feedback control system, Nonlinear Dynamics, **9**: 391–417.

Yagasaki K. 1996b. Second-order averaging and Mel′nikov analyses for forced nonlinear oscillators. J. Sound Vibration, **190**: 587–609.

Yagasaki K. 1999. The method of Mel′nikov for perturbations of multi-degree-of-freedom Hamiltonian systems. Nonlinearity, **12**: 799–822.

Yagasaki K. 2002. Mel′nikov's method and codimension two bifurcations in forced oscillations. J. Diff. Eqns., **185**: 1–24.

Yagasaki K. 2003. Degenerate resonances in forced oscillators. Discrete contin. Dyn. Syst. Ser. B., **3**: 423–438.

Yi L, Mclaughlin D W, Shatah J, & Wiggins S. 1996. Persistent homoclinic orbits for a perturbed nonlinear Schroedinger equation. Comm. Pure Appl. Math., **49**: 1175–1255.

Yi Z, Lingli X & Cedic Y K F. 2009. An improvement on Marotto's theorem and its applications to chaotification of switching systems. Chaos Solitons Fractals, **39**(5): 2225–2232.

Yilei T, & Zhang W. 2005. Heteroclinic bifurcation in a ratio-dependent predator-prey system. J. Math. Biology, **50**(6): 699–712.

Yilei T, Deqing H, Shigui R & Weinian Z. 2008. Coexistence of limit cycles and homoclinic loops in an SIRS model with a nonlinear incidence rate. SIAM J. Appl. Math., **69**(2): 621–639.

Yongluo C & Jian Min M. 2000. The non-wandering set of some Hénon maps, Chaos Solitons Fractals, **11**(13): 2045–2053.

Yongluo C & Shin K. 2000. The basin of the strange attactors of some Hénon maps, Chaos Solitons Fractals, **11**(5): 729–734.

Yongluo C & Shin K. 2002. The density of the transversal homoclinic points in the Hénon-like strange attractors. Chaos Solitons Fractals, **13**(4): 665–671.

Yongluo C Luzzatto S, & Rios I. 2008. Boundary of hyperbolicity for Hénon-like families. Ergod. Th. Dynam. Sys., **28**: 1049–1080.

Yongluo C. 1999a. The nonwandering set of some Hénon map. Chinese Sci. Bull., **44**(7): 590–594.

Yongluo C. 1999b. The transversal homoclinic points are dense in the codimension-1 Hénon-like strange attractors. Proc. Amer. Math. Soc., **127**(6): 1877–1883.

Young L S. 1998. Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity. Ann.Math., **147**: 585–650.

Young L S. 2002. What are SRB measures, and which dynamical systems have them? J.Stat.Phys., **108**: 733–754.

Yuming S & Guanrong C. 2004. Chaos of discrete dynamical systems in complete metric spaces, Chaos, Solitons, Fractals, **22**: 555–571.

Yuming S & Guanrong C. 2005. Discrete chaos in Banach spaces. Sci. China Ser. A: Math., **48**: 222–238.

Yuming S & Pei Y. 2008. Chaos induced by regular snap-back repellers. J. Math. Anal. Appl., **337**: 1480–1494.

Zhan Z, Jinliang W, Zhujun J & Ruiqi W. 2006. Complex dynamical behaviors in discrete-time recurrent neural network with non-symmetric connection matrix. Int. J. Bifurcation and Chaos in Applied Science and Engineering, **16**(8): 1–13.

Zhengdong D & Weinian Z. 2005. Mel′nikov method for homoclinic bifurcation in nonlinear impact oscillators. Comput. Math. Appl., **50**: 445–458.

Zhihong X. 1992. Mel′nikov method and transversal homoclinic orbits in the restricted three-body problem. J. Diff. Eqns., **96**: 170–184.

Zhirong H & Weinian Z. 2005. Subharmonic bifurcations in a perturbed nonlinear oscillation. Nonlinear Analysis Series A (Theory & Methods), **61**(6): 1057–1091.

Zhujun J & Houjun C. 2002. Bifurcations of periodic orbits in Josephson equation with a shifted phase backward. Int. J. Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, **12**(7): 1515–1530.

Zhujun J & Jianping Y. 2006. Bifurcation and chaos in discrete time predator -prey system. Chaos, Solitons and Fractals, **27**: 259–277.

Zhujun J & Jianping Y. 2006. Complex dynamics in pendulum equation with parametric and external excitations(I). Int. J. Bifurcation and Chaos in Applied Science and

Engineering, **16**(9): 1–16.

Zhujun J & Jianping Y. 2006. Complex dynamics in pendulum equation with parametric and external excitations(II). Int. J. Bifurcation and Chaos in Applied Science and Engineering, **16**(10): 1–26.

Zhujun J & Jianping Y. 2008. Inhibition of chaos in a pendulum equation. Chaos, Solitons and Fractals, **35**: 726–737.

Zhujun J & Jicai H. 2005. Bifurcation and chaos in a discrete genetic toggle switch system. Chaos, Solitons and Fractals, **23**: 887–908.

Zhujun J & Jinliang W. 2001. Bifurcation analysis and estimation of stabile region for turbine-generator shaft torsional oscillation. Automation of electric power systems, **25**(4): 6–10.

Zhujun J & Ruiqi W. 2005. Complex dynamics in Duffing system with two external forcings. Chaos, Solitons and Fractals, **23**: 399–411.

Zhujun J, Chan K Y, Dashun X & Hongjun C. 2001. Bifurcations of periodic solutions and Chaos in Josephson system.. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A, **7**(3): 573–592.

Zhujun J, Dashun X, Luonan C & Yu C. 2003. Bifurcations, chaos, and system collapse in a three node power system. Electrical power and energy system, **25**: 443–461.

Zhujun J, Jianping Y & Wei F. 2006. Bifurcation and chaos in neural exitable system. Chaos, Solitons and Fractals, **27**: 197–215.

Zhujun J, Jicai H, Jin D. 2007. Complex dynamics in three-well Duffing system with two external forcing. Chaos, Solitons and Fractals, **33**: 795–812.

Zhujun J, Jin D & Jianping Y. 2008. Bifurcations of periodic orbits and chaos in damped and driven Morse oscillator. Chaos, Solitons and Fractals, **35**: 486–505.

Zhujun J, Jinliang W & Luonan C. 2002. Computation of limit cycle via higher-order harmonic balance approximation and its application in electrical power systems, IEEE Transactions on circuits and systems-I: fundamental theory and applications, **49**(9): 1360–1370.

Zhujun J, Pengcheng X. 1999. Bifurcation of combination oscillations for Duffing's equation with two external forceing terms. Progress in Natural Science, **9**(4).

Zhujun J, Xianwu Z. 1997. Harmonic and subharmonic bifurcation in Brussel model with periodic force. Acta. Math.Appl.Sinica, English Series, **13**(3): 289–301.

Zhujun J, Yu C & Guanrong C. 2004a. Complex dynamics in a permanent-magnet synchronous motor model. Chaos, Solitons and Fractals, **22**(4): 831–848.

Zhujun J, Yu C, Boling G. 2004b. Bifurcation and chaos in discrete FitzHugh-Nagumo system. Chaos, Solitons and Fractals, **21**(3): 701–720.

Zhujun J, Zhiyan Y, Tao J. 2006. Complex dynamics in Duffing-Van der pol equatin, Chaos, Solitons and Fractals, **27**: 722–747.

Zhujun J, Zhiyuan J & Ruiqi W. 2002. Chaos behavior in the discrete BVP oscillator. Int. J. Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, **12**(3): 619–627.

Zhujun J, Zhiyuan J Chang Y. 2001. Chaos behavior in the discrete FitzHugh never system. Science in China(Series A), **44**(12): 2571–2578.

Zhujun J. 1989. Chaotic behavior in the Josephson equations with periodic force. SIAM. J. Appl. Math., **49**(6).

Zhujun J. 1991. A brief introduction to chaos. Mathematics in Practice and Theory, **1**: 81–94.

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1 数理逻辑基础(上册) 1981.1 胡世华 陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙 吕以辇 陈志华 著
3 组合论(上册) 1981.10 柯 召 魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭 方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧 刘秀芳 著
7 数理逻辑基础(下册) 1982. 8 胡世华 陆钟万 著
8 有限群构造(上册) 1982.11 张远达 著
9 有限群构造(下册) 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬 丁同仁 黄文灶 董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔 邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论(上册) 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论(上册) 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论(下册) 1987.12 柯 召 魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李 忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著
29 同调代数 1988.2 周伯壎 著

30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋等 编著
32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青 段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜 陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝等 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行等 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞等 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉 冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙 吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇 张学莲 著
41 线性偏微分算子引论(下册) 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录等 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰等 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲 马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英 李 冲 杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先 霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松等 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐 云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜等 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著
63 调和分析及其在偏微分方程中的应用 1999.10 苗长兴 著

64　惯性流形与近似惯性流形　2000.1　戴正德　郭柏灵　著
65　数学规划导论　2000.6　徐增堃　著
66　拓扑空间中的反例　2000.6　汪　林　杨富春　编著
67　拓扑空间论　2000.7　高国士　著
68　非经典数理逻辑与近似推理　2000.9　王国俊　著
69　序半群引论　2001.1　谢祥云　著
70　动力系统的定性与分支理论　2001.2　罗定军　张　祥　董梅芳　编著
71　随机分析学基础(第二版)　2001.3　黄志远　著
72　非线性动力系统分析引论　2001.9　盛昭瀚　马军海　著
73　高斯过程的样本轨道性质　2001.11　林正炎　陆传荣　张立新　著
74　数组合地图论　2001.11　刘彦佩　著
75　光滑映射的奇点理论　2002.1　李养成　著
76　动力系统的周期解与分支理论　2002.4　韩茂安　著
77　神经动力学模型方法和应用　2002.4　阮炯　顾凡及　蔡志杰　编著
78　同调论——代数拓扑之一　2002.7　沈信耀　著
79　金兹堡-朗道方程　2002.8　郭柏灵等　著
80　排队论基础　2002.10　孙荣恒　李建平　著
81　算子代数上线性映射引论　2002.12　侯晋川　崔建莲　著
82　微分方法中的变分方法　2003.2　陆文端　著
83　周期小波及其应用　2003.3　彭思龙　李登峰　谌秋辉　著
84　集值分析　2003.8　李　雷　吴从炘　著
85　数理逻辑引论与归结原理　2003.8　王国俊　著
86　强偏差定理与分析方法　2003.8　刘　文　著
87　椭圆与抛物型方程引论　2003.9　伍卓群　尹景学　王春朋　著
88　有限典型群子空间轨道生成的格(第二版)　2003.10　万哲先　霍元极　著
89　调和分析及其在偏微分方程中的应用(第二版)　2004.3　苗长兴　著
90　稳定性和单纯性理论　2004.6　史念东　著
91　发展方程数值计算方法　2004.6　黄明游　编著
92　传染病动力学的数学建模与研究　2004.8　马知恩　周义仓　王稳地　靳　祯　著
93　模李超代数　2004.9　张永正　刘文德　著
94　巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用　2005.1　王玉文　著
95　巴拿赫空间结构和算子理想　2005.3　钟怀杰　著
96　脉冲微分系统引论　2005.3　傅希林　闫宝强　刘衍胜　著
97　代数学中的 Frobenius 结构　2005.7　汪明义　著

(O-4776.0101)

www.sciencep.com


ISBN 978-7-03-034740-4

科学出版中心 数理分社
电话：(010) 64033664
Email：math-phy@mail.sciencep.com
网 址：http://www.math-phy.cn

销售分类建议：高等数学

定 价：75.00 元